

# Numerische Methoden I

Anna Rogel

16. Januar 2007

## 1 Einleitung

Ziel:

Berechnung von Anleihen- und Derivatpreisen ohne analytische Preisformeln.  
Der Ausgangspunkt ist hierbei das risikoneutrale Maß  $Q$ , also

$$V(t) = \mathbb{E}_Q \left[ \exp \left( - \int_t^T r(s) ds \right) V(T) | \mathcal{F}_t \right]$$

Dieser Ansatz ist die Grundlage der Gitter Methoden und der Methode der Finiten Differenzen.

## 2 Gitter Methoden

### 2.1 Allgemeines Gitter Modell

Betrachtet werden die Zeitpunkte  $t_0 < t_1 < \dots < t_m$ . Im Zeitpunkt  $t_i$  gibt es  $n_i$  Knoten, wobei der Knoten  $j$  zur Zeit  $t_i$  als Zustand  $(i,j)$  bezeichnet wird. Zu jedem Zustand gehört der risikolose Zinssatz  $r(i,j)$ , mit welchem zwischen den Zeitpunkten  $t_i$  und  $t_{i+1}$  verzinst wird. Definiere

$$q(i, j; k) = \mathbb{P}_Q[\text{Zustand}(i+1, k) | \text{Zustand}(i, j) \text{ im Zeitpunkt } t_i]$$

als die Übergangswahrscheinlichkeiten für das Gitter.

Es soll der Preis einer europäischen Option mit Fälligkeitszeitpunkt  $T = t_m$  berechnet werden. Die Preise bei Fälligkeit, also  $V(m,k)$ , für  $k=1, \dots, n_m$ , sind bekannt. Die Berechnung erfolgt rekursiv:

Sind im Zeitpunkt  $t_i$  die Preise für die Zustände  $(i,1) \dots (i,n_i)$  schon berechnet, lauten die Preise für den Zeitpunkt  $t_{i-1}$  für  $j = 1, \dots, n_{i-1}$

$$V(i-1, j) = \exp[-r(i-1, j)(t_i - t_{i-1})] \sum_{k=1}^{n_i} q(i-1, j; k) V(i, k)$$

Soll der Preis einer amerikanischen Option berechnet werden, fließen auch die Zahlungen  $U(i,j)$  bei Ausübung im Zustand  $(i,j)$  in die Preisberechnung mit ein:

$$V(i-1, j) = \max \left\{ \exp[-r(i-1, j)(t_i - t_{i-1})] \sum_{k=1}^{n_i} q(i-1, j; k) V(i, k), U(i-1, j) \right\}$$

## 2.2 Das trinomische Gitter Modell von Hull und White

Sei  $t_i = t_0 + i\Delta t$

Im Laufe jedes Zeitintervalls  $\Delta t$  kann der risikolose Zinssatz um einen festen Betrag  $\Delta r$  steigen, um  $\Delta r$  sinken oder gleich bleiben:

$$r((i+1)\Delta t) = \begin{cases} r(i\Delta t) + \Delta r \\ r(i\Delta t) \\ r(i\Delta t) - \Delta r \end{cases}$$

Bei der Bezeichnung der Zustände ist es üblich, dass, ausgehend von  $(i,j)$ , ein gleichbleibender Zinssatz zum Zustand  $(i+1,j)$  führt, ein ansteigender Zinssatz zum Zustand  $(i+1,j+1)$  und ein absinkender zu  $(i+1,j-1)$ .

Startet man im Punkt  $(0,0)$ , gibt es nach  $n$  Zeitschritten  $2n+1$  Zustände  $(n,-n), (n,-n+1), \dots, (n,n-1), (n,n)$ .

Einführung einer Begrenzung für die Ausdehnung des Gitters:

Wird der maximale Wert von  $r(t)$  erreicht wechselt man von mittigen zu absteigenden Verzweigungen, das heisst im nächsten Zeitschritt können die Werte  $r(t)$ ,  $r(t)-\Delta r$  und  $r(t)-2\Delta r$  erreicht werden. Beim Erreichen des minimalen Wertes von  $r(t)$  wird zu aufsteigenden Abzweigungen gewechselt.

Notation:

$q_{uu} = \mathbb{P}_Q[\text{Zustand } (i+1,j+2) \text{ im Zeitpkt } (i+1)\Delta t \mid \text{Zustand } (i,j) \text{ im Zeitpkt } i\Delta t]$

$q_u = \mathbb{P}_Q[(i+1,j+1) \mid (i,j)] \quad q_c = \mathbb{P}_Q[(i+1,j) \mid (i,j)]$

$q_d = \mathbb{P}_Q[(i+1,j-1) \mid (i,j)] \quad q_{dd} = \mathbb{P}_Q[(i+1,j-2) \mid (i,j)]$

Ausgehend von der SDE

$$dr(t) = \mu_r(t, r(t))dt + \sigma_r(t, r(t))d\tilde{W}(t)$$

erhält man folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_Q[r(t+\Delta t) - r(t) \mid r(t)] &\approx \mu_r(t, r(t))\Delta t \\ &= q_{uu} \times 2\Delta r + q_u \times \Delta r + q_c \times 0 + q_d \times (-\Delta r) + q_{dd} \times (-2\Delta r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_Q[(r(t+\Delta t) - r(t))^2 \mid r(t)] &\approx \sigma_r(t, r(t))^2 \Delta t + \mu_r(t, r(t))^2 \Delta t^2 \\ &= q_{uu} \times 4\Delta r^2 + q_u \times \Delta r^2 + q_d \times \Delta r^2 + q_{dd} \times 4\Delta r^2 \end{aligned}$$

$$q_{uu} + q_u + q_c + q_d + q_{dd} = 1$$

Dieses Gleichungssystem muss nun für die verschiedenen Verzweigungsarten gelöst werden. Definiere

$$\begin{aligned} k_r &= k_r(t, r(t)) = \frac{\Delta r^2}{\sigma_r(t, r(t))^2 \Delta t} \\ \theta_r &= \theta_r(t, r(t)) = \frac{\mu_r(t, r(t)) \Delta t}{\Delta r} \end{aligned}$$

Wahrscheinlichkeiten beim mittigen Verzweigen ( $q_{uu} = q_{dd} = 0$ )

$$q_u = \frac{1}{2k_r} + \frac{\theta_r}{2} + \frac{\theta_r^2}{2}, \quad q_c = 1 - \frac{1}{k_r} - \theta_r^2, \quad q_d = \frac{1}{2k_r} - \frac{\theta_r}{2} + \frac{\theta_r^2}{2}$$

Wahrscheinlichkeiten beim absteigenden Verzweigen ( $q_{uu} = q_u = 0$ )

$$q_c = 1 + \frac{1}{2k_r} + \frac{3\theta_r}{2} + \frac{\theta_r^2}{2}, \quad q_d = -\frac{1}{k_r} - 2\theta_r - \theta_r^2, \quad q_{dd} = \frac{1}{2k_r} + \frac{\theta_r}{2} + \frac{\theta_r^2}{2}$$

Wahrscheinlichkeiten beim aufsteigenden Verzweigen ( $q_{dd} = q_d = 0$ )

$$q_{uu} = \frac{1}{2k_r} - \frac{\theta_r}{2} + \frac{\theta_r^2}{2}, \quad q_u = -\frac{1}{k_r} + 2\theta_r - \theta_r^2, \quad q_c = 1 + \frac{1}{2k_r} - \frac{3\theta_r}{2} + \frac{\theta_r^2}{2}$$

Hängt die Volatilität von  $r(t)$  ab, ist es üblich eine Transformation durchzuführen, um einen Prozess mit konstanter Volatilität zu erhalten. Betrachte  $X(t) = f(t, r(t))$ , wobei  $r(t) = f^{-1}(t, X(t))$  wohldefiniert ist. Um konstante Volatilität zu erreichen, benötigt man:

$$\frac{\partial f}{\partial r}(t, r) = \frac{1}{\sigma_r(t, r)}$$

Zur Berechnung der Pfadwahrscheinlichkeiten werden folgende Größen benötigt:

$$k_X(t, X(t)) = k = \frac{\Delta^2}{\Delta t}, \quad \theta_X(t, X(t)) = \theta = \mu_X(t, X(t)) \sqrt{\frac{\Delta t}{k}}$$

Hull und White schlagen vor  $k = 3$  zu wählen.

Die Preisberechnung für eine europäische Option erfolgt rekursiv:

Seien  $V(i, j)$  bekannt für  $j = n_l, \dots, n_u$ , dann folgt

$$V(i-1, j) = \begin{cases} \exp(-r(i-1, j)\Delta t) \sum_{k=j-2}^j q(i-1, j; k) V(i, k) & \text{für } j = n_u \\ \exp(-r(i-1, j)\Delta t) \sum_{k=j-1}^{j+1} q(i-1, j; k) V(i, k) & \text{für } n_l < j < n_u \\ \exp(-r(i-1, j)\Delta t) \sum_{k=j}^{j+2} q(i-1, j; k) V(i, k) & \text{für } j = n_l \end{cases}$$

Für den Preis einer amerikanischen Option erfolgt die Berechnung, wie im allgemeinen Fall beschrieben, unter Berücksichtigung der Zahlungen bei Ausübung vor Ende der Laufzeit.

### 3 Methode der Finiten Differenzen

Betrachtet wird das Ein-Faktor-Modell für  $r(t)$ :

$$dr(t) = \mu_r(t, r(t))dt + \sigma_r(t, r(t))d\tilde{W}(t)$$

wobei  $\tilde{W}(t)$  eine Standard Brownsche Bewegung unter dem risikoneutralen Maß  $Q$  darstellt.

Für eine europäische Derivat mit  $V(T) = \psi(r(T))$  wurde folgende partielle Differentialgleichung hergeleitet:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial r} \mu_r(t, r) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \sigma_r(t, r)^2 = rV$$

Diese partielle Differentialgleichung soll numerisch mit einer Gitterapproximation gelöst werden, wobei wieder rekursiv vorgegangen wird, angefangen beim Fälligkeitszeitpunkt  $T$ .

Dazu transformiert man  $r(t)$  in den Prozess  $X(t) = f(r(t))$ , dessen Volatilität konstant ist.  $f(t,r)$  wird so gewählt, dass gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial r}(t, r) = \frac{1}{\sigma_r(t, r)}$$

Es ergibt sich die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \theta_x(t, x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = r(t, x) V$$

wobei

$$\begin{aligned} \theta_x(t, x) &= \left( \frac{\partial r}{\partial x}(t, x) \right)^{-1} \left[ \mu_r(t, r(t, x)) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}(t, x) - \frac{\partial r}{\partial t}(t, x) \right] \\ &= \frac{\mu_r(t, r(t, x))}{\sigma_r(t, r(t, x))} - \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r}(t, r(t, x)) - \frac{1}{\sigma_r(t, r(t, x))} \frac{\partial r}{\partial x}(t, x) \end{aligned}$$

mit der Randbedingung  $V(T, x) = \psi(r(T, x))$

Zur Definition des Gitters:

Die Zeit  $t$  läuft von  $t_o$  bis  $t_m = T$ , wobei  $t_i = t_o + i \Delta t$   
 $x$  läuft von  $x_o$  bis  $x_n$ , wobei  $x_i = x_o + i \Delta x$ . Außerdem müssen Randbedingungen für den oberen und unteren Rand des Gitters festgelegt werden.

Es wird folgende Notation verwendet:

$$\begin{aligned} V(i, j) &\equiv V(t_i, x_j), & \frac{\partial V}{\partial t}(i, j) &\equiv \frac{\partial V}{\partial t}(t_i, x_j), \text{ etc.} \\ \theta(i, j) &\equiv \theta_x(t_i, x_j), & r(i, j) &\equiv r(t_i, x_j) \end{aligned}$$

In den Punkten, die nicht auf dem Rand des Gitters liegen, werden die partiellen Ableitungen folgendermaßen approximiert:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t}(i, j) &= \frac{V(i+1, j) - V(i, j)}{\Delta t}, \\ \text{oder } \frac{\partial V}{\partial t}(i+1, j) &= \frac{V(i+1, j) - V(i, j)}{\Delta t}, \\ \frac{\partial V}{\partial x}(i, j) &= \frac{V(i, j+1) - V(i, j-1)}{2\Delta x}, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(i, j) &= \frac{V(i, j+1) - 2V(i, j) + V(i, j-1)}{(\Delta x)^2} \end{aligned}$$

Für die Festlegung der Randbedingungen gibt es verschiedene Möglichkeiten. Hier wird eine Approximation von Vetzal verwendet:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x}(i, 0) &= \frac{-V(i, 2) + 4V(i, 1) - 3V(i, 0)}{2\Delta x}, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(i, 0) &= \frac{V(i, 2) - 2V(i, 1) + V(i, 0)}{(\Delta x)^2} \\ \frac{\partial V}{\partial x}(i, N) &= \frac{3V(i, N) - 4V(i, N-1) + V(i, N-2)}{2\Delta x}, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(i, N) &= \frac{V(i, N) - 2V(i, N-1) + V(i, N-2)}{(\Delta x)^2}\end{aligned}$$

### 3.1 Explizite Finite Differenzen

Einsetzen der Approximationen für die Ableitungen in die partielle Differentialgleichung ergibt:

$$(1 + r(i, j)\Delta t)V(i, j) = V(i + 1, j + 1)p_u(i, j) + V(i + 1, j)p_m(i, j) + V(i + 1, j - 1)p_d(i, j)$$

wobei

$$\begin{aligned}p_u(i, j) &= \frac{\theta(i, j)\Delta t}{2\Delta x} + \frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2} \\ p_m(i, j) &= 1 - \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \\ p_d(i, j) &= -\frac{\theta(i, j)\Delta t}{2\Delta x} + \frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2}\end{aligned}$$

Analog ergeben sich die Gleichungen für die Randbedingungen:

$$(1 + r(i, 0)\Delta t)V(i, 0) = V(i + 1, 2)p_{uu}(i, 0) + V(i + 1, 1)p_u(i, 0) + V(i + 1, 0)p_m(i, 0)$$

wobei

$$\begin{aligned}p_{uu}(i, 0) &= -\frac{\theta(i, 0)\Delta t}{2\Delta x} + \frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2} \\ p_u(i, 0) &= \frac{2\theta(i, 0)\Delta t}{\Delta x} - \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \\ p_m(i, 0) &= 1 - \frac{3\theta(i, 0)\Delta t}{2\Delta x} + \frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2}\end{aligned}$$

und

$$(1 + r(i, N)\Delta t)V(i, N) = V(i + 1, N)p_m(i, N) + V(i + 1, N - 1)p_d(i, N) + V(i + 1, N - 2)p_{dd}(i, N)$$

wobei

$$\begin{aligned}p_m(i, N) &= 1 + \frac{3\theta(i, N)\Delta t}{2\Delta x} + \frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2} \\ p_d(i, N) &= -\frac{2\theta(i, N)\Delta t}{\Delta x} - \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \\ p_{dd}(i, N) &= \frac{\theta(i, N)\Delta t}{2\Delta x} + \frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2}\end{aligned}$$

Die Berechnung der Derivatpreise ist mit dieser Methode relativ einfach, allerdings ist das Verfahren instabil, falls

$$1 < \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

### 3.2 Implizite Finite Differenzen

Auch bei dieser Methode approximiert man die Ableitungen, welche in der partiellen Differentialgleichung vorkommen, allerdings wählt man andere Indizes als beim expliziten Verfahren. Es ergibt sich

$$(1 - r(i + 1, j)\Delta t)V(i + 1, j) = V(i, j + 1)q_u(i, j) + V(i, j)q_m(i, j) + V(i, j - 1)q_d(i, j)$$

wobei

$$\begin{aligned} q_u(i, j) &= -\frac{\theta(i + 1, j)\Delta t}{2\Delta x} - \frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2} \\ q_m(i, j) &= 1 + \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \\ q_d(i, j) &= \frac{\theta(i + 1, j)\Delta t}{2\Delta x} - \frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2} \end{aligned}$$

Analog ergeben sich die Gleichungen für die Randbedingungen:

$$(1 - r(i + 1, 0)\Delta t)V(i + 1, 0) = V(i, 2)q_{uu}(i, 0) + V(i, 1)q_u(i, 0) + V(i, 0)q_m(i, 0)$$

wobei

$$\begin{aligned} q_{uu}(i, 0) &= \frac{\theta(i + 1, 0)\Delta t}{2\Delta x} - \frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2} \\ q_u(i, 0) &= -\frac{2\theta(i + 1, 0)\Delta t}{\Delta x} + \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \\ q_m(i, 0) &= 1 + \frac{3\theta(i + 1, 0)\Delta t}{2\Delta x} - \frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2} \end{aligned}$$

und

$$(1 - r(i + 1, N)\Delta t)V(i + 1, N) = V(i, N)q_m(i, N) + V(i, N - 1)q_d(i, N) + V(i, N - 2)q_{dd}(i, N)$$

wobei

$$\begin{aligned} q_m(i, N) &= 1 - \frac{3\theta(i + 1, N)\Delta t}{2\Delta x} - \frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2} \\ q_d(i, N) &= \frac{2\theta(i + 1, N)\Delta t}{\Delta x} + \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \\ q_{dd}(i, N) &= -\frac{\theta(i + 1, N)\Delta t}{2\Delta x} - \frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2} \end{aligned}$$

Man erhält also implizite Gleichungen für  $V(i, 0), \dots, V(i, N)$ , welche in Matrixschreibweise wie folgt aussehen:

$$\begin{aligned} \Omega(i)V(i) &= \lambda(i) \\ \lambda(i)_j &= (1 - r(i + 1, j)\Delta t)V(i + 1, j), \quad j = 0, \dots, N \\ V(i)_j &= V(i, j), \quad j = 0, \dots, N \\ \Omega(i) &= [\omega_{j,k}]_{j,k=0}^N \end{aligned}$$

Die Matrix  $\Omega(i)$  ist dabei fast tridiagonal:

$$\begin{aligned}\omega_{N,N-2} &= q_{dd}(i, N) \\ \omega_{j,j-1} &= q_d(i, j), \quad j = 1, \dots, N \\ \omega_{j,j} &= q_m(i, j), \quad j = 0, \dots, N \\ \omega_{j,j+1} &= q_u(i, j), \quad j = 0, \dots, N-1 \\ \omega_{0,2} &= q_{uu}(i, 0) \\ \omega_{j,k} &= 0 \quad \text{sonst}\end{aligned}$$

### 3.3 Lösung eines Gleichungssystems mit fast tridiagonaler Matrix

Umformen des Gleichungssystems in

$$\tilde{\Omega}(i)V(i) = \tilde{\lambda}(i)$$

mit tridiagonaler Matrix  $\tilde{\Omega}(i)$ :

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_{j,k} &= \omega_{j,k}, \quad j = 1, \dots, N-1; k = 0, \dots, N \\ \tilde{\omega}_{0,k} &= \omega_{0,k} - \frac{\omega_{0,2}}{\omega_{1,2}}\omega_{1,k}, \quad k = 0, \dots, N \\ \tilde{\omega}_{N,k} &= \omega_{N,k} - \frac{\omega_{N,N-2}}{\omega_{N-1,N-2}}\omega_{N-1,k}, \quad k = 0, \dots, N \\ \tilde{\lambda}_j &= \lambda_j, \quad j = 1, \dots, N-1 \\ \tilde{\lambda}_0 &= \lambda_0 - \frac{\omega_{0,2}}{\omega_{1,2}}\lambda_1 \\ \tilde{\lambda}_N &= \lambda_N - \frac{\omega_{N,N-2}}{\omega_{N-1,N-2}}\lambda_{N-1}\end{aligned}$$

Schrittweises Umformen des Gleichungssystems in

$$\bar{\Omega}(i)V(i) = \bar{\lambda}(i)$$

mit oberer Dreiecksmatrix  $\bar{\Omega}(i)$ :

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_{0,k} &= \tilde{\omega}_{0,k}, \quad j = 0, \dots, N \\ \bar{\lambda}_0 &= \tilde{\lambda}_0\end{aligned}$$

Für  $j=1, \dots, N$  berechne

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_j &= \frac{\tilde{\omega}_{j,j-1}}{\tilde{\omega}_{j-1,j-1}} \\ \bar{\omega}_{j,k} &= \tilde{\omega}_{j,k} - \tilde{\phi}_j\tilde{\omega}_{j-1,k}, \quad k = 0, \dots, N \\ \bar{\lambda}_j &= \tilde{\lambda}_j - \tilde{\phi}_j\tilde{\lambda}_{j-1}\end{aligned}$$

Nun kann dieses Gleichungssystem gelöst werden:

$$\begin{aligned}V(i, N) &= \frac{\bar{\lambda}_N}{\bar{\omega}_{N,N}} \\ V(i, j) &= \frac{\bar{\lambda}_j - \bar{\omega}_{j,j+1}V(i, j+1)}{\bar{\omega}_{j,j}} \quad j = N-1, N-2, \dots, 0\end{aligned}$$

Damit ist die implizite Methode um einiges aufwändiger als die explizite. Der große Vorteil der impliziten Finiten Differenzen liegt in der uneingeschränkten Stabilität.

### 3.4 Die Crank-Nicolson Methode

Sei  $\alpha \in [0,1]$

Nach Einsetzen der approximierten Ableitungen in die partielle Differentialgleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} & \alpha V(i, j + 1)q_u(i, j) + V(i, j)q_m(i, j) + V(i, j - 1)q_d(i, j) \\ & + (1 - \alpha)(1 + r(i, j)\Delta t)V(i, j) \\ = & (1 - \alpha)V(i + 1, j + 1)p_u(i, j) + V(i + 1, j)p_m(i, j) + V(i + 1, j - 1)p_d(i, j) \\ & + \alpha(1 - r(i + 1, j)\Delta t)V(i + 1, j) \end{aligned}$$

Durch die Randbedingungen ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} & \alpha V(i, 2)q_{uu}(i, 0) + V(i, 1)q_u(i, 0) + V(i, 0)q_m(i, 0) \\ & + (1 - \alpha)(1 + r(i, 0)\Delta t)V(i, 0) \\ = & (1 - \alpha)V(i + 1, 2)p_{uu}(i, 0) + V(i + 1, 1)p_u(i, 0) + V(i + 1, 0)p_m(i, 0) \\ & + \alpha(1 - r(i + 1, 0)\Delta t)V(i + 1, 0) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & \alpha V(i, N)q_m(i, N) + V(i, N - 1)q_d(i, N) + V(i, N - 2)q_{dd}(i, N) \\ & + (1 - \alpha)(1 + r(i, N)\Delta t)V(i, N) \\ = & (1 - \alpha)V(i + 1, N)p_m(i, N) + V(i + 1, N - 1)p_d(i, N) + V(i + 1, N - 2)p_{dd}(i, N) \\ & + \alpha(1 - r(i + 1, N)\Delta t)V(i + 1, N) \end{aligned}$$

Bei der Crank-Nicolson Methode ist  $\alpha=0,5$ . Es ergibt sich, genau wie bei der impliziten Methode, ein Gleichungssystem mit einer fast tridiagonalen Matrix.

### 3.5 Konvergenzordnungen

Man betrachtet eine Folge von Gittermethoden  $G_l$  mit Schrittweiten  $\Delta t(l) \rightarrow 0$  und  $\Delta x(l) \rightarrow 0$  für  $l \rightarrow \infty$ . Der Fehler bei den expliziten und impliziten Finiten Differenzen ist dann von der Ordnung  $O(\Delta t) + O(\Delta x^2)$ .

Bei der Crank-Nicolson Methode ist die Fehlerordnung  $O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2)$ .