Seminar Versicherungsrisiko und Ruin Xin Wang
Prof. Hanspeter Schmidli
21,04,2009

Nutzentheorie

2.1 Einführung

Die Nutzentheorie hat viele Anwendungen ,inbesondere in den Wirtschaftswissenschaften.In diesem Kapitel jedoch betrachten wir die Nutzentheorie nur aus der Perspektive der Versicherungswirtschaft.

2.2 Nutzenfunktionen

Eine Nutzenfunktion,u(x),kann beschrieben werden als eine Funktion,die den Wert oder Nutzen einer Geldmenge x misst,wobei der Nutzen oder Wert der Geldmenge x von einer Einzelperson (Institution) zugeordnet wird.
.

Wir nehmen an ,dass eine Nutzenfunktion die unteren Bedingungen erfüllt.

$$u'(x) > 0 \;\; und \;\; u''(x) < 0 \qquad (2.1)$$

Die erste Bedingung besagt ,dass u eine wachsende Funktion ist,während die zweite besagt ,dass u eine konkave Funktion ist.

Ein Individuum ,dessen Nutzenfunktion die Bedingungen in (2.1) erfüllt,heisst risiko-avers(scheu).Und Risiko Aversion kann durch einen Koeffizient quantifiziert werden,der durch

$$\gamma(x) = \frac{-u''(x)}{u'(x)} \qquad (2.2)$$

definiert wird.

Nutzentheorie kann angewandt werden,um zu erklären, wieso ein Individuum bereit ist ,Versicherung zu kaufen und Prämie zu zahlen.

2.3 Das erwartete Nutzen Kriterium

Das Treffen der Entscheidung ,das die Nutzenfunktion anwendet,basiert auf dem erwarteten Nutzen Kriterium.

Dieses Kriterium besagt,dass ein Entscheidungstreffer den erwarteten Nutzen des resultierenden Vermögenswertes unter allen Vorgehensweisen(Handlungen) errechnen sollte,dann die Handlung wählt,die den grössten Wert für den erwarteten Nutzen des resultierenden Vermögenswertes bringt.
Falls zwei Handlungen den selben erwarteten Nutzen des resultierenden Vermögens bringen,hat der Entscheidungstreffer keine Präferenz zwischen den beiden ..

Um dieses Konzept zu illustrieren,nehmen wir an,dass ein Investor mit der Nutzenfunktion u zwischen zwei Investitionen wählen kann,die den Netto Gewinn X_1 oder X_2 ergeben.Der Investor verfügt über Vermögenswert W.Der resultierende Vermögenswert ,der durch eine Investition in Investition i hervorgeht,ist $W + X_i$, für i=1,2.Daraus folgt unter Anwendung des Nutzen Kriteriums,dass der Investor Investition 1 gegenüber Investition 2 genau dann bevorzugt,wenn

$$E\left[u\left(W + X_1\right)\right] > E\left[u\left(W + X_2\right)\right]$$

Weiterhin gilt,dass der Investor keine Präferenz zwischen Investition 1 und 2 hat,wenn gilt

$$E\left[u\left(W + X_1\right)\right] = E\left[u\left(W + X_2\right)\right]$$

2.4 Jensen's Ungleichung

Jensen's Ungleichung ist ein bekanntes Resultat im Bereich der Wahrscheinlichkeitstheorie.Jedoch hat die auch wichtige Anwendungen in Versicherungsmathematik .

Jensen's Ungleichung besagt ,dass wenn u eine konkave Funktion ist,dann gilt

$$E(u(x)) \leqslant u(E(x)) \qquad (2.3)$$

falls diese Werte existieren.

Anwendung der Jensen's Ungleichung im Versicherungsbereich

Die Position des Individuums

Ein Individuum mit Vermögenswert W. Falls das Individuum einen kompletten Versicherungsschutz gegen einen zufälligen Verlust X bekommen möchte, dann ist die maximale Prämie P, die er bereit ist, für den Schutz zu zahlen

$$u(W-P)=E[u(W-X)] \quad (2.5)$$

Das folgt aus dem erwarteten Nutzen Kriterrium und u'(x)>0,so dass für eine Prämie $P^* < P$,

$$u\left(W-P^*\right) > u(W-P)$$

Wegen Jensen's Ungleichung ist

$$E[u(W-X)] \leq u[E(W-X)] = u(W - E[X])$$

Daraus folgt

$$u(W-P) \leq u(W - E[X])$$

Weil u eine wachsende Funktion ist,folgt

$$P \geq E[X]$$

Die Position des Versicherers

Ein Versicherer mit Nutzenfunktion v und Vermögenswert W.
Der Versicherer wird gebeten ,einen kompletten Versicherungsschutz gegen einen zufälligen Verlust X anzubieten.Die minimale akzeptierte Prämie für den Schutz ist Π,wo

$$v(W) = E\left[v\left(W+\Pi-X\right)\right] \quad (2.6)$$

Weil v eine wachsende Funktion ist,gilt für eine Prämie $\Pi^* > \Pi$,

$$E\left[v\left(W+\Pi^* - X\right)\right] > E\left[v\left(W+\Pi-X\right)\right]$$

Mit Hilfe der Jensen's Ungleichung ,folgt

$$v(W) = E\left[v\left(W+\Pi-X\right)\right] \leq v\left(W+\Pi - E(X)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \Pi \geqslant E[X]$$

Der Versicher fordert eine Prämie,die mindestens gleich dem erwarteten Verlust ist.Und ein Versicherungsvertrag ist durchführbar,wenn $P \geqslant \Pi$.

2.5 Typen von Nutzenfunktionen

Es ist möglich ,eine Nutzenfunktion zu konstruieren,die verschiedene Werte verschiedenen Vermögensstufen zuordnet.Ein Individuum könnte zum Beispiel für u die Werte u(0)=0,u(10)=5,u(20)=8...wählen.Natürlich ist es wesentlich praktischer ,dieWerte mit Hilfe einer passenden mathematischen Funktion zuzuordnen.Deshalb betrachten wir nun einige mathematische Funktionen,die als passende Form für die Nutzenfunktion gelten können.

2.5.1Exponentiale Nutzenfunktion

Eine Nutzen Funktion in der Form , $u(x) = -\exp\{-\beta x\}$ wo $\beta > 0$ heisst eine exponentiale Nutzenfunktion. Eine wichtige Eigenschaft dieser Nutzen Funktion ist ,dass die Entscheidungen nicht von dem einzelnen Vermögenswert abhängen.

Nehmen wir an ,dass die i-te Handlung wird in zufälligem Wert von W+ X_i resultieren.Dann unter dem erwarteten Nutzen Kriterium würde ein Individuum $E\left[u\left(W + X_i\right)\right]$ kalkulieren und Handlung j genau dann wählen,wenn

$$E\left[u\left(W + X_j\right)\right] > E\left[u\left(W + X_i\right)\right] \quad (2.7)$$

Für i=1,2,.....,n. Und i ≠j

Setzen wir $u(x) = -\exp\{-\beta x\}$ in (2.7) ein,wird diese Bedigung

$$-E\left[\exp\left\{-\beta\left(W + X_j\right)\right\}\right] > -E\left[\exp\left\{-\beta\left(W + X_i\right)\right\}\right]$$

oder

$$E\left[\exp\left\{-\beta X_j\right\}\right] < E\left[\exp\left\{-\beta X_i\right\}\right]$$

Daraus folgt,das Vermögen W von Individuum beeinflusst die Entscheidung nicht.

Die maximale Prämie ,P ,die ein Individuum mit Nutzenfunktion u(x)=-exp{-βx} für Versicherung gegen einen zufälligen Verlust X zahlt,ist dann

$$P = \beta^{-1} \log M_x(\beta) \tag{2.8}$$

2.5.2 Quadratische Nutzenfunktion

Eine Nutzenfunktion in der Form $u(x) = x - \beta x^2$, für $x < \frac{1}{2\beta}$, und $\beta > 0$,heisst eine quadratische Nutzenfunktion.

2.5.3 Logarithmische Nutzenfunktion

Eine Nutzenfunktion in der Form $u(x) = \beta log x$, für $x > 0$, und $\beta > 0$, heisst eine logarithmische Nutzenfunktion.

Das Individuum ,das eine logarithnische Nutzenfunktion verwendet,ist Risiko averse(scheu),weil

$$u'(x) = \frac{\beta}{x} > 0 \;\; und \; u''(x) = \frac{-\beta}{x^2} < 0$$

und der Koeffizient von Risiko Aversion ist $\gamma(x) = \frac{1}{x}$, so dass Risiko Aversion eine fallende Funktion ist.

2.5.4 Fractional Power-Nutzenfunktion

Eine Nutzenfunktion in der Form $u(x) = x^{\beta}$, für $x > 0$ und $0 < \beta < 1$,heisst eine fractional power- Nutzenfunktion.