Seminar Bewertungsmethoden in der Personenversicherungsmathematik

Technische Reserven und Marktwerte I

Stefanie Schütz

Mathematisches Institut
der
Universität zu Köln

Sommersemester 2010
Betreuung: Prof. Hanspeter Schmidli, Dr. Julia Eisenberg

I. Vorwort

Der Hauptgrund für dieses Buch und somit auch das bevorstehende Seminar liegt darin, dass praktizierende Aktuare eine Darstellung der finanzwirtschaftlichen Methoden und deren Anwendung in den Lebensversicherungen aus der Sicht des Praktikers benötigen.
In den ersten zwei Vorträgen geht es um $Technische\ Reserven\ und\ Marktwerte$.
Bei $Technischen\ Reserven$ oder auch $Deckungsrückstellungen$ handelt es sich um gesetzlich zu bildende Rückstellungen im Lebensversicherungsbereich, die dem Prämienzahler garantieren sollen, dass bei Ausschüttung seiner Lebensversicherung ausreichend Kapital des Versicherungsunternehmens vorhanden ist.
Als erstes wird der Versicherungsvertrag mit Gewinnbeteiligung beschrieben. Zunächst anhand des klassischen versicherungsmathematischen Modells mit einer deterministischen Zinsrate und keinen Investitionsalternativen.
Die klassische Bewertung basierend auf konservativen Bewertungsannahmen wird erklärt und ein alternativer Bewertungsansatz wird vorgestellt. Hierbei ist die Unterteilung der zukünftigen Zahlungen in garantierte und nicht garantierte Zahlungen sehr wichtig.

II. Technische Reserven und Marktwerte

1. Einführung

Im Folgenden befassen wir uns mit einigen, für die Berechnung von Marktwerten relevanten, Bewertungsaspekten in Personenversicherungen.
Zunächst sei bemerkt, dass die Begriffe $prospektiv$ und $retrospektiv$ eine wichtige Rolle spielen.
Prospektiv[1] heißt hierbei, dass nur zukünftige Zahlungen berücksichtigt werden. In diesem Fall berechnen sich die Deckungsrückstellungen als Differenz zwischen Ausgaben auf Seiten des Versicherungsunternehmen der Zukunft und Einnahmen der Zukunft.
Ist diese Methode nicht möglich (Höhe des Versicherungsversprechen nicht absolut festgelegt), so geht man zur retrospektiven Methode über. Hier ergibt sich die Deckungsrückstellung als Differenz zwischen den aufgezinsten eingenommenen Beiträgen und den vertraglichen Entnahmen für Risiko und Betriebsaufwendungen.

Durch das gesamte Kapitel hinweg werden sich alle Berechnungen auf den im Folgenden vorgestellten Versicherungsvertrag beziehen.
Es handelt sich hierbei um eine gemischte Lebensversicherung[2] mit folgenden Parametern:

π	Prämienhöhe
$b^a(0)$	garantierte Überlebenssumme zur Zeit 0
b^{ad}	garantierte Todesfallsumme

Bonus wird durch Erhöhung der Überlebenssumme gezahlt. (Demzufolge ist die Überlebenssumme abhängig von der Zeit.)
Der Versicherungsvertrag wird zur Zeit 0 mit einer Laufzeit von n Jahren abgeschlossen, wenn der Versicherte x Jahre alt ist. Kosten werden zunächst außer Acht gelassen.
Wir nehmen an, dass der Versicherte mit deterministischer Sterberate $\mu(s)$ im Alter von $x + s$ Jahren stirbt.
Hierbei ist natürlich zu beachten, dass $\mu(s)$ abhängig ist von x.
Außerdem gehen wir davon aus, dass die Diskontierung auf einer vorbestimmten Zinsrate basiert. Der Diskontierungsfaktor ist eine wichtige Größe für $u \geq t$ bis t, $\exp(-\int_t^u r(s)ds)$. [Abk.: $\exp(-\int_t^u r)$]
Im Falle einer konstanten Zinsrate gleicht der Diskontierungsfaktor $\exp(-r(u-t)) = v^{u-t}$, wobei $v = \exp(-r)$.
Eine andere wichtige Größe ist definiert durch $\exp(-\int_t^u \mu(s)ds)$ [Abk.: $\exp(-\int_t^u \mu)$] und beschreibt die Überlebenswahrscheinlichkeit von einem Alter von $x + t$ bis $x + u$. In der Versicherungsmathematik notiert durch ${}_{u-t}p_{x+t}$.

[1] Nach EU-Vorgaben sollte die prospektive Methode verwendet werden.
[2] Unter einer gemischten Lebensversicherung versteht man die Kombination aus Todes- und Erlebensfallversicherung. Im Todesfall des Versicherungsnehmers zahlt die Versicherung an die Hinterbliebenen die vereinbarte Versicherungssumme, im Erlebensfall erhält der Kunde selbst diese Summe plus eventuell erwirtschafteter Überschussanteile der Versicherung.

Zur Erinnerung nochmal die Barwerte zur Zeit t jeweils einer Einheit einer:

Erlebensfallversicherung[1]:

$$ {}_{n-t}E_{x+t} = v^{n-t}\,{}_{n-t}p_{x+t} = e^{-\int_t^n r+\mu}, $$

temporären Todesfallversicherung[2]:

$$ A^1_{x+t\overline{n-t|}} = \int_t^n v^{s-t}\,{}_{s-t}p_{x+t}\mu(s)\ \mathrm{d}s = \int_t^n e^{-\int_t^s r+\mu}\mu(s)\ \mathrm{d}s, $$

temporären Leibrente[3]:

$$ a_{x+t\overline{n-t|}} = \int_t^n v^{s-t}\,{}_{s-t}p_{x+t}\ \mathrm{d}s = \int_t^n e^{-\int_t^s r+\mu}\ \mathrm{d}s. $$

2. Die traditionelle Zusammensetzung der Verbindlichkeiten

Es gibt drei verschiedene Rechnungsgrundlagen. Hierbei handelt es sich um in versicherungsmathematischen Berechnungen verwendete Parameter. Hier zum einen die Zinsrate und zum anderen die Sterbewahrscheinlichkeit.

1. Ordnung: besonders vorsichtig bestimmt
2. Ordnung: realistisch gewählt
3. Ordnung: den tatsächlich eingetretenen Vehältnissen entsprechend

2.1 Rechnungsgrundlagen 2. Ordnung

Beginnen wir mit den Rechnungsgrundlagen 2. Ordnung, (r^δ, μ^δ), und betrachten wie sich die technischen Reserven hiermit berechnen. Wir erhalten die folgende Differenzengleichung mit Anfangsbedingung:

$$ \begin{aligned} &\Delta V^*(t) = r^\delta(t)V^*(t)\Delta t + \pi\Delta t - \mu^\delta(t)R^*(t)\Delta t, \\ &V^*(0) = 0 \end{aligned} $$

wobei:

$R^*(t) = b^{ad} - V^*(t)$	Risikosumme
Δt	Zeitintervall für Verzinsung

[1] Die Erlebensfallversicherung sieht vor, dass der Versicherungsnehmer zum vereinbarten Zeitpunkt (Endalter) eine Leistung in Form einer Erlebensfallsumme von der Versicherung erhält. Voraussetzung ist, dass der Versicherungsnehmer diesen Zeitpunkt persönlich erlebt. Die Erlebensfallversicherung ist eine häufig vorkommende Variante der allg. Lebensversicherung bzw. der gemischten Lebensversicherung.

[2] Bei dieser Versicherungsart wird die Versicherungssumme nur dann bezahlt, wenn der Versicherte vor dem Alter $x + n$ stirbt.

[3] Diese Rente umfasst die ersten n Rentenzahlungen der sofort beginnenden lebenslänglichen Leibrente, wobei, da es sich um eine Leibrente handelt, bei Tod des Versicherten während der Ablaufzeit auch weniger als n Rentenzahlungen erfolgen können.

Die zu dieser diskreten Gleichung korrespondierende DGl entsteht durch Division durch Δt und der Grenzwertbetrachtung für $\Delta t \to 0$.

$$\begin{aligned}&\tfrac{d}{dt}V^*(t) = r^\delta(t)V^*(t) + \pi - \mu^\delta(t)R^*(t),\\&V^*(0) = 0\end{aligned}$$

Gelöst über das Intervall $(0,t]$ erhalten wir die retrospektive Form

$$V^*(t) = \int_0^t e^{\int_s^t r^\delta + \mu^\delta}(\pi - b^{ad}\mu^\delta(s))\,\mathrm{d}s$$

Gelöst über das Intervall $(t,n]$ erhalten wir die prospektive Form

$$V^*(t) = b^{ad}A^{1\delta}_{x+t\overline{n-t|}} + V^*(n)_{n-t}E^\delta_{x+t} - \pi a^\delta_{x+t\overline{n-t|}}$$

wobei $V^*(n)$ der Endwert der technischen Reserven ist.
Man sieht, dass in der prospektiven Form die Rechnungsgrundlagen 2. Ordnung zusammen mit dem Endwert der technischen Reserven vorkommen.
Da dieser jedoch zum Zeitpunkt t unbekannt ist, ist dies keine gute Berechnungshilfe.
Wird der Endwert $V^*(n)$ jedoch als Endleistung, sprich Überlebenssumme interpretiert, so beschreibt die prospektive Form die Deckungsrückstellungen als prospektiven Wert aller Zahlungen bewertet mit den zukünftigen Rechnungsgrundlagen.

2.2 Rechnungsgrundlagen 1. Ordnung

Nun betrachten wir die Rechnungsgrundlagen 1. Ordnung, (r^*, μ^*), mit denen, gemäß dem Äquivalenzprinzip[1], die garantierten Leistungen festgesetzt werden. Wir kommen zu der folgenden DGl:

$$\begin{aligned}&\tfrac{d}{dt}V^*(t) = r^*(t)V^*(t) + \pi - \mu^*(t)R^*(t) + \delta(t)\\&V^*(0) = 0\end{aligned}$$

Dividendenrate $\delta(t) = (r^\delta(t) - r^*(t))V^*(t) + (\mu^*(t) - \mu^\delta(t))R^*(t)$ genau so, dass Deckungsrückstellungen übereinstimmen mit der Definition von eben.
(Zum einen kann durch gegebene Rechnungsgrundlage 2. Ordnung die Dividendenrate bestimmt werden und zum anderen ist bei gegebener Dividendenrate jedes Paar (r^δ, μ^δ) ein Kandidat für die Rechnungsgrundlage 2. Ordnung.)

Die DGl gelöst über $[0,t]$ führt zur retrospektiven Form

$$V^*(t) = \int_0^t e^{\int_s^t r^* + \mu^*}(\pi - b^{ad}\mu^*(s) + \delta(s))\,\mathrm{d}s$$

Nach dem Äquivalenzprinzip ergibt sich auf Grundlage der technischen Reserven für die garantierte Überlebenssumme zur Zeit t

$$b^a(t) = \frac{V^*(t) + \pi a^*_{x+t\overline{n-t|}} - b^{ad}A^{1*}_{x+t\overline{n-t|}}}{{}_{n-t}E^*_{x+t}}$$

[1] Nach diesem müssen die zu erwartenden Leistungen der Versicherungsgesellschaft und die zu erwartenden Gegenleistung des Versicherungsnehmers einander gleich sein.

Nun können wir die prospektive Form wie folgt schreiben

$$V^*(t) = b^{ad} A^{1*}_{x+t\overline{n-t|}} + b^a(t)_{n-t}E^*_{x+t} - \pi a^*_{x+t\overline{n-t|}}$$

Wir sehen $b^a(n) = V^*(n)$. Die Deckungsrückstellung entspricht also der Überlebenssumme zum Endpunkt n.
Dies unterstützt die Interpretation der Deckungsrückstellung als Endleistung.
Ebenfalls ergibt sich die garantierte Erlebensfallsumme zum Zeitpunkt 0:

$$b^a(0) = \frac{\pi a^*_{x\overline{n|}} - b^{ad} A^{1*}_{x\overline{n|}}}{{}_nE^*_x}$$

Die prospektive Form beschreibt die Rückstellungen als einen prospektiven Wert der zur Zeit t garantierten Zahlungen bewertet mit den RG 1. Ordnung. Die Rückstellungen zur Zeit t decken die garantierten Zahlungen zur Zeit t.

2.3 Rechnungsgrundlagen 3. Ordnung

Wir betrachten nun die unverteilten Rückstellungen[1] und ihr Entstehen aus den RG 3. Ordnung, (r, μ). Die Berechnung der Gesamtheit der Rückstellungen mithilfe der RG 3. Ordnung führt zu der folgenden DGl:

$$\frac{d}{dt}U(t) = r(t)U(t) + \pi - \mu(t)R(t),$$
$$U(0) = 0$$

wobei $R(t) = b^{ad} - U(t)$ die Risikosumme ist.

Die DGl gelöst über $[0, t]$ führt zu der retrospektiven Form

$$U(t) = \int_0^t e^{\int_s^t r+\mu}(\pi - b^{ad}\mu(s))\,\mathrm{d}s \qquad (*)$$

Die prospektive Form ist

$$U(t) = b^{ad} A^1_{x+t\overline{n-t|}} + U(n)_{n-t}E_{x+t} - \pi a_{x+t\overline{n-t|}}$$

wobei $U(n)$ der Endwert der Gesamtheit der Rückstellungen ist.
Die unverteilten Rückstellungen ergeben sich zu guter Letzt als Differenz aus der Gesamtheit der Rückstellungen und den Deckungsrückstellungen.

$$X(t) = U(t) - V^*(t)$$

Wir erhalten die retrospektive Form

$$X(t) = \int_0^t e^{\int_s^t r+\mu}(c(s) - \delta(s))\,\mathrm{d}s \qquad (**)$$

wobei der Beitragssatz c definiert ist durch

$$c(t) = (r(t) - r^*(t))V^*(t) + (\mu^*(t) - \mu(t))R^*(t)$$

[1] Teil des Überschusses, der der Gruppe der Versicherungsnehmer zugeteilt ist, jedoch unter ihnen an sich noch nicht aufgeteilt wurde.

Man sieht, dass die unverteilten Rückstellungen aus vergangen Beiträgen minus vergangenen Dividenden bestehen.
Für die Rechnungsgrundlagen 2. Ordnung soll nun gelten:

$$X(n) = U(n) - V^*(n) = 0$$

Dann folgt für die prospektive Form

$$X(t) = \int_t^n e^{-\int_t^s r+\mu}(\delta(s) - c(s))\,\mathrm{d}s \qquad (***)$$

Aufgrund der Bedingung an die Rechnungsgrundlagen 2. Ordnung und der Definition von $V(t)$ als prospektiver Wert der zukünftigen Zahlungen ergibt sich $U(t) = V(t)$.
$(*)(**)$ sind Definitionen von U und X, wobei zum Beispiel $(***)$ eine Darstellung einer der Größen ist basiert auf der Bedingung, dass $X(n) = 0$. Die Bedingung $U(n) - b^a(n) = 0$ kann durch Multiplikation mit $e^{-\int_0^n r+\mu}$ auch wie folgt geschrieben werden

$$b^a(n)_n E_x + b^{ad} A^1_{\overline{xn|}} - \pi a_{\overline{xn|}} = 0$$

$\Rightarrow$ Die Bedingung $X(n) = 0$ entspricht der Anwendung des Äquivalenzprinzips auf die Gesamtheit der Zahlungen mit der Rechnungsgrundlage 3. Ordnung.
(Zusätzlich würde man eigentlich noch eine Liquiditätsbedingung einführen, $X(t) \geq 0$. Der Zweck wäre die Sicherheit, dass U zu jedem Zeitpunkt die technischen Reserven, interpretiert als der Wert der garantierten Zahlungen bewertet mit Rechnungsgrundlagen 1. Ordnung und einen Sicherheitszuschlag beinhaltend, deckt. Daher würde in der traditionellen Zusammensetzung $U \leq V^*$ nicht akzeptiert werden. In der marktwirtschaftlichen Zusammensetzung sind Liquiditätsbedingungen wie $U \geq V^*$ nicht notwendig.)

3. Die marktwirtschaftliche Zusammensetzung der Verbindlichkeiten

Die garantierten Zahlungen zur Zeit t sind gegeben durch die Prämienhöhe π, die Summe im Todesfall b^{ad} und der Überlebensfallsumme $b^a(t)$.
Die Marktreserve zur Zeit t ist durch die folgende prospektive Formel gegeben

$$V^g(t) = b^{ad} A^1_{x+t\overline{n-t|}} + b^a(t)_{n-t} E_{x+t} - \pi a_{x+t\overline{n-t|}}$$

Demzufolge ist $V^g(t)$ ein prospektiver Wert der garantierten Zahlungen auf Basis der Rechnungsgrundlagen 3. Ordnung. $V^g(t)$ deckt also die garantierten Zahlungen zum Zeitpunkt t.

Nun schauen wir uns Bonuszahlungen an. Bonuszahungen zur Zeit t sind Zahlungen, die zu diesem Zeitpunkt nicht garantiert sind.
Die wirklichen Zahlungen unterscheiden sich von den garantierten Zahlungen lediglich aufgrund der Überlebenssumme $b^a(n)$.
$b^a(n) - b^a(t)$ ist genau die Bonuszahlung. Diese hat den Marktwert $V^b(t) = (b^a(n) - b^a(t))_{n-t} E_{x+t}$ (Bonuspotential zur Zeit t) Dieses deckt die nicht garantierten Zahlungen zur Zeit t. Es ist sinnvoll, das Bonuspotential in zwei Rückstellungen aufzuteilen. Zum einen das Individuelle, V^{ib}, und zum anderen das Kollektive, V^{cb}. Wir betrachten den Fall

$$V \geq V^* \geq V^g \Rightarrow V^b = V^{cb} + V^{ib} = (V - V^*) + (V^* - V^g)$$

Betrachtet man das genauer, folgt, dass das individuelle Bonuspotential der Marktwert des in den garantierten Zahlungen auftretenden Sicherheitszuschlag ist. Das Kollektive kann dann als Bonuspotential minus individueller Bonus berechnet werden.

4. Verbindlichkeiten und Bewertungsprinzipien

Nun werden wir die soeben vorgestellten Rückstellungen als bedingte Erwartungswerte präsentieren. Wir schauen uns die einzelnen Bestandteile der prospektiven Formeln an. Dies ermöglicht uns die Formeln auch für andere Versicherungsarten zu generalisieren.
Z sei nun eine Indikatorfunktion. $Z(t)$ wird genau dann 1, wenn der Versicherte zum Zeitpunkt t tot ist. Außerdem eine weitere Funktion N, die die Anzahl der Toten bis zum Zeitpunkt t angibt. (Hier also $Z = N$)
Die Funktion $I(t) = 1 - Z(t)$ ist eine Indikatorfunktion, die genau dann 1 wird, wenn der Versicherte zum Zeitpunkt t noch lebt.
Die all diesen Prozessen zugrunde liegende Zufallsvariable ist die verbleibende Lebensdauer zur Zeit 0 bei einem Alter von x, T_x.
Nun können wir die Elemente der prospektiven Formeln wie folgt schreiben.
(Es handelt sich jeweils um bedingte Erwartungswerte, wobei $Z(t) = 0$ die Bedingung darstellt.)

$$_{n-t}E_{x+t} = \mathbb{E}_t[e^{-\int_t^n r} I(n)],$$

$$a_{x+t\overline{n-t|}} = \mathbb{E}_t[\int_t^n e^{-\int_t^s r} I(s)\, \mathrm{d}s],$$

$$A^1_{x+t\overline{n-t|}} = \mathbb{E}_t[\int_t^n e^{-\int_t^s r}\, \mathrm{d}N(s)].$$

1) Bedingter Erwartungswert des diskontierten Gewinns

2) Integral ist wie folgt interpretiert:

$$I(t) \int_t^{\min(T_x,n)} e^{-\int_t^s r} ds$$

3) $dN(s)$ Änderung von N zur Zeit s ($\mathrm{d}N(s) = 0, s \neq T_x$; überlebt der Versicherte bis n, $\mathrm{d}N(s) = 0$ für $t \leq s \leq n$; demzufolge ist $\mathrm{d}N(s)$ der Gewinn zur Zeit s einer Einheit der Versicherung.)

Die wesentlichen Elemente sind Diskontierung, der bedingte Erwartungswert und grundlegende Zahlungen,wobei wir nur die Zahlungen bewerten wollen.
Nun führen wir das Prinzip der Arbitragefreiheit ein. Wir nehmen an, dass die Zahlungen an den Versicherer auf einem Konto mit Zinszuwachs deponiert werden. Die vom Versicherungsunternehmen geleisteten Zahlungen werden abgebucht. Mit $S^0(t)$ bezeichnen wir den Wert einer im Zeitpunkt 0 angelegten Einheit zur Zeit t. Damit ergibt sich für den Wert einer zur Zeit s angelegten Einheit zur Zeit t, $S^0(t)/S^0(s)$.
Wir nehmen an, dass ein Zinssatz existiert, sodass

$$\frac{d}{dt} S^0(t) = r(t) S^0(t), \quad S^0(0) = 1$$

$\Rightarrow S^0(t) = e^{\int_0^t r}$

Durch die Einführung von S^0 haben wir einen Finanzmarkt spezialisiert. Wir haben ein Anlagegut spezifiziert, in das der Versicherer investieren kann. Es existieren jedoch keinerlei Investitionsalternativen; folglich existiert nur ein Asset S^0 in das der Versicherer investiert.
Wenn S^0 deterministisch ist können leicht Bondpreise, Preise von Optionen usw. bewertet werden. Ein Zerobond ist eine Anleihe, bei der es nur eine Auszahlung (hier eine Einheit) am Ende der Laufzeit gibt. Der Wert zur Zeit t sei $P(t,n)$.
Wenn S^0 deterministisch ist, so gilt:

$$P(t,n) = e^{-\int_t^n r}.$$

Angenommen $P(t,n) = e^{\int_t^n r} + \varepsilon$. Wir verkaufen nun den Zerobond und investieren den Verkaufserlös $P(t,n)$ in S^0, indem wir $P(t,n)/S^0(t)$ Einheiten von S^0 kaufen. Zur Zeit n, nachdem wir eine Einheit an den Besitzer des Zerobonds gezahlt haben, beträgt der Wert unserer Investition

$$P(t,n)S^0(n)/S^0(t) - 1 = \varepsilon e^{\int_t^n r}$$

Wäre nun $\varepsilon \neq 0$ hätten wir den Wert ohne Risiko erzeugt. Diese Möglichkeit lassen wir jedoch nicht zu womit folgt, dass $\varepsilon = 0$ gilt.
Damit sind wir bei der Arbitragefreiheit, die das Fehlen jeder Möglichkeit zur Arbitrage, sprich der Ausnutzung von räumlichen oder zeitlichen Preisdifferenzen für ein Gut, beschreibt.
Ist S^0 nicht deterministisch können wir zunächst keine Aussage machen. Wir gehen also davon aus, dass r deterministisch ist.

Nun beschäftigen wir uns mit dem Diversifikationsprinzip und dem dazugehörenden Erwartungswert. Wenn $I(n)$ zur Zeit 0 bekannt ist, erhalten wir den Wert $e^{-\int_0^n r} I(n)$ für die Zahlungen.
Der Todeszeitpunkt ist allerdings nicht bekannt. Demzufolge können wir $e^{-\int_0^n r} I(n)$ lediglich als stochastischen Barwert interpretieren.

Nehmen wir nun an, der Versicherer schließt eine große Zahl m von Verträgen ab mit jeweils unabhängigen und identisch verteilten Zahlungen. $I^i(t)$ sei die Indikatorfunktion für den i-ten Versicherten. Nun greift das Gesetz der großen Zahlen und wir schließen, dass der Gesamtbarwert pro Versicherten gegen den erwarteten Barwert eines einzelnen Vertrags für steigendes m konvergiert.
Dies kann auf Situationen verallgemeinert werden, in denen die Versicherungsverträge unterschiedliche Laufzeiten haben.
Wenn der Tod mit Rate μ eintritt, erhalten wir für $I(n)$ zur Zeit 0 den Wert

$$e^{-\int_0^n r} \mathbb{E}[I(n)] = e^{-\int_0^n r+\mu} I(n) = {}_nE_x.$$

Da oft aber auch der Wert während der Laufzeit gewünscht ist, gehen wir nun davon aus, der Versicherer wüsste, dass der Versicherte zum Zeitpunkt t lebt. Dann erhalten wir den folgenden Wert

$$e^{-\int_t^n r} \mathbb{E}_t[I(n)] = e^{-\int_t^n r+\mu} I(n) = {}_{n-t}E_{x+t}$$

Dieser beschreibt die Verbindlichkeiten zur Zeit t eines zur Zeit 0 abgeschlossenem Versicherungsvertrag, wobei der Versicherte zur Zeit 0 x Jahre alt war und bekannt ist, dass er zur Zeit t lebt.

Zum Schluss schauen wir uns noch an wie die Arbitragefreiheit und die Diversifikation die marktwirtschaftliche Zusammensetzung der Rückstellungen untermauern.
Wenn wir beispielhaft nochmal zwei der prospektiven Formeln betrachten und etwas umschreiben, erhalten wir

$$V^g(t) = \mathbb{E}_t[\int_t^n e^{-\int_t^s r}(b^{ad}\,\mathrm{d}N(s) - I(s)\pi\,\mathrm{d}s) + b^a(t)e^{-\int_t^n r}I(n)],$$

$$V^b(t) = \mathbb{E}_t[(b^a(n) - b^a(t))e^{-\int_t^n r}I(n)],$$

All diese Größen bauen auf der Arbitragefreiheit und der Diversifikation auf. Ersichtlich wird dies auch durch Elemente wie den Diskontierungsfaktor und bedingte Erwartungswerte in den Formeln.
Im Gegensatz dazu bauen die zwei folgenden Versionen der technischen Reserven nicht auf den zwei Prinzipien auf, da zum Beispiel der Diskontierungsfaktor nicht auf der Zinsrate des Bankkontos basiert.

$$V^*(t) = \mathbb{E}_t^\delta[\int_t^n e^{-\int_t^s r^\delta}(b^{ad}\,\mathrm{d}N(s) - I(s)\pi\,\mathrm{d}) + e^{-\int_t^n r^\delta}b^a(n)I(n)],$$

$$V^*(t) = \mathbb{E}_t^*[\int_t^n e^{-\int_t^s r^*}(b^{ad}\,\mathrm{d}N(s) - I(s)\pi\,\mathrm{d}s) + e^{-\int_t^n r^*}b^a(t)I(n)].$$