Probeklausur zur Vorlesung Einführung in die Stochastik

Diese Probeklausur hat nicht den Schwierigkeitsgrad einer "richtigen" Klausur. Die Aufgaben sind an den heutigen Wissenstand angepasst. Als Vorbereitung auf die Klausur wird empfohlen die alten Klausuren durchzurechnen.

Die Probeklausur bietet vielmehr die Möglichkeit die Aufgaben selbständig (Abschreiben macht hier keinen Sinn) zu lösen und die Unklarheiten und Verständnisprobleme, ggf. mit Hilfe der Übungsleiter, zu beseitigen.

Aufgabe 1.

Es seien X_1, X_2, X_3 unabhängige $N(0,1)$-verteilte Zufallsvariablen auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Man berechne die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[\max\{X_1, X_2\} \leq X_3]$.

Aufgabe 2.

Es sei X binomialverteilt mit $\mathbb{E}[X] = 5$, $V(X) = 4,75$. Man berechne $K := 20^{100} \cdot \mathbb{P}[X \geq 99] + 2$. Dies ist das Geburtsjahr des Mathematikers Kolmogorov.

Aufgabe 3.

Es seien $X_1, ..., X_n$, $n \geq 2$ reelle, unahängige, identisch verteilte Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Die Verteilung der X_i ($\mathbb{P}_{X_i}$) werde mit μ und die Verteilungsfunktion mit F bezeichnet.
Man zeige: $\mathbb{P}[\max\{X_1, ..., X_{n-1}\} \leq X_n] = \int F^{n-1}\, \mathrm{d}\mu$.

Aufgabe 4.

Eine faire Münze wird N-mal geworfen. Sei G der Gewinn bei folgendem Spiel: Wir setzen den Betrag c auf "Kopf". Wenn "Kopf" fällt, bekommen wir $2c$ zurück, andernfalls verdoppeln wir den Einsatz, bis erstmals "Kopf" kommt. Spätestens nach dem N-ten Wurf bricht das Spiel ab. Bestimmen Sie die Verteilung und den Erwartungswert von G.

Aufgabe 5.

Es sei X eine $N(0,1)$-verteilte Zufallsvariable. Man berechne die Kovarianz und den Korrelationskoeffizienten von $Y := X^2$ und $Z := X(X-1)$.

Aufgabe 6.

Zwei Personen vereinbaren, sich an einem Friedhof etwa um Mitternacht zu treffen. Es wird vereinbart, dass jede der Personen höchstens 1/4 Stunde ab dem Eintreffen auf die andere wartet und dann geht. Man bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass ein Treffen zustande kommt unter den folgenden Voraussetzungen: Werden mit X, Y die Ankunftszeiten der beiden Personen (gemessen in Stunden vor oder nach 0 Uhr) bezeichnet, so seien X, Y unabhängig, und es sei X $N(0, \frac{1}{12})$-verteilt und Y $N(0, \frac{1}{6})$-verteilt.

Aufgabe 7.

Es seien X, Y unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen. Ist dann $X + Y$ identisch verteilt wie $2 \cdot X$?