Prämienberechnungsprinzipien

Ilja Mindlin

5. Mai 2009

3.1 Einleitung

Eine Prämie ist eine Zahlung, die ein Versicherungsnehmer tätigt, um Vollversicherungs- oder Teilversicherungsschutz gegen ein Risiko zu erhalten. Die Betrachtung der Prämienkalkulation findet hier nur aus mathematischer Sichtweise statt. In der Praxis müssen Versicherungsunternehmen abgesehen von Risikocharakteristiken auch andere Faktoren, wie z.B. die Prämien, die die Konkurrenz in Rechnung stellt, in Betracht ziehen.
Sei Π_X die Prämie, die ein Versicherer berechnet, um ein Risiko X zu versichern. Das Risiko X bezeichnet die Ansprüche der Versicherungsnehmer, die nach der Zufallsvariable X verteilt sind. Die Prämie Π_X ist eine von X abhängige Funktion und eine Vorschrift, die Π_X einen Zahlenwert zuordnet, heißt Prämienberechnungsprinzip.
Ein Prämienprinzip hat die Form $\Pi_X = \phi(X)$, wobei $\phi(X)$ irgendeine Funktion ist.

3.2 Eigenschaften von Prämienprinzipien

Wünschenswerte Eigenschaften:

(1) erwartungswertübersteigend: $\Pi_X \geq E[X]$
Die Prämie sollte nicht kleiner als die erwarteten Schadenersatzzahlungen sein.

(2) additiv: Falls X_1 und X_2 unabhängige Risiken, dann gilt $\Pi_{X_1+X_2} = \Pi_{X_1} + \Pi_{X_2}$
Durch das Kombinieren oder Trennen von Risiken ergibt sich weder für das Individuum, noch für den Versicherer ein Vorteil.

(3) (positiv) homogen: Falls Z = aX mit a > 0, dann gilt $\Pi_Z = a\Pi_X$

(4) translationsinvariant: Falls Y = X + c mit c > 0, dann gilt $\Pi_Y = \Pi_X + c$
Falls die Verteilung von Y der um c verschobenen Verteilung von X entspricht, dann muss die Prämie für das Risiko Y der um c erhöhten Prämie für das Risiko X entsprechen.

(5) maximalschadenbegrenzt: Falls eine begrenzte, maximale Schadenersatzforderung x_m existiert, dann gilt $\Pi_X \leq x_m$
Falls diese Bedingung nicht erfüllt ist, besteht für das Individuum kein Anreiz eine Versicherung abzuschließen

3.3 Beispiele für Prämienprinzipien

3.3.1 Nettorisikoprinzip

$$\Pi_X = E[X]$$

Die Nettorisikoprämie entspricht den unter Risiko erwarteten Schadenersatzforderungen an den Versicherer. Die Prämie deckt lediglich die erwarteten Schadenersatzforderungen, enthält allerdings keinen Gewinn- oder Sicherheitszuschlag.

(1) erwartungswertübersteigend: $\Pi_X = E[X]$

(2) additiv: $\Pi_{X_1+X_2} = E[X_1 + X_2] = E[X_1] + E[X_2] = \Pi_{X_1} + \Pi_{X_2}$

(3) (positiv) homogen: $\Pi_Z = E[Z] = E[aX] = aE[X] = a\Pi_X$

(4) translationsinvariant: $\Pi_Y = E[Y] = E[X + c] = E[X] + c = \Pi_X + c$

(5) maximalschadenbegrenzt: $X \leq x_m \Rightarrow E[X] \leq E[x_m] = x_m$
$\Rightarrow \Pi_X \leq x_m$

3.3.2 Schadenerwartungsprinzip

$$\Pi_X = (1 + \theta)\, E[X] \quad \text{mit } \theta > 0$$

θ ist der Prämienzuschlagfaktor und $\theta E[X]$ ist der Prämienzuschlag.
Das Erwartungswertprinzip ordnet allen Risiken mit demselben Erwartungswert dieselbe Prämie zu.

(1) erwartungswertübersteigend: $\Pi_X = (1 + \theta)\, E[X] = E[X] + \theta E[X] \geq E[X]$
mit $E[X] \geq 0$

(2) additiv: $\Pi_{X_1+X_2} = (1 + \theta)\, E[X_1 + X_2] = (1 + \theta)E[X_1] + (1 + \theta)E[X_2]$
$= \Pi_{X_1} + \Pi_{X_2}$

(3) (positiv) homogen: $\Pi_Z = (1 + \theta)\, E[Z] = (1 + \theta)\, E[aX] = a(1 + \theta)\, E[X] = a\Pi_X$

(4) nicht translationsinvariant: $\Pi_Y = (1 + \theta)\, E[Y] = (1 + \theta)\, E[X + c]$
$= (1 + \theta)\, E[X] + (1 + \theta)\, c > \Pi_X + c$

(5) nicht maximalschadenbegrenzt: Gegenbeispiel zur Maximalschadenbegrenztheit
Sei $P(X = b) = 1$ mit $b > 0$, $\theta > 0$ und $b = x_m$
$\Pi_X = (1 + \theta)\, E[X] = (1 + \theta)\, b > b = x_m$
$\Rightarrow \Pi_X > x_m$

3.3.3 Varianzprinzip

$$\Pi_X = E[X] + \alpha V[X] \text{ mit } \alpha > 0$$

Der Prämienzuschlag ist proportional zu V[X].

(1) erwartungswertübersteigend: $\Pi_X = E[X] + \alpha V[X] \geq E[X]$, da $\alpha > 0$ und $V[X] \in [0,\infty]$

(2) additiv: $\Pi_{X_1+X_2} = E[X_1 + X_2] + \alpha V[X_1 + X_2]$
$= E[X_1] + E[X_2] + \alpha V[X_1] + \alpha V[X_2]$
$= \Pi_{X_1} + \Pi_{X_2}$

(3) nicht (positiv) homogen: $\Pi_Z = E[Z] + \alpha V[Z] = E[aX] + \alpha V[aX]$
$= aE[X] + \alpha a^2 V[X] = a\,(E[X] + \alpha\, aV[X]) \neq a\,\Pi_X$

(4) translationsinvariant: $\Pi_Y = E[Y] + \alpha V[Y] = E[X + c] + \alpha V[X + c]$
$= E[X] + c + \alpha V[X] = E[X] + \alpha V[X] + c = \Pi_X + c$

(5) nicht maximalschadenbegrenzt: Gegenbeispiel zur Maximalschadenbegrenztheit
Sei $P(X = 8) = P(X = 12) = 0{,}5$ und $12 = x_m$
$E[X] = 0{,}5 \cdot 8 + 0{,}5 \cdot 12 = 10$
$V[X] = (8 - 10)^2 \cdot 0{,}5 + (12 - 10)^2 \cdot 0{,}5 = 4$
$\Pi_X = 10 + 4\alpha$
Für $\alpha > 0{,}5$ ist $\Pi_X > 12 = x_m$

3.3.4 Standardabweichungsprinzip

$$\Pi_X = E[X] + \alpha V[X]^{1/2} \text{ mit } \alpha > 0$$

Der Prämienzuschlag ist proportional zur Standardabweichung von X.

(1) erwartungswertübersteigend: $\Pi_X = E[X] + \alpha V[X]^{1/2} \geq E[X]$, da $V[X]^{1/2} \in [0,\infty]$

(2) nicht additiv: $\Pi_{X_1+X_2} = E[X_1 + X_2] + \alpha V[X_1 + X_2]^{1/2}$

$= E[X_1] + E[X_2] + \alpha(V[X_1] + V[X_2])^{1/2}$

$\neq \Pi_{X_1} + \Pi_{X_2}$

$= E[X_1] + E[X_2] + \alpha V[X_1]^{1/2} + \alpha V[X_2]^{1/2}$

(3) (positiv) homogen: $\Pi_Z = E[Z] + \alpha V[Z]^{1/2} = E[aX] + \alpha V[aX]^{1/2}$

$= aE[X] + \alpha(a^2 V[X])^{1/2} = aE[X] + \alpha a V[X]^{1/2}$

$= a(E[X] + \alpha V[X]^{1/2}) = a\Pi_X$

(4) translationsinvariant: $\Pi_Y = E[Y] + \alpha V[Y]^{1/2} = E[X + c] + \alpha V[X + c]^{1/2}$

$= E[X] + c + \alpha V[X]^{1/2} = E[X] + \alpha V[X]^{1/2} + c$

$= \Pi_X + c$

(5) nicht maximalschadenbegrenzt: Gegenbeispiel zur Maximalschadenbegrenztheit

Sei $P(X = 8) = P(X = 12) = 0,5$ und $12 = x_m$

$E[X] = 0,5 \cdot 8 + 0,5 \cdot 12 = 10$

$V[X]^{1/2} = [(8 - 10)^2 \cdot 0,5 + (12 - 10)^2 \cdot 0,5)]^{1/2} = 2$

$\Pi_X = 10 + 2\alpha$

Für $\alpha > 1$ ist $\Pi_X > 12 = x_m$

3.3.5 Nullnutzenprinzip

$$u(W) = E[u(W + \Pi_X - X)]$$

Der Versicherer hat die Nutzenfunktion u(x) mit $u'(x) > 0$ und $u''(x) < 0$. Damit ist u monoton steigend, streng konkav und es liegt Risikoaversion vor.
W bezeichnet das Vermögen des Versicherungsunternehmens und Π_X ist die vermögensabhängige Nullnutzenprämie.

Spezialfall: **Exponentialprinzip**
Wenn die Nutzenfunktion exponentiell ist mit $u(x) = -e^{-\beta x}$ und $\beta > 0$, dann folgt:

$$\Pi_X = \beta^{-1} \log E[e^{\beta X}]$$

Bew.: $u(W) = E[u(W + \Pi_X - X)]$

$\Rightarrow$ $-e^{-\beta W} = E[-e^{-\beta W - \beta\Pi_X + \beta X}]$

$$\Leftrightarrow \quad -e^{-\beta W} = E[-e^{-\beta W} \cdot -e^{-\beta \Pi_x} \cdot -e^{\beta X}] = -e^{-\beta W} \cdot -e^{-\beta \Pi_x} \cdot -E[e^{\beta X}]$$
$$\Rightarrow \quad e^{\beta \Pi_x} = E[e^{\beta X}]$$
$$\Rightarrow \quad \beta \Pi_X = \log E[e^{\beta X}]$$
$$\Rightarrow \quad \Pi_X = \beta^{-1} \log E[e^{\beta X}]$$

Das Exponentialprinzip ist besonders vorteilhaft, da es auf der momenterzeugenden Funktion von X basiert ($M_x(\beta) = E[e^{\beta X}]$) und dadurch mehr Informationen über X enthält, als alle bisherigen Prinzipien. Ein für die Praxis entscheidender Vorteil ist, dass sich das Exponentialprinzip im Gegensatz zum Nullnutzenprinzip explizit bestimmen lässt. Das Exponentialprinzip hat zusätzlich die praktische Eigenschaft der Vermögensunabhängigkeit. Dieses bedeutet also, dass Veränderungen des Kapitals nicht unmittelbar zu einer Veränderung der Prämie führen.

(1) erwartungswertübersteigend:

$$u(W) = E[u(W + \Pi_X - X)] \overset{\text{(mit Jensens Ungleichung)}}{\leq} u(E[W + \Pi_X - X]) = u(W + \Pi_X - E[X])$$
$$\Rightarrow 0 \leq \Pi_X - E[X]$$
$$\Rightarrow \Pi_X \geq E[X]$$

(2) nicht additiv:

Gegenbeispiel zur Additivität

$u(W) = E[u(W + \Pi_X - X)]$

Sei X_1: $P(X_1 = 80) = 0,5$ und $P(X_1 = 120) = 0,5$

X_2: $P(X_2 = 90) = 0,6$ und $P(X_2 = 120) = 0,4$

$W = 300$, $u(x) = x - 0,001x^2$ für $x < 500$

$$\Rightarrow \quad u(300) = E[u(300 + \Pi_X - X)]$$
$$\Rightarrow \quad 300 - 90 = E[300 + \Pi_X - X - 0,001\,(300 + \Pi_X - X)^2]$$
$$\Rightarrow \quad \Pi_X^{\,2} - (400 + 2E[X])\,\Pi_X + E[X^2] + 400E[X] = 0$$

$E[X_1] = 0,5 \cdot 80 + 0,5 \cdot 120 = 100$

$E[X_1^2] = 0,5 \cdot 80^2 + 0,5 \cdot 120^2 = 10400$

$$\Rightarrow \quad \Pi_{X_1}^{\,2} - (400 + 2 \cdot 100)\,\Pi_{X_1} + 10400 + 400 \cdot 100 = 0$$
$$\Rightarrow \quad \Pi_{X_1} = 101,0025$$

$E[X_2] = 0,6 \cdot 90 + 0,4 \cdot 120 = 102$

$E[X_2^2] = 0,6 \cdot 90^2 + 0,4 \cdot 120^2 = 10620$

$$\Rightarrow \quad \Pi_{X_2}^{\,2} - (400 + 2 \cdot 102)\,\Pi_{X_2} + 1620 + 400 \cdot 102 = 0$$

$\Rightarrow \quad \Pi_{X_2} = 102{,}5407$

$E[X_1 + X_2] = 100 + 102 = 202$

$E[(X_1 + X_2)^2] = E[X_1^2] + 2E[X_1]\, E[X_2] + E[X_2^2]$

$\qquad = 10400 + 2 \cdot 100 \cdot 102 + 10620 = 41420$

$\Rightarrow \quad \Pi_{X_1+X_2}{}^2 - (400 + 2 \cdot 202)\ \Pi_{X_1+X_2} + 41420 + 400 \cdot 202 = 0$

$\Rightarrow \quad \Pi_{X_1+X_2} = 203{,}5460$

$\Rightarrow \quad \Pi_{X_1} + \Pi_{X_2} = 101{,}0025 + 102{,}5407 = 203{,}5432 \neq \Pi_{X_1+X_2}$

Das Nullnutzenprinzip ist generell nicht additiv, doch das Exponentialprinzip dagegen schon:

$$\begin{aligned}
\Pi_{X_1+X_2} &= \beta^{-1} \log E[e^{\beta(x_1 + x_2)}] \\
&= \beta^{-1} \log E[e^{\beta x_1} \cdot e^{\beta x_2}] \\
&= \beta^{-1} \log (E[e^{\beta x_1}]\, E[e^{\beta x_2}]) \\
&= \beta^{-1} \log E[e^{\beta x_1}] + \beta^{-1} \log E[e^{\beta x_2}] = \Pi_{X_1} + \Pi_{X_2}
\end{aligned}$$

(3) nicht (positiv) homogen:

Gegenbeispiel zur (positiven) Homogenität

Sei $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $u(x) = -e^{-\beta x}$

$\Rightarrow \quad \Pi_X = \beta^{-1} \log E[e^{\beta X}] = \beta^{-1} \log M_x(\beta)$

Mit $M_x(\beta) = e^{\mu\beta + \frac{1}{2}\sigma^2 \beta^2}$ momenterzeugende Funktion

$\Rightarrow \quad \beta^{-1} \log e^{\mu\beta + \frac{1}{2}\sigma^2 \beta^2} = \beta^{-1} (\mu\beta + \frac{1}{2}\sigma^2 \beta^2) = \mu + \frac{1}{2}\sigma^2 \beta$

$E[Z] = E[aX] = aE[X] = a\mu$

$V[Z] = V[aX] = a^2 V[X] = a^2\sigma^2$

$\Rightarrow \quad \Pi_Z = a\mu + \frac{1}{2} a^2\sigma^2 \beta \neq a\Pi_X = a\mu + \frac{1}{2} a\sigma^2 \beta$

(4) translationsinvariant:

$u(W) = E[u(W + \Pi_Y - Y)]$

$E[u(W + \Pi_Y - Y)] = E[u(W + \Pi_Y - c - X)]$

$\Rightarrow \quad \Pi_Y - c = \Pi_X$

$\Rightarrow \quad \Pi_Y = \Pi_X + c$

(5) maximalschadenbegrenzt:

$W + \Pi_X - X \geq W + \Pi_X - x_m$, da $x \leq x_m$

$u(W) = E[u(W + \Pi_X - X)] \geq E[u(W + \Pi_X - x_m)]$

$\qquad = u(W + \Pi_X - x_m)]$

$\Rightarrow \quad u(W) \geq u(W + \Pi_X - x_m)$

$$\Rightarrow \quad \Pi_X - x_m \leq 0$$
$$\Rightarrow \quad \Pi_X \leq x_m$$

3.3.6 Esscher-Prinzip

$$\Pi_X = \frac{E[Xe^{hX}]}{E[e^{hX}]} \text{ mit h > 0}$$

Die Esscher-Prämie kann als Nettoprämie für das Risiko $\tilde{X}$ betrachtet werden, das folgendermaßen mit X verwandt ist:

Sei X eine stetige Zufallsvariable im Intervall $(0,\infty)$, mit der Dichtefunktion f.
Dann ist g die Dichtefunktion der Zufallsvariable $\tilde{X}$.

$$g(x) = \frac{e^{hx} f(x)}{\int_0^\infty e^{hx} f(x)dx}$$

Die Verteilungsfunktion von $\tilde{X}$ ist G, bekannt als Esscher-Transformation von F mit Parameter h.

$$G(x) = \frac{\int_0^x e^{hy} f(y)dy}{M_x(h)} \quad \text{mit } M_x(h) = E[e^{hx}] = \int_0^\infty e^{hx} f(x)dx$$

$$M_{\tilde{X}}(t) = E[e^{tx}] = \int_0^\infty e^{tx} g(x)dx = \frac{\int_0^\infty e^{tx}e^{hx} f(x)dx}{\int_0^\infty e^{hx} f(x)dx} = \frac{\int_0^\infty e^{(t+h)x} f(x)dx}{\int_0^\infty e^{hx} f(x)dx} = \frac{M_X(t+h)}{M_X(h)}$$

Die Dichte g ist die gewichtete Version der Dichte f.

$$g(x) = \frac{e^{hx} f(x)}{\int_0^\infty e^{hx} f(x)dx} = \frac{e^{hx} f(x)}{M_X(h)} = w(x)\, f(x) \quad \text{mit } w(x) = \frac{e^{hx}}{M_X(h)}$$

Da h > 0, $w'(x) = \dfrac{e^{hx} h M_X(h) - e^{hx} M_X'(h)}{M_X(h)^2}$ > 0 erhöht sich mit steigendem x die Gewichtung w.

Für die Prämienkalkulation ergibt sich damit:

$$E[\tilde{X}] = \frac{\partial}{\partial t} M_{\tilde{X}}(t) \Big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{M_X(t+h)}{M_X(h)} \Big|_{t=0} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial t} M_X(t+h) \Big|_{t=0} = \int_0^\infty X e^{(t+h)X} f(x)dx \Big|_{t=0}$$

$$= \int_0^\infty X e^{hX} f(x)dx$$

$$\Rightarrow \qquad E[\tilde{X}] = \frac{\int_0^\infty X e^{hX} f(x)dx}{\int_0^\infty e^{hX} f(x)dx} = \frac{E[Xe^{hX}]}{E[e^{hX}]} = \Pi_X$$

Π_X ist der Erwartungswert von $\tilde{X}$ und stellt die Esscher-Prämie dar.

(1) erwartungswertübersteigend: h = 0: $M_{\tilde{X}}(t) = \frac{M_X(t)}{M_X(0)} = \frac{\int_0^\infty e^{tx} f(x)dx}{\int_0^\infty f(x)dx} = \int_0^\infty e^{tx} f(x)dx$

$$= M_x(t)$$

$$\Rightarrow \quad E[\tilde{X}] = E[X]$$

$$\Rightarrow \quad \Pi_X = E[\tilde{X}] = E[X]$$

$$h \geq 0: \; E[\tilde{X}^r] = \frac{\partial^r}{\partial t^r} M_{\tilde{X}}(t) \Big|_{t=0} = \frac{\partial^r}{\partial t^r} \frac{M_X(t+h)}{M_X(h)} \Big|_{t=0}$$

$$= \frac{M_X^{(r)}(h)}{M_X(h)}$$

$$\frac{\partial}{\partial h} \Pi_X = \frac{\partial}{\partial h} E[\tilde{X}] = \frac{\partial}{\partial h} \frac{M_X'(h)}{M_X(h)}$$

(Quotientenregel) $$= \frac{M_X^{(2)}(h) M_X(h) - M_X'(h) M_X'(h)}{M_X(h)^2}$$

$$= \frac{M_X^{(2)}(h)}{M_X(h)} - \left(\frac{M_X'(h)}{M_X(h)}\right)^2$$

$$= E[\tilde{X}^2] - E[\tilde{X}]^2 = V[\tilde{X}] \geq 0$$

Da $\frac{\partial}{\partial h} \Pi_X$ nicht fallend ist gilt für alle h ≥ 0: $\Pi_X \geq E[X]$

(2) additiv:

$$\Pi_{X_1+X_2} = \frac{E[(X_1+X_2)e^{h(X_1+X_2)}]}{E[e^{h(X_1+X_2)}]} = \frac{E[X_1 e^{hX_1} e^{hX_2} + X_2 e^{hX_1} e^{hX_2}]}{E[e^{h(X_1+X_2)}]}$$

$$= \frac{E[X_1 e^{hX_1}]E[e^{hX_2}] + E[X_2 e^{hX_2}]E[e^{hX_1}]}{E[e^{hX_1}]E[e^{hX_2}]}$$

$$= \frac{E[X_1 e^{hX_1}]}{E[e^{hX_1}]} + \frac{E[X_2 e^{hX_2}]}{E[e^{hX_2}]} = \Pi_{X_1} + \Pi_{X_2}$$

(3) nicht (positiv) homogen:

Sei Π_X (h) die Esscher-Prämie mit dem Parameter h für das Risiko X. Π_Z (h) ist die Esscher-Prämie für Risiko Z.

$$\Pi_Z \text{(h)} = \frac{E[Ze^{hZ}]}{E[e^{hZ}]} = \frac{E[aXe^{haX}]}{E[e^{haX}]} = \frac{aE[Xe^{haX}]}{E[e^{haX}]}$$

$$= \text{a}\,\Pi_X \text{(ah)} \neq \text{a}\,\Pi_X \text{(h)}$$

Für a $\neq$ 1 gilt Π_Z (h) $\neq$ a Π_X (h)

(4) translationsinvariant:

$$\Pi_Y = \frac{E[Ye^{hY}]}{E[e^{hY}]} = \frac{E[(X+c)e^{h(X+c)}]}{E[e^{h(X+c)}]} = \frac{E[Xe^{hX}e^{hc} + ce^{hX}e^{hc}]}{E[e^{hX}e^{hc}]}$$

$$= \frac{E[Xe^{hX}]e^{hc} + cE[e^{hX}]e^{hc}}{E[e^{hX}]e^{hc}} = \frac{E[Xe^{hX}]}{E[e^{hX}]} + \text{c}$$

$$= \Pi_X + \text{c}$$

(5) maximalschadenbegrenzt:

Sei x_m die höchste mögliche Schadenersatzforderung.

P(X $\leq x_m$) = 1

$\Rightarrow \quad Xe^{hX} \leq x_m e^{hX}$

$$\Rightarrow \quad \Pi_X = \frac{E[Xe^{hX}]}{E[e^{hX}]} \leq \frac{E[x_m e^{hX}]}{E[e^{hX}]} = x_m \frac{E[e^{hX}]}{E[e^{hX}]} = x_m$$

3.3.7 Risikoangepasstes Prämienprinzip

$$\Pi_X = \int_0^\infty [P(X > x)]^{1/p}\,dx = \int_0^\infty [1 - F(x)]^{1/p}\,dx \quad \text{mit p} \geq 1 \text{ Risikoindex}$$

X ist eine nichtnegative Zufallsvariable mit der Verteilungsfunktion F.

Für p = 1 ergibt sich die Nettorisikoprämie: $\Pi_X = \int_0^\infty [1 - F(x)]\ dx = E[X]$

Die risikoangepasste Prämie basiert auf einer Transformation.
Sei H die Verteilungsfunktion einer nichtnegativen Zufallsvariable X^* mit:

$$1 - H(x) = [1 - F(x)]^{1/p}$$

Es gilt: $E[X^*] = \int_0^\infty [1 - H(x)]dx = \int_0^\infty [1 - F(x)]^{1/p} dx = \Pi_X$

f ist die Dichtefunktion der stetigen Zufallsvariable X und h ist die Dichtefunktion von X^*:

$$H(x) = 1 - [1 - F(x)]^{1/p}$$
$$h(x) = \frac{1}{p} [1 - F(x)]^{(1/p)-1} f(x)$$

Die Dichtefunktion von X^* stellt lediglich eine gewichtete Version der Dichtefunktion von X dar.
Mit steigendem x steigt auch das an f geknüpfte Gewicht w:

Für p = 1 ist h(x) = f(x) mit w(x) =1

Für p > 1 ist $h(x) = \frac{1}{p} [1 - F(x)]^{(1/p)-1} f(x)$ mit $w(x) = \frac{1}{p} [1 - F(x)]^{(1/p)-1}$

$$w'(x) = \frac{1}{p} (\frac{1}{p} - 1) [1 - F(x)]^{(1/p)-1-1} (-f(x))$$
$$= (\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}) [1 - F(x)]^{(1/p)-2} f(x) > 0 \qquad \text{mit } F(x) \neq 1$$

$\Rightarrow$ w(x) wächst für steigendes x monoton

(1) erwartungswertübersteigend: Für $p \geq 1$: $1 - F(x) \leq [1 - F(x)]^{1/p}$ für x > 0

$$E[X] = \int_0^\infty [1 - F(x)]dx \leq \int_0^\infty [1 - F(x)]^{1/p} dx = \Pi_X$$

(2) nicht additiv: Gegenbeispiel zur Additivität

Seien X_1 und X_2 Risiken, i.i.d., p = 2

$P(X_1 = 0) = 0{,}5$ und $P(X_1 = 1) = 0{,}5$

$P(X_2 = 0) = 0{,}5$ und $P(X_2 = 1) = 0{,}5$

$$\Rightarrow \qquad \Pi_{X_1} = \int_0^1 [1 - 0{,}5]^{1/2} dx = 0{,}5^{1/2} = \Pi_{X_2}$$

$$P(X_1 + X_2 > x) = \begin{cases} 0{,}5^2 & \textit{für } x < 1 \\ 3 \cdot 0{,}5^2 & \textit{für } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \Pi_{X_1+X_2} = \int_0^1 [0{,}5^2]^{1/2}\,dx + \int_1^2 [3 \cdot 0{,}5^2]^{1/2}\,dx$$

$$= 0{,}5\,(1 - 0) + 3^{1/2} \cdot 0{,}5\,(2 - 1) = 0{,}5\,(1 + 3^{1/2})$$

$$\Rightarrow \quad \Pi_{X_1} + \Pi_{X_2} = 2 \cdot 0{,}5^{1/2} > 0{,}5\,(1 + 3^{1/2}) = \Pi_{X_1+X_2}$$

$$\Rightarrow \quad \Pi_{X_1} + \Pi_{X_2} \neq \Pi_{X_1+X_2}$$

(3) (positiv) homogen:

$$\Pi_Z = \int_0^\infty [P(Z > x)]^{1/p}\,dx = \int_0^\infty [P(aX > x)]^{1/p}\,dx$$

$$= \int_0^\infty [P(X > \frac{x}{a})]^{1/p}\,dx$$

Substitution: $y = \frac{x}{a}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a}$

$\Rightarrow$ dx = a dy

$$\Pi_Z = a \int_0^\infty [P(X > y)]^{1/p}\,dy = a\,\Pi_X$$

(4) translationsinvariant:

$$P(Y > x) = \begin{cases} 1 & \textit{für } x < c \\ 1 - F(x - c) & \textit{für } x \geq c \quad (*) \end{cases} \qquad \text{mit } Y = X + c$$

$(*)$ $P(X + c > x) = P(X > x - c) = 1 - P(X \leq x - c)$

$= 1 - F(x - c)$

$$\Rightarrow \quad \Pi_Y = \int_0^\infty [P(Y > x)]^{1/p}\,dx = \int_0^\infty [P(X + c > x)]^{1/p}\,dx$$

$$= \int_0^c [1]^{1/p}\,dx + \int_c^\infty [1 - F(x - c)]^{1/p}\,dx$$

$$= \int_0^c [1]\,dx + \int_c^\infty [1 - F(x - c)]^{1/p}\,dx$$

Substitution: x - c = y, $\frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow$ dy = dx

$$\Pi_Y = c + \int_0^\infty [1 - F(y)]^{1/p}\,dy = c + \Pi_X$$

(5) maximalschadenbegrenzt: Sei F(x_m) = 1

$$\Pi_X = \int_0^{x_m} [1 - F(x)]^{1/p}\, dx \le \int_0^{x_m} [1]^{1/p}\, dx = \int_0^{x_m} 1 dx \; = \; x_m$$

$$\Rightarrow \; \Pi_X \; \le \; x_m$$

3.4 Fazit

Prinzip	**erwartungswert-überschreitend**	**additiv**	**positiv homogen**	**translations-invariant**	**maximalschaden-begrenzt**
Netto	✓	✓	✓	✓	✓
Erwartungswert	✓	✓	✓		
Varianz	✓	✓		✓	
Standardabweichung	✓		✓	✓	
Nullnutzen	✓			✓	✓
Esscher	✓	✓		✓	✓
Risikoangepasst	✓		✓	✓	✓

Die Analyse hat gezeigt, dass einige Prinzipien mehr wünschenswerte Eigenschaften erfüllen, als andere. Die Frage, welches Prämienprinzip der Versicherer nun benutzen sollte, lässt sich allerdings nicht beantworten.

Mathematische Überlegungen allein reichen nicht aus, um über eine Prämie zur Deckung des Risikos aus Sicht des Versicherers zu entscheiden, doch es wäre rational die relevanten Eigenschaften für das vorliegende Risiko zu identifizieren und ein Prämienprinzip zu wählen, das diese Eigenschaften erfüllt.

.