1. Wahrscheinlichkeitsverteilungen und Versicherungsanwendungen

1.1 Wichtige diskrete Verteilungen

a. <u>Poisson-Verteilung.</u>

Sei N eine zufällige Variable, ist ein Poisson-Verteilung mit Parameter λ definiert durch $P(N=x)=e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^x}{x!}$ für $x = 0,1,2,\ldots\ldots$

Bez.: $P(\lambda)$

Die momenterzeugende Funktion ist

$$M_N(t)=\sum_{x=0}^{\infty}\mathrm{e}^{tx}\cdot\mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^x}{x!}=\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{e}^t\cdot\lambda)^x}{x!}=\mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^t-1)}$$

$$M'_N(t)=\mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^t-1)}\cdot\lambda\cdot\mathrm{e}^t=\lambda\cdot\mathrm{e}^t\cdot M_N(t)$$

$$M''_N(t)=\lambda\cdot\mathrm{e}^t\cdot M_N(t)+\lambda\cdot\mathrm{e}^t\cdot M'_N(t)=\lambda\cdot\mathrm{e}^t\cdot M_N(t)+\left(\lambda\cdot\mathrm{e}^t\right)^2\cdot M_N(t)$$

$$\Rightarrow E(N)=M'_N(0)=\lambda$$

$$E\left(N^2\right)=M''_N(0)=\lambda+\lambda^2$$

$$\Rightarrow Var(N)=E\left(N^2\right)-E^2(N)=\lambda+\lambda^2-\lambda^2=\lambda$$

b. <u>Die Binomialverteilung.</u>

Sei N eine ZV, eine Binomialverteilung mit Parameter n und q ($n\in\mathbb{N}, 0<q<1$) ist definiert durch

$$P(N=x)=\binom{n}{x}q^x(1-q)^{n-x}\quad \text{für}\quad x=0,1,2,\ldots\ldots,n$$

Bez.: B(n, q)

Die momenterzeugende Funktion ist

$$M_N(t)=\sum_{x=0}^{\infty}\mathrm{e}^{tx}\cdot\binom{n}{x}q^x(1-q)^{n-x}$$

$$=\sum_{x=0}^{\infty}\binom{n}{x}\left(\mathrm{e}^t\cdot q\right)^x(1-q)^{n-x}$$

$$=\left(q\,\mathrm{e}^t+1-q\right)^n$$

$$M'_N(t)=n\cdot\left(q\,\mathrm{e}^t+1-q\right)^{n-1}\cdot q\,\mathrm{e}^t$$

$$M''_N(t)=n\cdot(n-1)\cdot\left(q\,\mathrm{e}^t+1-q\right)^{n-2}\cdot\left(q\,\mathrm{e}^t\right)^2+n\cdot\left(q\,\mathrm{e}^t+1-q\right)^{n-1}\cdot q\cdot\mathrm{e}^t$$

$$\Rightarrow E(N) = M'_N(0) = n\cdot(q+1-q)^{n-1}\cdot q = n\cdot q$$

$$E\left(N^2\right) = M''_N(0) = n\cdot(n-1)\cdot q^2 + n\cdot q$$

$$\Rightarrow Var(N) = E\left(N^2\right) - E^2(N) = n\cdot(n-1)\cdot q^2 + n\cdot q - (n\cdot q)^2 = n\cdot q\cdot(1-q)$$

c. Die negative Binomialverteilung

Sei N eine ZV, die negative Binomialverteilung mit Parameter $k > 0$ und $p(0 < p < 1)$ ist definiert durch

$$P(N=x) = \binom{k+x-1}{x} p^k q^x \qquad \text{für } x = 0,1,2,\ldots\ldots\ p+q=1$$

Bez.: $NB(k,p)$

Die momenterzeugende Funktion ist

$$M_N(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx}\cdot\binom{k+x-1}{x} p^k\cdot q^x$$

$$= \frac{p^k}{\left(1-q\,e^t\right)^k}\cdot\sum_{x=0}^{\infty}\binom{k+x-1}{x}\left(1-q\,e^t\right)^k\left(q\cdot e^t\right)^x \qquad (*)$$

$$= \frac{p^k}{\left(1-q\,e^t\right)^k}$$

(*) wegen $\sum_{x=0}^{\infty} P(N=x) = 1$

setze $0 < q = q\cdot e^t < 1$ ein

$$\Rightarrow \sum_{x=0}^{\infty}\binom{k+x-1}{x}\left(1-q\,e^t\right)^k\left(q\cdot e^t\right)^x = 1$$

hier $0 < q\cdot e^t < 1 \Rightarrow 0 < e^t < \dfrac{1}{q}$

$$\Rightarrow t < \log\left(\frac{1}{q}\right) = -\log(q)$$

$$M_N(t) = \left(\frac{p}{1-q\,e^t}\right)^k$$

$$M'_N(t) = k\cdot\left(\frac{p}{1-q\cdot e^t}\right)^{k-1}\cdot\frac{-p\cdot\left(-q\cdot e^t\right)}{\left(1-q\cdot e^t\right)^2} = k\cdot\frac{q\cdot e^t}{1-q\cdot e^t}\cdot M_N(t)$$

$$M''_N(t) = k\cdot \frac{q\,e^t\cdot\left(1-q\,e^t\right) + q\cdot e^t\cdot q\cdot e^t}{\left(1-q\,e^t\right)^2}\cdot M_N(t) + k\cdot \frac{q\cdot e^t}{1-q\,e^t}\cdot M'_N(t)$$

$$EN = M'_N(0) = k\cdot \frac{q}{1-q} = \frac{k\cdot q}{p}$$

$$EN^2 = M''_N(0) = k\cdot \frac{q\,(1-q) + q^2}{(1-q)^2} + \frac{k\cdot q}{1-q}\cdot\frac{k\cdot q}{p}$$

$$= k\cdot \frac{pq+q^2}{p^2} + \frac{k^2 q^2}{p^2}$$

$$Var\,N = EN^2 - E^2N = k\cdot \frac{pq+q^2}{p^2} + \frac{k^2 q^2}{p^2} - \frac{k^2 q^2}{p^2}$$

$$= k\cdot \frac{(p+q)q}{p^2} = k\cdot\frac{q}{p^2}$$

d. <u>Die geometrische Verteilung </u>(wichtige Verteilung in der Ruintheorie)

Die geometrische Verteilung ist ein spezieller Fall der negativen Binomialverteilung mit Parameter $k = 1$.
Die geometrische Verteilung mit Parameter p ist definiert durch:

$P(N = x) = p\cdot q^x$ für $x = 0,1,2,\ldots\ldots$

s.o. setze $k = 1$

$$EN = \frac{q}{p} \qquad Var\,N = \frac{q}{p^2}$$

$$M_N(t) = \frac{p}{1-q\,e^t} \qquad \text{für } t < -\log(q)$$

1.2. Wichtige stetige Verteilungen

a. <u>Gammaverteilung</u>

Sei X eine ZV, ist eine Gammaverteilung mit Parameter $\alpha > 0$ und $\lambda > 0$ definiert durch (die Dichtfunktion)

$$f(x) = \frac{\lambda^{\alpha}\cdot x^{\alpha-1}\cdot e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} \qquad \text{für } x > 0$$

Gammafunktion ist definiert durch $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\,dx$

Bez.: $\gamma(\alpha, \lambda)$

Das n-te Moment ist

$$E(X^n) = \int_0^{\infty} \frac{x^n \lambda^{\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}\,dx$$

$$= \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{n+\alpha-1} e^{-\lambda x} dx$$

$$= \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\lambda^{\alpha+n}} \qquad (*)$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)\cdot\lambda^n}$$

$$\frac{\int_0^{\infty} \lambda^{\alpha} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\lambda x}\,dx}{\Gamma(\alpha)} = 1$$

(*)

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \cdot e^{-\lambda x}\,dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^{\alpha}}$$

$$\Rightarrow E(X) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\cdot\lambda} = \frac{\alpha}{\lambda}$$

$$E(X^2) = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)\cdot\lambda^2} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}$$

$$\Rightarrow Var\,X = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

Die momenterzeugende Funktion

$$M_x(t) = \int_0^{\infty} e^{tx} \cdot \frac{\lambda^{\alpha} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}\,dx$$

$$= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-(\lambda-t)} dx \qquad (*)$$

$$= \frac{\lambda^2}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha)}{(\lambda - t)^\alpha} = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t} \right)^\alpha \qquad \lambda - t > 0 \Rightarrow t < \lambda$$

b. Die Exponentialverteilung

Die Exponentialverteilung ist ein spezieller Fall der Gammaverteilung mit Parameter
$\alpha = 1$.
Die Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda > 0$ ist definiert durch

$$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x} \qquad \text{für } x > 0$$

Die Verteilungsfunktion $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$

s.o. setze $\alpha = 1$ ein

$$E(X^n) = \frac{n!}{\lambda^n}$$

$$M_x(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \qquad E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$Var\,X = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

c. Die Paretoverteilung

Ist X ein ZV, ist eine Paretoverteilung mit Parameter $\alpha > 0$ und $\lambda > 0$ definiert durch

$$f(x) = \frac{\alpha \lambda^\alpha}{(\lambda + x)^{\alpha+1}} \qquad \text{für } x > 0$$

Bez.: Pa(α, λ)
Die Verteilungsfunktion

$$F(x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + x} \right)^\alpha \qquad x \geq 0$$

$$E(X^n) = \int_0^\infty x^n f(x)\, dx$$

$$E(X) = \int_0^{\infty} x \cdot f(x)\, \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\infty} (x + \lambda - \lambda) f(x)\ \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\alpha \lambda^{\alpha}}{(\lambda + x)^{\alpha}} \mathrm{d}x\ - \lambda$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\alpha \lambda^{\alpha}}{(\lambda + x)^{\alpha}} \mathrm{d}x\ - \lambda$$

$$= \frac{\alpha \lambda}{\alpha - 1} \int_0^{\infty} \frac{(\alpha - 1)\, \lambda^{\alpha - 1}}{(\lambda + x)^{\alpha}}\ \mathrm{d}x - \lambda \qquad (*)$$

$$= \frac{\alpha \lambda}{\alpha - 1} - \lambda$$

$$= \frac{\lambda}{\alpha - 1}$$

$$(*) \quad \int_0^{\infty} \frac{(\alpha - 1)\, \lambda^{\alpha - 1}}{(\lambda + x)^{\alpha}}\ \mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \frac{\alpha'\, \lambda^{\alpha'}}{(\lambda + x)^{\alpha' + 1}}\ \mathrm{d}x = \int_0^{\infty} f(x)\ \mathrm{d}x = 1$$

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} \left((x + \lambda)^2 - 2\lambda x - \lambda^2 \right) f(x)\, \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\infty} (x + \lambda)^2 f(x)\, \mathrm{d}x - 2\lambda EX - \lambda^2$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\alpha \cdot \lambda^{\alpha}}{(x + \lambda)^{\alpha - 1}} \mathrm{d}x - 2\lambda EX - \lambda^2$$

$$= \frac{\alpha \cdot \lambda^2}{\alpha - 2} \cdot \int_0^{\infty} \frac{(\alpha - 2) \cdot \lambda^{\alpha - 2}}{(x + \lambda)^{\alpha - 1}} \mathrm{d}x - 2\lambda EX - \lambda^2$$

$$= \frac{\alpha \cdot \lambda^2}{\alpha - 2} - 2\lambda \cdot \frac{\lambda}{\alpha - 1} - \lambda$$

$$= \frac{2\lambda^2}{(\alpha - 1)(\alpha - 2)}$$

$$Var\,X = \frac{2\lambda^2}{(\alpha - 1)(\alpha - 2)} - \left(\frac{\lambda}{\alpha - 1}\right)^2 = \frac{\alpha \cdot \lambda^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)}$$

d. Die Normalverteilung

Sei X eine ZV, eine Normalverteilung mit Parameter μ und σ^2 ist definiert durch

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \qquad \text{für } x \in (-\infty, \infty)$$

Bez.: $N(\mu, \sigma^2)$

Die Standardnormalverteilung hat $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}$$

Die Verteilungsfunktion von der Standardnormalverteilung ist

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx$$

Eine Beziehung ist, wenn $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ und $Z = (X - \mu)/\sigma$ dann $Z \sim N(0, 1)$

$E(X) = \mu, \quad Var(X) = \sigma^2$

e. <u>Die Lognormalverteilung</u>

Sei X eine ZV, eine Lognormalverteilung mit Parameter μ und σ ist definiert durch

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\log(x) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad \text{für } -\infty < \mu < \infty,\ x > 0$$

Bez.: LN(μ, σ)

Die Verteilungsfunktion ist

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\log(y) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dy$$

$$\int_{-\infty}^{\log(x)} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dz \qquad (\text{wie} \quad N(\mu,\ \sigma^2))$$

$$\Rightarrow F(x) = \Phi\left(\frac{\log(x) - \mu}{\sigma}\right)$$

Also X ~ LN(μ,σ) log x ~ N(μ, σ^2)

$$E(X^n) = E(e^{nY}) = M_Y(n) = \exp\left\{\mu n + \frac{1}{2}\sigma^2 n^2\right\}$$

$$E(X) = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$$

$$E(X^2) = e^{2\mu + 2\sigma^2}$$

$$Var\ X = EX^2 - E^2X = e^{2\mu + 2\sigma^2} - e^{2\mu + \sigma^2} = e^{2\mu + \sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$$

1.3. Gemischte Verteilung

Bsp.: X ist eine Exponentiellverteilung mit EX = 100, definieren wir eine ZV Y durch

$$Y = \begin{cases} 0 & X < 20 \\ X - 20 & 20 \le X < 300 \\ 280 & X \ge 300 \end{cases}$$

$$P(Y=0) = P\ (X \le 20) = 1 - e^{-0,01 \cdot 20} = 1 - e^{-0,2} = 0,1813$$

Ähnlich $P(Y=280) = P\ (X \ge 300) = 1 - P(X \le 300)$

$$= 1 - \left(1 - e^{-0,01 \cdot 300}\right)$$

$$= e^{-3} = 0,0498$$

Im Interval $Y \in (0, 280)$ ist die Verteilung von Y stetig.

$$\begin{aligned} P(30 < Y \le 100) &= P(50 < X \le 120) \\ &= P(X \le 120) - P(X \le 50) \\ &= \left(1 - e^{-0,01 \cdot 120}\right) - \left(1 - e^{-0,01 \cdot 50}\right) \\ &= e^{-0,5} - e^{-1,2} \\ &= 0,3053 \end{aligned}$$

An den Punkten 0 und 280 gibt es Sprünge. Die Verteilungsfunktion von Y ist differenzierbar im Intervall (0, 280), also hat Y eine Dichtfunktion h(y) im Intervall (0, 280).

Das Moment von Y ist

$$E\left(Y^r\right) = \int_0^{280} x^r \cdot h(x)\ dx + 280^r\ P(Y=280)$$

Normalerweise ist K(x) = P(Z ≤ x) eine gemischte Verteilung in [0, ∞), und m ist eine Funktion, denn

$$E(m(Z)) = \int_0^\infty m(x)\, \mathrm{d}K(x)$$

$$= \sum_{x_i} m(x_i) P(Z = x_i) + \int m(x) k(x)\, \mathrm{d}x$$

1.4. Anwendungen in Versicherung

Rückversicherung:
Sei X die Summe der Forderung (Deckung), also X > 0, und X hat die Verteilungsfunktion F(x) = 0 für x < 0

a. <u>Proportionale Rückversicherung</u>
Unter einem proportionalen Rückversicherungsvertrag, bezahlt die Versicherungsgesellschaft eine festgelegte Proportion a von der Deckung. Und die restliche Proportion 1- a wird von dem Rückversicherer bezahlt.
Definiere Y := aX und Z = (1- a)X → Y + Z = X

Die Verteilungsfunktion von Y ist

P(Y ≤ X) = P(aX ≤ x) = P(X ≤ x/a) = P(X/a)

Und die Dichtfunktion ist

$$f_y(x) = \frac{1}{a} f_x\left(\frac{x}{a}\right)$$

Bsp.1: X ~ γ(α, λ), die Verteilung von aX ist γ(α, λ/a)

Bew.: für x $f(x) = \dfrac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}$

→ Die Dichtfunktion von aX ist

$$f(y) = \frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{\lambda^\alpha \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\frac{\lambda x}{a}}}{a^\alpha \Gamma(\alpha)}$$

$$\Rightarrow aX \sim \gamma\left(\alpha, \frac{\lambda}{a}\right)$$

Bsp.2: $X \sim LN(\mu, \sigma)$, die Verteilung von aX ist LN(μ + log a, σ)

Bew.: für $X \sim LN(\mu, \sigma)$

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\left(\log(x) - \mu\right)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

→ die Dichtfunktion von aX ist

$$f(y) = \frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\left(\log(x) - \log(a) - \mu\right)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

→ aX ~ LN(log a + μ, σ)

b. Excess of Loss

Bei einem Excess of Loss Vertrag wird die Deckung der Schäden durch die Versicherungsgesellschaft mit dem Rückversicherer geteilt, wenn die Schadenhöhe den festgelegten Betrag übersteigt. Sonst bezahlt die Versicherungsgesellschaft den ganzen Schaden.

M ist das Selbstbehaltniveau, Y und Z sind die bezahlten Anteile der Versicherungsgesellschaft bzw. dem Rückversicherer.

Also Y = min(X, M)
Z = max(0, X-M)
Y + Z = X.

Die Position des Versicherers

F_Y ist die Verteilungsfunktion von Y

$$F_Y(x) = \begin{cases} \mathrm{F(x)} & x < M \\ 1 & x \geq M \end{cases}$$

Die Verteilung von Y ist gemischt mit ein Dichtfunktion f(x) für $0 < x < M$
Also $P(Y = M) = 1 - F(M)$

Y ist eine Funktion von X

$$E\left(Y^n\right) = \int_0^\infty (\min(x, M))^n f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^M x^n f(x)\,\mathrm{d}x + \int_M^\infty M^n f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^M x^n f(x)\,\mathrm{d}x + M^n(1 - F(M))$$

$$E(Y) = \int_0^M x f(x)\,\mathrm{d}x + M(1 - F(M))$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}M} E(Y) = 1 - F(M) > 0$$

→ EY ist eine wachsende Funktion.

Von 0 bis E(X) liegt im Intervall $M \in [0, \infty)$

Bsp.1:

$$F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}, x \geq 0, so\ EY = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda M}\right)$$

Bew.:

$$EY = \int_0^M x \cdot \lambda \cdot \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x + M \cdot \mathrm{e}^{-\lambda M}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda M}\right)$$

Bsp.2: $X \sim LN(\mu, \sigma),\ E(Y^n) = ?$

Bew.: $$E(Y^n) = \int_0^M x^n \cdot \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ - \frac{(\log(x) - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\} dx + M^n(1 - F(M))$$

$$I = \int_0^M x^n \cdot \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ - \frac{(\log(x) - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\} dx$$

$$= \int_0^M \exp(ny) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ - \frac{(\log(x) - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\} dy$$

$$= \int_0^M \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left\{ ny - \frac{(\log(x) - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\} dy$$

$$= \exp\left\{ \mu n + \frac{1}{2}\sigma^2 n^2 \right\} \int_{-\infty}^{\log(M)} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left(y - \left(\mu + \sigma^2 n \right) \right)^2 \right\} dy \qquad (*)$$

(*) Quadratische Ergänzung

$$yn - \frac{(y - \mu)^2}{2\sigma^2} = \frac{-1}{2\sigma^2}\left((y - \mu)^2 - 2\sigma^2 yn \right)$$

$$= \frac{-1}{2\sigma^2}\left(y^2 - 2\mu y + \mu^2 - 2\sigma^2 yn \right)$$

$$= \frac{-1}{2\sigma^2}\left(y^2 - 2y(\mu + \sigma^2 n) + \mu^2 \right)$$

$$= \frac{-1}{2\sigma^2}\left(\left(y - (\mu + \sigma^2 n) \right)^2 - (\mu + \sigma^2 n)^2 + \mu^2 \right)$$

$$= \frac{-1}{2\sigma^2}\left(\left(y - (\mu + \sigma^2 n) \right)^2 - 2\mu\sigma^2 n + \sigma^4 n^2 \right)$$

$$= \mu n + \frac{1}{2}\sigma^2 n^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\left(y - \left(\mu + \sigma^2 n\right)\right)^2$$

$$I = \exp\left\{\mu n + \frac{1}{2}\sigma^2 n^2\right\} \Phi\left(\frac{\log(M) - \mu - \sigma^2 n}{\sigma}\right)$$

$$1 - F(M) = 1 - \Phi\left(\frac{\log(M) - \mu}{\sigma}\right)$$

$$\Rightarrow E\left(Y^n\right) = \exp\left\{\mu n + \frac{1}{2}\sigma^2 n^2\right\}\Phi\left(\frac{\log(M) - \mu - \sigma^2 n}{\sigma}\right) + M^n\left(1 - \Phi\left(\frac{\log(M) - \mu}{\sigma}\right)\right)$$

<u>Die Position des Rückversicherers</u>

$$Z = \begin{cases} 0 & x \leq M \\ x - M & x > M \end{cases}$$

Die Verteilungsfunktion $F_Z(x) = \begin{cases} \mathrm{F(M)} & x = 0 \\ F(X + M) & x > 0 \end{cases}$

$$E\left(Z^n\right) = \int_0^\infty (\max(0, x - M))^n f(x)\, \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^M 0 \cdot f(x)\mathrm{d}x + \int_M^\infty (x - M)^n f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_M^\infty (x - M)^n f(x)\mathrm{d}x$$

Bsp.: $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}, x \geq 0,\ E(Z) = \frac{1}{\lambda} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda M}$

Bew.: $E(Z) = \int_M^\infty (x - M) \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x}\,dx$

$$= \int_0^\infty y \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda(y+M)}\,dy$$

$$= e^{-\lambda M} E(X)$$

$$= \frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda M}$$

Bsp.: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, x > 0.$ $M_Z(t) = 1 - e^{-\lambda M} + \dfrac{\lambda e^{-\lambda M}}{\lambda - t}$

Bew.: $M_Z(t) = E\left(e^{tZ}\right)$

$$M_Z(t) = \int_0^\infty e^{t\max(0,\, x-M)} \lambda \cdot e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= \int_0^M e^0 \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx + \int_M^\infty e^{t(x-M)}\, \lambda \cdot e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= 1 - e^{-\lambda M} + \frac{\lambda \cdot e^{-\lambda M}}{\lambda - t}$$

Bsp.: X hat eine diskrete Verteilung

$$P(X) = \begin{cases} 0{,}6 & X = 100 \\ 0{,}3 & X = 175 \\ 0{,}1 & X = 200 \end{cases}$$

M = 150, wie ist die Verteilung von Z mit Z > 0

Annahme: nimmt Z 0 an

Lösung: $Z = \begin{cases} 0 & x \leq 150 \\ x - 150 & x > 150 \end{cases}$

$$P(Z) = \begin{cases} 0{,}6 & Z = 0 \\ 0{,}3 & Z = 25 \\ 0{,}1 & Z = 50 \end{cases}$$

Wegen $Z \neq 0$, nimmt Z nur die Werte 25 und 50

$P(Z = 25) = 3P(Z = 50)$

$\rightarrow$ $P(Z = 25) = 0{,}75$

$P(Z = 50) = 0{,}25$

Allgemeine: W ist Kein-Null Bezahlung von dem Rückversicherer.

$$P(W \leq x) = P(Z \leq x | Z > 0) = P(X \leq x + M | X > M)$$

$$= \frac{P(M < X \leq x + M)}{P(X > M)}$$

$$= \frac{F(x + M) - F(M)}{1 - F(M)}$$

Dichtfunktion

$$\frac{f(x + M)}{1 - F(M)} \quad (*)$$

Bsp.: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, x \geq 0.$

Wie ist die Dichtfunktion von W?

Mit der Formel (*) $f(W) = \dfrac{\lambda \cdot e^{-\lambda(x+M)}}{1 - \left(1 - e^{-\lambda M}\right)} = \lambda e^{-\lambda x}$

Bsp.: $X \sim Pa(\alpha, \lambda)$, wie ist die Verteilung von W

$$f(W) = \frac{\dfrac{\alpha \lambda^{\alpha}}{(\lambda + x + M)^{\alpha+1}}}{1 - \left(1 - \dfrac{\lambda}{\lambda + M}\right)^{\alpha}}$$

$$= \frac{\alpha \lambda^{\alpha}}{(\lambda + M + x)^{\alpha+1}} \cdot \left(\frac{\lambda + M}{\lambda}\right)^{\alpha}$$

$$= \frac{\alpha (\lambda + M)^{\alpha}}{(\lambda + M + x)^{\alpha+1}}$$

$$W \sim Pa(\alpha, \lambda + M)$$

c. Policy excess

Bei einer Excess of Loss Police mit Selbstbehaltniveau d, bezahlt der Versicherter den ganzen Betrag, der kleiner oder gleich d ist.
Und er bezahlt nur d, wenn der Betrag größer als d ist.

Also der Versicherter bezahlt min(X, d)
Der Rückversicherer bezahlt max(0, X - d)

1.5. Summe von Zufallsvariablenariablen.

Sei $X_i, i = 1, 2, \ldots\ldots, n$ i.i.d. ZVen, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

Wie ist die Verteilung von S_n ?

a. <u>Methode mit momenterzeugenden Funktionen</u>
M_S ist die momenterzeugende Funktion von S_n.
M_X ist die momenterzeugende Funktion von X_i

$$M_s(t) = E\left(e^{tS_n}\right) = E\left(e^{t(X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_n)}\right)$$

$$= E\left(e^{tX_1}\right) \cdot E\left(e^{tX_2}\right) \cdot \ldots \cdot E\left(e^{tX_n}\right)$$

$$= E\left(e^{tX_1}\right)^n = M_X(t)^n$$

Bsp.1: X_1 hat eine Poissonverteilung mit Parameter λ, $X_1 \sim P(\lambda)$
Wie ist S_n ?

$$M_X(t) = \exp\left\{\lambda\left(e^t - 1\right)\right\}$$

$$\Rightarrow M_S(t) = \exp\left\{n\lambda\left(e^t - 1\right)\right\}$$

Also $S_n \sim P(n\lambda)$

Bsp.2: X hat eine Exponentialverteilung mit $EX = \frac{1}{\lambda}$

Wie ist S_n ?

$$M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t} \qquad \text{für } t < \lambda$$

$$\Rightarrow M_S(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n$$

Also $S_n \sim a\gamma(n, \lambda)$

b. Faltung von Verteilungen (direct convolution of distributions)

Annahme $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ sind diskrete ZVen. nicht negative

Also S_n ist auch nicht negative

für $S_2 = X_1 + X_2 : X_2 = j \in (0, x)$

$$X_1 \leq x - j$$

$$\Rightarrow S_2 = X_1 + X_2 \leq x$$

X_1, X_2 sind unabhängig

$$P(S_2 \leq x) = \sum_{j=0}^{x} P(X_1 \leq x - j) \cdot P(X_2 = j)$$

Für $S_3 = S_2 + S_3$

$$P(S_3 \leq x) = \sum_{j=0}^{x} P(S_2 \leq x - j) \cdot P(X_3 = j)$$

Im Allgemein $P(S_n \leq x) = \sum_{j=0}^{x} P(S_{n-1} \leq x - j) \cdot P(X_n = j)$

Und $P(S_n \leq x) = \sum_{j=0}^{x} P(S_{n-1} = x - j) \cdot P(X_n = j)$

F ist Verteilungsfunktion von X_1 und $f_j = P(X_n = j)$

Definiere $F^{n*}(x) = P(S_n \leq x)$ n-fache Faltung von der Verteilungsfunktion F

Also $F^{n*}(x) = \sum_{j=0}^{x} F^{(n-1)*}(x - j) \cdot f_j$

Def.: $F^{1*} = F, F^{0*}(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

Ähnlich $f_x^{n*} = P(S_n = x)$

Sodass $f_x^{n*} = \sum_{j=0}^{x} f_{x-j}^{(n-1)*} f_j$ mit $f^{1*} = f$

Wenn F eine stetige Verteilung im Intervall(0, ∞) ist mit Dichtfunktion, haben wir

$$F^{n*}(n) = \int_0^x F^{(n-1)*}(x-y) f(y) \mathrm{d}y$$

Und $f^{n*}(n) = \int_0^x f^{(n-1)*}(x-y) f(y) \mathrm{d}y$

Bsp.1: Wie ist die Verteilung von S_n, wenn $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ i.i.d. ZV. und $X_1 \sim \gamma(1, \lambda)$ sind.

Setze n = 2 ein

$$f^{2*}(x) = \int_0^x f(x-y) f(y) \mathrm{d}y$$

$$= \int_0^x \lambda \cdot \mathrm{e}^{-\lambda(x-y)} \cdot \lambda \cdot \mathrm{e}^{-\lambda y} \mathrm{d}y$$

$$= \lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda x} \int_0^x \mathrm{d}y$$

$$= \lambda^2 \cdot x \cdot \mathrm{e}^{-\lambda x}$$

$$\Rightarrow S_2 \sim \gamma(2, \lambda)$$

n = 3 $f^{3*}(x) = \int_0^x f^{2*}(x-y) f(y) \mathrm{d}y$

$$= \int_0^x \lambda^2 \cdot (x-y) \cdot \mathrm{e}^{-\lambda(x-y)} \cdot \lambda \cdot \mathrm{e}^{-\lambda y} \, \mathrm{d}y$$

$$= \lambda^3 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda x} \int_0^x (x-y) \mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2} \lambda^3 \cdot x^2 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda x}$$

$$\Rightarrow S_3 \sim \gamma(3, \lambda)$$

Mit Induktion

$$f^{(n-1)*}(x) \sim \gamma(n-1, \lambda)$$

$$f^{n*}(x) = \int_0^x f^{(n-1)*}(x-y) f(y) \mathrm{d}y$$

$$= \int_0^x \frac{\lambda^{n-1} \cdot (x-y)^{n-2} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda(x-y)}}{\Gamma(n-1)} \cdot \lambda \cdot \mathrm{e}^{-\lambda y} \, \mathrm{d}y$$

$$= \frac{\lambda^n \cdot \mathrm{e}^{-\lambda x}}{\Gamma(n-1)} \int_0^x (x-y)^{n-2} \, \mathrm{d}y$$

$$= \frac{\lambda^n \cdot \mathrm{e}^{-\lambda x}}{\Gamma(n-1)} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot x^{n-1} = \frac{\lambda^n \cdot x^{n-1} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda x}}{\Gamma(n)}$$

$$\Rightarrow S_\mathrm{n} \sim \gamma(n, \lambda)$$

c. rekursive Rechnung von diskreten Zufallsvariablen.

Sei X_i nichtnegative diskrete ZV.

Definiere $f_j = P(X_1 = j)$ und $g_j = P(S_n = j)$ für j = 0,1,2,…

Benutze die erzeugende Funktion von X_i

$$G_x(r) = E(r^x) = \sum_{j=0}^{\infty} r^j f_j$$

die erzeugende Funktion von S

$$G_s(r) = E(r^s) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k g_k$$

Beziehung $G_s(r) = G_x(r)^n$

Ableiten $G_s'(r) = n \cdot G_x(r)^{n-1} \cdot G_x'(r)$

Multiplizieren mit $r \cdot G_x(r)$ ergibt

$$G_x(r) \cdot r \cdot G_s'(r) = n \cdot G_s(r) \cdot r \cdot G_x'(r)$$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} r^j f_j \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot r^k \cdot g_k = n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} r^k g_k \sum_{j=1}^{\infty} j r^j f_j$$

Um ein Ausdruck von g_i zu finden, betrachten wir das Koeffizient von r^x auf der beiden Seiten von der Gleichung.
Das Koeffizient r^x auf der linken Seite kann als $r^x = r^j \cdot r^{x-j}$ geschrieben werden.

also $f_0 x \cdot g_x + f_1 (x-1) \cdot g_{x-1} + \dots + f_{x-1} \cdot g_1 = \sum_{j=0}^{\infty} (x-j) f_j g_{x-j}$

ähnlich ist auf der rechten Seite

$$n \cdot \left(g_0 x f_x + g_1 (x-1) f_{x-1} + \dots + g_{x-1} f_1\right) = n \cdot \sum_{j=1}^{x} j f_j g_{x-j}$$

Die beide Koeffizienten müssen gleich sein, bekommen wir

$$x \cdot g_x \cdot f_0 + \sum_{j=1}^{x-1} (x-j) f_j g_{x-j} = n \cdot \sum_{j=1}^{x} j f_j g_{x-j}$$

$$\Rightarrow g_x = \frac{1}{f_0} \sum_{j=1}^{x} \left((n-1) \frac{j}{x} - 1 \right) \cdot f_j \cdot g_{x-j}$$

Bsp.: $\{X_i\}_{i=1}^{4}$ sind i.i.d. ZVen. mit $f_j = P(X_i = j)$

und $f_0 = 0,4 \quad f_2 = 0,2$

$f_1 = 0,3 \quad f_3 = 0,1$

$S_4 = \sum_{i=1}^{4} X_i$,

Rechnen rekursiv $P(S_4 = r)$ für r = 1,2,3 und 4.

Lösung: $g_0 = P(S_4 = 0) = f_0{}^4 = 0,4^4 = 0,0256$

Und $f_j = 0$ für j = 4,5,6.

also $g_x = \frac{1}{f_0} \sum_{j=1}^{min(3,x)} \left(\frac{5j}{x} - 1 \right) f_j g_{x-j}$

$$g_1 = \frac{1}{f_0} \cdot 4 \cdot f_1 \cdot g_0 = 0,0768$$

$$g_2 = \frac{1}{f_0} \left(\frac{3}{2} \cdot f_1 \cdot g_1 + 4 f_2 g_0 \right) = 0,1376$$

$$g_3 = \frac{1}{f_0} \left(\frac{2}{3} \cdot f_1 \cdot g_2 + \frac{7}{3} f_2 g_1 + 4 f_3 g_0 \right) = 0,1840$$

$$g_4 = \frac{1}{f_0} \left(\frac{1}{4} \cdot f_1 \cdot g_3 + \frac{3}{2} f_2 g_2 + \frac{11}{4} f_3 g_1 \right) = 0,1905$$