

Seminar: Quantitatives Risikomanagement
Grundlegende Konzepte des Risikomanagements

Prof: Hanspeter.Schmidli
Betreuung: Julia Eisenberg
Sun,Fang

2.1. Risikofaktoren und die Verlustverteilung

2.1.1 Allgemeine Definition

Wir beobachten den Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, F, P)

$V(s)$ ist der Wert des Portfolios in dem Zeitpunkt s .

Δ bezeichnet den Zeithorizont, z.B. ein Tag oder zehn Tagen.

Der Verlust, der aus einem Portfolio in dem Zeitraum $[s, s + \Delta]$ ist durch:

$$L_{[s, s + \Delta]} := -(V(s + \Delta) - V(s))$$

Die Verteilung von $L_{[s, s + \Delta]}$ wird Verlustverteilung genannt.

Bemerkung 2.1

Wir betrachten Δ als festen Zeitraum. In diesem Fall ist es zweckmäßig, Zeit in Einheiten Δ zu messen.

Sei $Y(s)$ ein Prozess und $(Y_t)_{t \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $Y_t := Y(t\Delta)$, dann wird der Verlust durch

$$L_{t+1} := L_{[t\Delta, (t+1)\Delta]} = -(V_{t+1} - V_t) \tag{1}$$

beschrieben.

Zum Beispiel, in Markt-Risikomanagement wird der Verlust häufig auf Tagesbasis gemessen, aber in Finanzmodellen wird die Zeit in der Regel auf Jahresbasis gemessen.

Da ein Jahr 365 Tagen hat, setzen wir $\Delta = 1/365$, oder ein Jahr von 250 Arbeitstagen setzen wir $\Delta = 1/250$.

Die Zufallsvariablen V_t und V_{t+1} bezeichnen jeweils der Wert des Portfolios am Tag t und $t + 1$, und L_{t+1} ist der Verlust zwischen den Tagen t zu $t + 1$.

Ein d -dimensional Zufallsvektor hat Komponenten Risikofaktoren $Z_t = (Z_{t,1}, \dots, Z_{t,d})'$ hat folgende Darstellung.

$$V_t = f(t, Z_t) \tag{2}$$

,wo f eine messbare Funktion ist. V_t heisst Risikoabbildung.

Die Auswahl der Risikofaktoren hängt von dem Portfolio ab. Häufig verwendete Risikofaktoren sind logarithmisch Preise der finanziellen Vermögenswerte, Erträge sowie logarithmische Wechselkurse.

Sei $(X_t)_{t \in N}$ eine Folge von Risikofaktoränderungen und $X_t := Z_t - Z_{t-1}$.

Aus (2) können wir den Verlust des Potfolios beschreiben durch:

$$L_{t+1} = -(f(t+1, Z_t + X_{t+1}) - f(t, Z_t)) \quad (3)$$

Wenn Z_t bekannt ist, wird die Verlustsverteilung von der Risikofaktoränderung X_{t+1} abhängen.

Wir beschreiben hier einen neuen Begriff.

Der **Verlustoperator** $l_{[t]} : R^d \rightarrow R$ ist definiert als

$$l_{[t]}(x) := -(f(t+1, Z_t + x) - f(t, Z_t)), x \in R^d, \quad (4)$$

Und offensichtlich $L_{[t+1]} = l_{[t]}(X_{t+1})$.

Ist f differenzierbar ist, so beobachten wir die Approximation erster Ordnung L_{t+1}^Δ in der Gleichung (3), dann gilt

$$L_{t+1}^\Delta := -\left(f_t(t, Z_t) + \sum_{i=1}^d f_{z_i}(t, Z_t) X_{t+1,i} \right), \quad (5)$$

wobei die Indizes von f die partiellen Ableitung bezeichnen. Dann ist der linear Verlustoperator gegeben durch

$$l_{[t]}^\Delta(X) := -\left(f_t(t, Z_t) + \sum_{i=1}^d f_{z_i}(t, Z_t) x_i \right) \quad (6)$$

Bemerkung 2.2

Bei der Entwicklung von Formeln (2) zu (6) sind wir davon ausgegangen, dass die Zeit in Einheiten Δ gemessen wird. Damit mit Markt-Konvention in unseren Beispielen zu ziehen, wird es manchmal die Abbildungen der Form $g(s, Z)$ betrachtet, wobei die Zeit s in Jahren gemessen wird; in diesem Fall die Gleichungen (2) und (3) werden umgeformt zu

$$L_{t+1}^\Delta := -\left(g\left((t+1)\Delta, Z_t + X_{t+1}\right) - g\left(t\Delta, Z_t\right)\right),$$

wobei Δ die Länge des Risikomanagementzeitraums im Jahr ist. Die lineare Version der Gleichung (5) kann wie folgt beschrieben werden:

$$L_{t+1}^\Delta := -\left(g_s(t\Delta, Z_t)\Delta + \sum_{i=1}^d g_{z_i}(t\Delta, Z_t)X_{t+1,i}\right)$$

Bemerkung 2.3

In unserer Definition von Verlust des Portfolios nehmen wir an, dass die Zusammensetzung des Portfolios über den Zeitraum Δ unverändert bleibt.

2.1.2 Bedingte und unbedingte Verlustverteilung

Die Differenz zwischen bedingter und unbedingter Verlustverteilung hängt stark von der Risikofaktoränderungen ab.

Nehmen wir an, dass die Risikofaktoränderung eine stationäre Verteilung F_X auf \mathbb{R}^d hat. Das bedeutet im Wesentlichen, dass die Verteilung von $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ konstant ist. (siehe Kapitel 4)

Sei \mathcal{F}_t eine σ -Algebra, die öffentlich zugängliche Informationen zum Zeitpunkt t beschreibt. $\mathcal{F}_t = \sigma(\{X_s : s \leq t\})$ wird oft als die Geschichte bis zum Zeitpunkt t (einschließlich Zeitpunkt t) genannt.

Typischerweise $F_{X_{t+1}|\mathcal{F}_t}$ bezeichnet die **bedingte** Verteilung von X_{t+1} gegeben \mathcal{F}_t .

Die bedingte Verlustverteilung $F_{L_{t+1}|\mathcal{F}_t}$ ist definiert als die Verteilung des Verlustoperators $l_{[t]}(\cdot)$ unter $F_{X_{t+1}|\mathcal{F}_t}$.

Für $l \in \mathbb{R}$, gilt $F_{L_{t+1}|\mathcal{F}_t}(l) = P(l_{[t]}(X_{t+1}) \leq l | \mathcal{F}_t) = P(L_{t+1} \leq l | \mathcal{F}_t)$

2.1.3 Risikoabbildung

Beispiel 2.4

Betrachten wir ein Portfolio von d Aktien. Sei λ_i die Anzahl der Aktien i im Portfolio zum Zeitpunkt t . Der Preis-Prozess der Aktie i wird durch $(S_{t,i})_{t \in \mathbb{N}}$

bezeichnet. Aus der Praxis in Finanz- und Risiko-Management benutzen wir logarithmische Preise als Risikofaktoren, z.B. wir nehmen an $Z_{t,i} := \ln S_{t,i}$, $1 \leq i \leq d$

Die Risikofaktoränderungen ist dann $X_{t+1,i} = \ln S_{t+1,i} - \ln S_{t,i}$. Dann bekommen wir

$V_t = \sum_{i=1}^d \lambda_i \exp(Z_{t,i})$ und damit

$$\begin{aligned} L_{t+1} &= -(V_{t+1} - V_t) \\ &= -\left(\sum_{i=1}^d \lambda_i \exp(Z_{t+1,i}) - \sum_{i=1}^d \lambda_i \exp(Z_{t,i}) \right) \\ &= -\left(\sum_{i=1}^d \lambda_i \left(\exp(\ln S_{t+1,i}) - \exp(\ln S_{t,i}) \right) \right) \\ &= -\left(\sum_{i=1}^d \lambda_i \frac{\exp(\ln S_{t+1,i})}{\exp(\ln S_{t,i})} \exp(\ln S_{t,i}) - \exp(\ln S_{t,i}) \right) \\ &= -\left(\sum_{i=1}^d \lambda_i \exp(X_{t+1,i}) \exp(\ln S_{t,i}) - \exp(\ln S_{t,i}) \right) \\ &= -\sum_{i=1}^d \lambda_i S_{t,i} \left(\exp(X_{t+1,i}) - 1 \right) \end{aligned}$$

Der lineare Verlust L_{t+1}^Δ ergibt sich als

$$L_{t+1}^\Delta = -\sum_{i=1}^d \lambda_i S_{t,i} X_{t+1,i} = -V_t \sum_{i=1}^d w_{t,i} X_{t+1,i}$$

wobei das Gewicht $w_{t,i} := (\lambda_i S_{t,i}) / V_t$ den Wertanteil der Aktien i am Gesamtwert des

Portfolios angibt. Der entsprechende lineare Verlustoperator ist durch

$l_{[t]}^\Delta(X) = -V_t w' X := -V_t \sum_{i=1}^d w_{t,i} x_i$ gegeben. Nehmen wir an, dass die Zufallsvariable X

eine Verteilung mit Erwartungswert μ und Kovarianzmatrix Σ hat. Mit den

allgemeinen Regeln für die Erwartungswert und die Varianz erhalten wir sofort

$$E\left(l_{[t]}^\Delta(X)\right) = -V_t w' \mu \quad \text{und} \quad \text{Var}\left(l_{[t]}^\Delta(X)\right) = V_t^2 w' \Sigma w \quad (9)$$

Beispiel 2.5 (Europäische Call-Option)

Eine europäische Call-Option mit Basispreis K und Ausübungszeitpunkt T gibt dem Inhaber das Recht, nicht aber die Verpflichtung, eine Aktie in T zu einem Preis von K zu kaufen.

Wir verwenden die **Black-Scholes-Formel** für die Bewertung unseres Portfolios.

Definiere die Funktion C^{BS} als

$$C^{BS}(s, S; r, \sigma, K, T) := S\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-s)}\Phi(d_2)$$

(10)

wobei Φ für die Standard-Normalverteilung bezeichnet, r ist den stetigen risikolosen Zinssatz, σ bezeichnet die Volatilität auf jährlicher Basis des Underlying Aktie,

$$\text{und } d_1 = \frac{\ln(S/K) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-s)}{\sigma\sqrt{T-s}} \quad \text{und } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-s} \quad (11)$$

Wir interessieren uns für die täglichen Verluste und setzen $\Delta = 1/250$.

Daher nehmen wir an $Z_t = (\ln S_t, r_t, \sigma_t)'$ als Risikofaktoren. Nach dem Black-Scholes-Formel der Wert der Call-Option am Tag t entspricht $V_t = C^{BS}(t\Delta, \exp(Z_t); r_t, \sigma_t, K, T)$.

Die Risikofaktoränderungen werden wie folgt beschrieben:

$$X_{t+1} = (\ln S_{t+1} - \ln S_t, r_{t+1} - r_t, \sigma_{t+1} - \sigma_t) \quad , \text{ s.d. der linearer Verlust ist:}$$

$$L_{t+1}^\Delta = -\left(C_s^{BS} \Delta + C_s^{BS} \exp(Z_t) X_{t+1,1} + C_r^{BS} X_{t+1,2} + C_\sigma^{BS} X_{t+1,3}\right) .$$

2.2 Messungen des Risikos

In der Praxis werden Risikomasse für viele Zwecke verwendet.

Die wichtigsten Zwecke sind die folgenden:

- (1) Bestimmung des Risikokapitals und der Kapitalunterlegung. Eine der wichtigsten Funktionen des Risikomanagements in dem Finanzsektor ist Bestimmung des Kapitals, welches als Buffer gegen unerwartete Verluste in einer Finanzinstitution stets vorhanden sein soll.
- (2) Management Instrument. Risikomassen werden oft bei Management als Massen zur Begrenzung der Risiken verwendet.
- (3) Versicherungsprämien. Versicherungsprämien kompensieren das Risiko, das eine Versicherungsgesellschaft übernimmt. Die Höhe dieser Kompensation kann als Maß für das Risiko angesehen werden.

2.2.1 Ansätze zur Messung des Risikos

Die Ansätze zur Messung des Risikos lassen sich in vier verschiedene Kategorien zusammenfassen: imaginärer Kapitalwert ; Masse für Faktorsensitivität; Risikomasse basierend auf Verlustverteilung; Risikomasse basierend auf Szenarien.

Imaginärer Kapitalwert-Ansatz:

Das ist der älteste Ansatz zur Quantifizierung des Risikos eines Portfolios. In dem imaginären Kapitalwert ist das Risiko eines Portfolios als die Summe der imaginären Werte der einzelnen Wertpapiere definiert.

Der Vorteil des“ imaginären Kapitalwert” -Ansatzes ist seine Einfachheit.

Maß für Faktorsensitivität:

Maß für Faktorsensitivität gibt die Veränderung des Wertes eines Portfolios bei Veränderung der Risikofaktoren. Darüber hinaus verursacht das Maß für Faktorsensitivität Probleme bei der Aggregation der Risiken.

Daher sind diese Masse nicht sehr nützlich.

Risikomasse basierend auf Verlustverteilung:

Das Konzept der Verlustverteilung ist sinnvoll für die Bestimmung der Höhe einer Kapitalanforderung, nicht nur für ein Portfolio, das aus einem einzigen Instrument besteht, sondern auch für die ganze Finanzinstitution. Richtig geschätzt spielt die Verlustverteilung auch Aufrechnungs- und Diversifikationseffekte wider.

Es gibt auch Probleme bei der Benutzung der Verlustverteilung.

z.B Alle Schätzung über die Verlustverteilung sind auf den vergangenen Daten basiert.

Risikomasse basierend auf Szenarien:

Das Risiko eines Portfolios wird durch den maximalen Verlust des Portfolios gemessen.

Wir geben jetzt eine formale Beschreibung.

Sei $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ der Risikofaktoränderungen (Szenarien) und einen Vektor $w =$

$(w_1, \dots, w_n) \in [0, 1]^n$ bezeichnet Gewicht. Betrachten wir ein Portfolio von riskanten

Wertpapieren und $l_{[t]}$ bezeichnet den entsprechenden Verlustoperator.

Das Risiko des Portfolios ergibt sich wie folgt

$$\psi_{[\mathcal{X}, w]} := \max \left\{ w_1 l_{[t]}(x_1), \dots, w_n l_{[t]}(x_n) \right\}, \quad (16)$$

Bemerkung 2.9

Nehmen wir an, dass $l_{[t]}(0) = 0$, d.h. der Wert der Position bleibt unverändert, wenn

alle Risikofaktoren gleich bleiben. Das ist sinnvoll für ein kleines Risikomanagementzeitraum Δ .

Es bezeichne δ_x das Dirac-Maß, $\delta_x = \begin{cases} 1, & w = x \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ und $\rho_{[\mathcal{X}, w]}$ bezeichnet die Menge

der Wahrscheinlichkeitsmasse auf R^d ,

$$\rho_{[\mathcal{X}, w]} = \left\{ w_1 \delta_{x_1} + (1 - w_1) \delta_{0, \dots}, w_n \delta_{x_n} + (1 - w_n) \delta_0 \right\}$$

Dann gilt

$$\varphi_{[\mathcal{X}, w]} = \max \left\{ E^P \left(l_{[t]}(\mathbf{X}) \right) : P \in \rho_{[\mathcal{X}, w]} \right\} \quad (17)$$

Risikomasse basierend auf Szenarien sind sehr nützliche Risikomanagement-Instrumente für Portfolios, die vergleichsweise wenig

Risikofaktoren haben. Das Problem ist Bestimmung von Szenarien und Gewichtungsfaktoren.

2.2.2 Value-at-Risk

Definition 2.10 (Value-at-Risk).

Sei $\alpha \in (0,1)$. Value-at-Risk (VaR) von dem Portfolio zum Niveau α ist die kleinste Zahl l , so dass die Wahrscheinlichkeit, dass der Verlust L das Niveau l überschreitet, nicht größer als $(1 - \alpha)$ ist.

$$VaR_\alpha = \inf \{l \in R : P(L > l) \leq 1 - \alpha\} = \inf \{l \in R : F_L(l) \geq \alpha\} \quad (18)$$

In der probabilistischen Version ist VaR ein Quantil der Verlustverteilung. Typische Werte für α sind $\alpha = 0,95$ oder $\alpha = 0,99$. Im Marktrisikomanagement ist der Zeitraum Δ in der Regel ein Tag oder zehn Tage, im Kreditrisikomanagement und operationellen Risikomanagement ist Δ in der Regel ein Jahr.

Das Bild 2.1 illustriert den Begriff VaR. 95%-VaR ist die durchgehende senkrechte Linie. Der durchschnittliche Verlust ist als gepunktete senkrechte abgebildet. Beachten Sie, dass die durchschnittliche Verlust negativ ist ($E(L) = -2,6$). Das bedeutet, dass wir einen Gewinn erwarten, aber den rechten Teil der Verlustverteilung ist ziemlich lang im Vergleich mit dem linken Teil. Die 95%-VaR bedeutet, dass wir mit die Chance von 5% mindestens diesen Betrag verlieren.

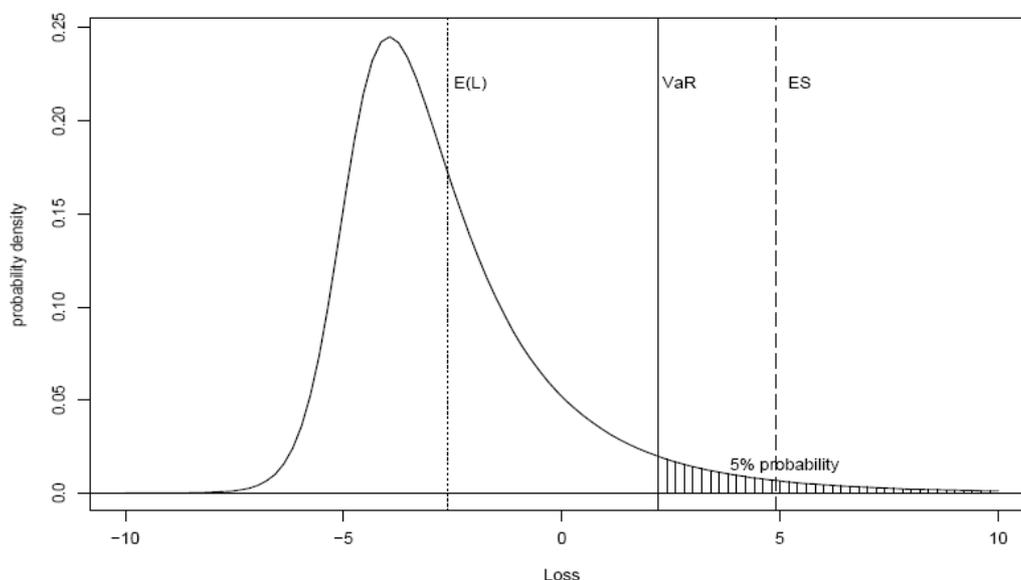


Abbildung 2.1 Ein Beispiel für eine Verlustverteilung mit 95%-VaR ist mit einer vertikalen Linie gekennzeichnet, der expected shortfall ist mit einer gestrichelten Linie gekennzeichnet.

Bemerkung 2.11. (Mean-VaR).

Wir bezeichnen mit μ den Erwartungswert der Verlustverteilung. Manchmal benutzt

man $VaR_\alpha^{Mean} := VaR_\alpha - \mu$ statt VaR. Wenn der Zeitraum Δ nur einen einen Tag beträgt, wird VaR_α^{Mean} als Tägliche Earnings at Risk (EaR) genannt. Die Unterschied zwischen VaR und VaR_α^{Mean} ist von geringer Bedeutung in das

Marktrisikomanagement, weil der Zeitraum Δ kurz ist und μ nahe an Null ist. Es wird im Kreditgeschäft von Bedeutung, weil der Zeitraum Δ länger ist. Weil Quantile eine wichtige Rolle im Risikomanagement spielen, geben wir jetzt eine wichtige Definition.

Definition 2.12. (Umkehrfunktion and Quantilfunktion)

(i) Sei $T: R \rightarrow R$ eine Funktion. Die Umkehrfunktion von T ist definiert als

$$T^{\leftarrow}(y) := \inf \{x \in R : T(x) \geq y\}$$

(ii) Sei F Verteilungsfunktion, die Umkehrfunktion F^{\leftarrow} ist als Quantilfunktion von F genannt. Für $\alpha \in (0,1)$ die α -Quantilfunktion von F ist gegeben durch

$$q_\alpha(F) := F^{\leftarrow}(\alpha) = \inf \{x \in R : F(x) \geq \alpha\}$$

Für eine Zufallvariable X mit Verteilungsfunktion F benutzen wir oft die alternative Schreibweise $q_\alpha(X) := q_\alpha(F)$. Wenn F stetig und streng monoton wachsend ist, dann haben wir $q_\alpha(F) = F^{-1}(\alpha)$, wobei F^{-1} die allgemeine Umkehrfunktion von F ist.

Lemma 2.13

$x_0 \in R$ ist das α -Quantil von der Verteilungsfunktion F genau dann, wenn $F(x_0) \geq \alpha$; $F(x) < \alpha$ für alle $x < x_0$.

Beispiel 2.14 (VaR für Normal-und t -Verlustverteilung).

Sei Verteilungsfunktion F_L normal verteilt mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 . Für $\alpha \in (0,1)$ fest, gilt

$$VaR_\alpha = \mu + \sigma \Phi^{-1}(\alpha) \text{ und } VaR_\alpha^{Mean} = \sigma \Phi^{-1}(\alpha) \tag{19}$$

Wobei Φ die Standard-Normalverteilungsfunktion ist und $\Phi^{-1}(\alpha)$ das α -Quantil von Φ ist.

Der Beweis ist einfach, da F_L streng monoton wachsend ist. Nach Lemma 2.13

brauchen wir nur zu zeigen, dass $F_L(VaR_\alpha) = \alpha$. Jetzt haben wir

$$P(L \leq VaR_\alpha) = P\left(\frac{L - \mu}{\sigma} \leq \Phi^{-1}(\alpha)\right) = \Phi(\Phi^{-1}(\alpha)) = \alpha$$

Dieses Ergebnis ist in dem Varianz-Kovarianz-Ansatz verwendet (auch als Delta-Normal-Ansatz genannt).

Ein weiteres nützliches Beispiel ist die t-Verlustverteilung. Nehmen wir an, für Verlust L besitzt $(L - \mu) / \sigma$ eine Standard-t-Verteilung mit Freiheitsgrad ν . Dann

haben wir $L \sim t(\nu, \mu, \sigma^2)$ und $E(L) = \mu$, $\text{Var}(L) = \nu\sigma^2 / (\nu - 2)$ für $\nu > 2$. Dann bekommen wir

$$VaR_\alpha = \mu + \alpha t_\nu^{-1}(\alpha) \quad (20)$$

wobei t_ν die Verteilungsfunktion von Standard-t-Verteilung ist.

2.2.3 Weitere Kommentare über VaR

Nicht-Subadditivität:

VaR als Risikomass wurde kritisiert, da es schlechte Aggregationseigenschaften hat.

An dieser Stelle bemerken wir, dass Nicht-Subadditivität bedeutet: wenn wir zwei

Verlustverteilungen F_{L_1} und F_{L_2} für zwei Portfolios haben und F_L bezeichnet die

gesamte Verlustverteilung des Gesamtportfolios $L = L_1 + L_2$. Es ist nicht zwingend,

daß $q(F_L) \leq q(F_{L_1}) + q(F_{L_2})$, so dass der VaR des Gesamtportfolios durch die

Summe der VaR der einzelnen Portfolios nach oben beschränkt ist.

Modell-Risiko und Marktliquidität:

In der Praxis werden VaR-Zahlen oft falsch interpretiert, was irreführend und sogar gefährlich ist; die Aussage, dass die tägliche Value-at-Risk mit dem Konfidenzniveau

$\alpha = 99\%$ von einem bestimmten Portfolio gleich l ist, versteht man als „mit einer

Wahrscheinlichkeit von 99% wird der Verlust kleiner als

l .“

Es gibt zwei Gründe, warum diese Interpretation falsch ist:

- (1) **Modell-Risiko.** Modell-Risiko ist definiert als das Risiko, dass Verluste entstehen, weil die verwendeten Risikomanagement-Modelle falsch sind oder einige der zugrundeliegenden Annahmen dieser Modelle in der Praxis nicht erfüllt sind.
- (2) **Marktliquidität.** Ein Markt für ein Wertpapier wird liquid genannt, wenn die Anleger können große Mengen von Wertpapieren in kürzester Zeit kaufen oder verkaufen ohne dass der Wertpapierpreis stark beeinflusst wird. Umgekehrt, ein Markt kann als illiquid genannt werden.

2.2.4 Andere Risikomassen, die auf der Verlustverteilung basiert.

Varianz:

Die Varianz ist ein gutes Konzept, das einfach analysiert werden kann. Aber Varianz als Risikomass hat zwei Nachteile:

- (1) Auf dem technischen Bereich, wenn wir Varianz benutzen, müssen wir davon ausgehen, dass das zweite Moment der Verlustverteilung existiert.
- (2) Auf dem konzeptionellen Bereich, weil es keinen Unterschied zwischen positiven und negativen Abweichungen vom Mittelwert gibt, ist Varianz eine gute Risikomass nur für die Verteilung, die symmetrisch um den Mittelwert ist, wie die Normalverteilung oder, ganz allgemein, die elliptischen Verteilungen, die in Kapitel 3 besprochen werden.

Expected Shortfall:

Definition 2.15 (Expected Shortfall)

Für einen Verlust L mit $E(|L|) < \infty$ und die Verteilungsfunktion F_L bezeichnet die

Expected Shortfall mit dem Niveau $\alpha \in (0,1)$ und ist definiert als

$$ES_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 q_u(F_L) du, \quad (23)$$

Wobei $q_u(F_L) = F_L^{\leftarrow}(u)$ die Quantilfunktion von F_L bezeichnet.

Expected Shortfall ist in Zusammenhang mit VaR steht, weil

$$ES_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 VaR_u(L) du.$$

Offensichtlich hängt ES_α nur von der Verteilung von L ab und $ES_\alpha \geq VaR_\alpha$.

Lemma 2.16.

Für ein Verlust L mit stetigen Verteilungsfunktion F_L und ein $\alpha \in (0,1)$ haben wir

$$ES_\alpha = \frac{E(L; L \geq q_\alpha(L))}{1-\alpha} = E(L | L \geq VaR_\alpha), \quad (24)$$

wobei $A \in \mathcal{F}$ ist.

Wir haben die Notation $E(X; A) = E(X I_A)$ für eine integrierbare Zufallsvariable X verwendet.

Beweis: Sei U eine Zufallsvariable und auf dem Intervall $[0,1]$ gleichverteilt. Es ist eine wohlbekannt Tatsache, dass die Zufallsvariable $F_L^{\leftarrow}(U)$ Verteilungsfunktion F_L

hat. Wir müssen zeigen, dass $E(L; L \geq q_\alpha(L)) = \int_\alpha^1 F_L^{\leftarrow}(u) du$. Jetzt haben wir

$$E(L; L \geq q_\alpha(L)) = E(F_L^{\leftarrow}(U); F_L^{\leftarrow}(U) \geq F_L^{\leftarrow}(\alpha)) = E(F_L^{\leftarrow}(U); U \geq \alpha)$$

In die letzte Gleichung haben wir die Tatsache benutzt, dass F_L streng wachsend

ist, wenn F_L stetig ist. Dann erhalten wir $E(F_L^{\leftarrow}(U); U \geq \alpha) = \int_{\alpha}^1 F_L^{\leftarrow}(u) du$.

Bemerkung 2.17 Für eine nicht stetige Verlustverteilungsfunktion F_L ist die Gleichung (24) nicht für alle α geeignet, stattdessen haben wir die folgende Gleichung:

$$ES_{\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \left(E(L; L \geq q_{\alpha}) + q_{\alpha} (1 - \alpha - P(L \geq q_{\alpha})) \right) \quad (25)$$

Beispiel 2.18. (Expected shortfall für Gauß-Verlustverteilung). Nehmen wir an, dass die Verlustverteilung F_L normal verteilt ist mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 .

Für $\alpha \in (0, 1)$ fest haben wir

$$ES_{\alpha} = \mu + \sigma \frac{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha} \quad (26)$$

wobei φ die Dichte der Standard-Normalverteilung ist.

Der Beweis ist einfach, zuerst haben wir

$$ES_{\alpha} = \mu + \sigma E \left(\frac{L-\mu}{\sigma} \mid \frac{L-\mu}{\sigma} \geq q_{\alpha} \left(\frac{L-\mu}{\sigma} \right) \right)$$

Daher kann man den Expected Shortfall für $\tilde{L} := (L-\mu)/\sigma$ berechnen. Dann gilt

$$ES_{\alpha}(\tilde{L}) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\Phi^{-1}(\alpha)}^{\infty} l \varphi(l) dl = \frac{1}{1-\alpha} \left[-\varphi(l) \right]_{\Phi^{-1}(\alpha)}^{\infty} = \frac{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}$$

Beispiel 2.19. (Expected Shortfall für t-Verlustverteilung).

Sei L der Verlust bezeichnet, s.d. $\tilde{L} := (L-\mu)/\sigma$ besitzt Standard-t-Verteilung mit

Freiheitsgrad ν . Nehmen wir an, dass $\nu > 1$. Dann aus Beispiel 2.18 haben wir

$ES_{\alpha} = \mu + \sigma ES_{\alpha}(L)$. Expected Shortfall von der Standard-t-Verteilung ist leicht

durch direkte Integration berechnet werden. Es gilt

$$ES_{\alpha}(\tilde{L}) = \frac{g_{\nu}(t_{\nu}^{-1}(\alpha))}{1-\alpha} \left(\frac{\nu + (t_{\nu}^{-1}(\alpha))^2}{\nu-1} \right) \quad (27)$$

wobei t_{ν} die Verteilungsfunktion ist und g_{ν} die Dichte bezeichnet.

Lemma 2.20.

Seien $(L_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen iid mit Verteilungsfunktion F_L , dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^{\lceil n(1-\alpha) \rceil} L_{i,n}}{\lceil n(1-\alpha) \rceil} = ES_{\alpha} \quad (28)$$

Wobei $L_{1,n} \geq \dots \geq L_{n,n}$ Ordnungsstatistiken von L_1, \dots, L_n bezeichnen.

Beispiel 2.21. (VaR und ES für die Aktienerträge). Wir halten tägliche Verluste in einer bestimmten Aktie, der aktuelle Wert entspricht $V_t = 10,000$. Erinnern Sie sich

an Beispiel 2.4, dass der Verlust für dieses Portfolio wird von $L_{t+1} \stackrel{\Delta}{=} -V_t X_{t+1}$

gegeben, wobei X_{t+1} täglich log-Return der Aktie bezeichnet. Wir gehen davon aus,

dass Erwartungswert von X_{t+1} null ist und $\sigma = 0.2/\sqrt{250}$ ist. Wir nehmen an, dass

die Volatilität auf jährlicher Basis der Aktie 20% ist. Wir vergleichen zwei verschiedene Modelle, und zwar (i) eine normalen Verteilung und (ii) eine t-Verteilung mit Freiheitsgrad $\nu = 4$. Sei t-Verteilung eine symmetrische Verteilung, so dass große absoluten Werte mit groß wahrscheinlichkeit als in der normalen

Verteilung auftritt werden. In Tabelle 2.1 stellen wir VaR_{α} und ES_{α} für beide

Verteilung und verschiedene Werte von α .

α	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
VaR_{α} (normal model)	162.1	208.1	247.9	294.3	325.8
VaR_{α} (t model)	137.1	190.7	248.3	335.1	411.8
ES_{α} (normal model)	222.0	260.9	295.7	337.2	365.8
ES_{α} (t model)	223.4	286.3	356.7	465.8	563.5

Die meisten Risikomanager würden behaupten, dass die t-Verteilung riskanter als die Normalverteilung ist, da nach der t-Verteilung große Verluste mit großer Wahrscheinlichkeit auftreten. Wenn wir VaR mit den Niveau 95% oder 97,5% benutzen, um das Risiko zu messen, wird die normale Verteilung auf mindestens so riskant wie das T-Verteilung, nur wenn ein Niveau über 99%, besitzt die t-Verteilung das höhere Risiko.

2.3 Standard-Methoden für Marktrisiken

2.3.1 Varianz-Kovarianz-Methode

Die Risikofaktoränderungen X_{t+1} besitzt eine multivariate Normalverteilung

(entweder unbedingt oder bedingt). D.h. $X_{t+1} \sim N_d(\mu, \Sigma)$, wobei μ die

Erwartungswert ist und Σ Kovarianzmatrix bezeichnet. Wir gehen davon aus, dass der linearer Verlust in Bezug auf die Risikofaktoren eine hinreichend genaue

Annäherung für den tatsächlichen Verlust ist und $L_{t+1}^\Delta = l_{[t]}^\Delta(X_{t+1})$. Der linearer Verlustoperator wird als folgende Funktion betrachtet. D.h.

$$L_{t+1}^\Delta(x) = -(c_t + b_t'x) \quad (29)$$

wobei c_t und b_t Konstant sind.

Eine wichtige Eigenschaft der multivariate Normalverteilung ist, dass die lineare Funktion (29) von X_{t+1} eine univariate Normalverteilung haben muss. Wir haben

$$L_{t+1}^\Delta = l_{[t]}^\Delta(X_{t+1}) \sim N(-c_t - b_t'\mu, b_t'\Sigma b_t) \quad (30)$$

Nachteile der Methode:

Die Varianz-Kovarianz-Methode bietet eine einfache analytische Lösung für die Risikomessung. Diese Bequemlichkeit erreicht durch die folgenden zwei Annahmen:
 (1) Linearisierung kann nicht immer eine gute Annäherung an das Verhältnis zwischen den Verlust und die Veränderungen des Risikofaktors bieten.
 (2) Die Annahme der Normalität ist nicht realistisch für die Verteilung der Risikofaktoränderungen für das tägliche Datum und vielleicht auch für die wöchentlichen und sogar monatlichen Daten.

2.3.2 Historische Simulation

Historische Simulations-Methode kann man sich als Schätzung der Verteilung auf Verlustoperator unter den Werte X_{t-n+1}, \dots, X_t gedacht werden. Unter Anwendung dem Verlustoperator wird diese Methode beschrieben. Wir erhalten eine Folge von historisch simulierten Verluste als $\{\tilde{L}_s = l_{[t]}(X_s) : s = t - n + 1, \dots, t\}$. (32)

Die Werte \tilde{L}_s zeigt, was das aktuelle Portfolio passieren wird, wenn die

Risikofaktoränderung am Tag s auftritt.

Vorteile und Nachteile der Methode:

Die historische Simulations-Methode ist zwar sehr attraktiv: Es ist einfach zu implementieren; keine statistische Schätzung für multivariaten Verteilung von X ist erforderlich; Insbesondere geben wir keine Annahmen über die Abhängigkeit zwischen dem Risikofaktoränderungen.

Aber der Erfolg des Ansatzes hängt von unserer Fähigkeit ab. Wir sollen ausreichende Mengen von relevanten, synchronisiert Daten für alle Risikofaktoren sammeln.

2.3.3 Monte-Carlo-Methode

Die Monte-Carlo-Methode ist ein ziemlich allgemeiner Begriff für alle Annäherung für die Messung des Risikos.

Der erste Schritt des Verfahrens ist die Wahl des Modells und die Kalibrierung des

Modells für historische Risikofaktoränderungen X_{t-n+1}, \dots, X_t . Natürlich sollte es ein

Modell sein, von dem man leicht simulieren kann, da in der zweiten Stufe wir m

unabhängigen Risikofaktoränderungen für die nächste Zeit simulieren, die wir als

$\tilde{X}_{t+1}^{(1)}, \dots, \tilde{X}_{t+1}^{(m)}$ zeichnen.

Nachteile der Methode:

Für großes Portfolio kann der Rechenaufwand der Monte-Carlo-Ansatz erheblich sein, da jeder Simulation der Neubewertung des Portfolios erfordert. Dies ist besonders problematisch, wenn das Portfolio viele Derivate, deren Preisen nicht in geschlossener Form enthält kann.

2.3.4 Verluste über mehrere Perioden und Skalierung

Bisher haben wir Ein-Periode-Verlustverteilung und damit verbundene Risikomassen in Betracht gezogen. Es ist oft der Fall ist, dass wir Maßnahmen, um das Risiko für den Verlustverteilung über mehrere Perioden für Ein-Periode Verlust schließen möchten. Das wird in Kap.4 beschrieben.

Skalierung.

Es wäre schön, wenn wir eine einfache Regeln für die Umwandlung von Ein-Perioden-Risikomassen in h-Perioden Risikomassen ($h > 1$) haben.

wir bezeichnen den Verlust vom Zeitpunkt t in den nächsten h Perioden durch $L_{t+h}^{(h)}$.

Aus Gleichung (1) und (3) haben wir

$$\begin{aligned} L_{t+h}^{(h)} &= -(V_{t+h} - V_t) = -(f(t+h, Z_{t+h}) - f(t, Z_t)) \\ &= -(f(t+h, Z_t + X_{t+1} + \dots + X_{t+h}) - f(t, Z_t)) \\ &=: l_{[t]}^{(h)} \left(\sum_{i=1}^h X_{t+i} \right) \end{aligned}$$

wobei $l_{[t]}^{(h)}$ einen Verlustoperator zum Zeitpunkt t für die h-Perioden-Verlust bedeutet.

Die allgemeine Frage ist, wie das Risikomass für die Verteilung $L_{t+h}^{(h)}$ angewandt wird.

Den H-Perioden Verlustoperator ist verschieden von dem Ein-Periode Verlustoperator in Situationen, in denen die Abbildung explizit von der Zeit abhängt (z.B. Derivate-Portfolios). Zum Beispiel betrachten wir den Fall, die Abbildung nicht auf dem Kalender Zeit abhängt, d.h. $l_{[t]}^{(h)}(X) = l_{[t]}(X)$. Die lineare Form dieser

Operator ist $l_{[t]}^{\Delta}(X) = b_t' X$ für einen Vektor b_t , die zur Zeitpunkt t bekannt ist. Wir

betrachten das einfachere Problem der Skalierung für Risikomassen unter Anwendung der linearen Verlustverteilung. Dann gilt

$$L_{t+h}^{(h)\Delta} = l_{[t]}^{\Delta} \left(\sum_{i=1}^h X_{t+i} \right) = \sum_{i=1}^h b_t' X_{t+i} \quad (33)$$

Das folgende Beispiel zeigt einen besonders einfachen Fall, in dem wir eine sehr einfache Skalierung haben, die als Quadratwurzel der Zeitperiode genommen wird.

Beispiel 2.23. (Quadratwurzel der Zeitperiode).

Nehmen wir an, das Risikofaktoränderungen sind iid mit der Verteilung $N_d(0, \Sigma)$.

Dann gilt $\sum_{i=1}^h X_{t+i} \sim N_d(0, h\Sigma)$ und die Verteilung von $L_{t+h}^{(h)\Delta}$ ist

$$L_{t+h}^{(h)\Delta} \sim N(0, hb_t \Sigma b_t).$$

sei $ES_\alpha^{(h)}$ Expected Shortfall, wir haben

$$ES_\alpha^{(h)} = \sqrt{h}\sigma \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}$$

Wobei $\sigma^2 = b_t \Sigma b_t$, offensichtlich $ES_\alpha^{(h)} = \sqrt{h}ES_\alpha^{(1)}$ und mit ähnlicher Schreibweise,

$$VaR_\alpha^{(h)} = \sqrt{h}VaR_\alpha^{(1)}.$$

2.3.5 Backtesting

Nehmen wir an, dass zum Zeitpunkt t wir Schätzungen für VaR und Expected Shortfall für eine Periode und h-Perioden machen. Wir bezeichnen die reale

Ein-Periode Risikomassen bei VaR_α^t und ES_α^t und die reale h-Perioden Massen bei

$VaR_\alpha^{t,h}$ und $ES_\alpha^{t,h}$. Wir müssen wissen, wie üblich, über die Frage, ob diese Mass für die unbedingte oder bedingte Verlustverteilung benutzt werden kann. Zum Beispiel, in den letzteren Fall verweisen wir

$$VaR_\alpha^{t,h} = F_{L_{t+h}^{(h)}|F_t}^{\leftarrow}(\alpha), ES_\alpha^{t,h} = E\left(L_{t+h}^{(h)} \mid L_{t+h}^{(h)} > VaR_\alpha^{t,h}, F_t\right)$$

Durch der Definition der VaR haben wir, dass $P(L_{t+h} > VaR_\alpha^{t,h}) = 1-\alpha$, so dass die

Wahrscheinlichkeit für eine so genannte Überschreitung der VaR ist gleich $1-\alpha$. In der Praxis ist das Risikomass aus den Daten geschätzt werden und wir vorstellen ein Indikator für Überschreitung der VaR:

$$\widehat{I}_{t+1} := I_{\{L_{t+1} > VaR_\alpha^t\}}, \quad \widehat{I}_{t+h}^{(h)} := I_{\{L_{t+h}^{(h)} > VaR_\alpha^{t,h}\}}, \tag{34}$$

Wir erwarten, dass diese Indikatoren wie Bernoulli Zufallsvariablen mit erfolgreiche

Wahrscheinlichkeit in der Nähe $(1-\alpha)$ verhalten.

2.3.6 Ein anschauliches Beispiel

Wir schließen das Kapitel mit einem Beispiel, dass einige der Ideen, die wir erwähnt haben, wird in Kapitel 3 und 4 dargestellt. Wir betrachten die Anwendung der Methoden aus der allgemeinen Kategorien der Varianz-Kovarianz und historischer Simulations-Methoden für das Portfolio eines Investors in den internationalen

Aktienindizes. Wir nehmen an, der Investor haben Pfund (GBP) und möchte in der Financial Times 100 Aktien Index (FTSE 100), die Standard & Poors 500 (S & P500) und der Swiss Market Index (SMI) investieren. Der Anleger hat somit Währungsrisiko in US-Dollar (USD) und Schweizer Franken (CHF) und der Wert des Portfolios hängt von fünf Risikofaktoren ab (drei Log-Index-Werte und zwei log-Wechselkurse). Die entsprechenden Risikofaktoren Rückkehr in dem Zeitraum 1992 bis 2003 sind in Bild 2.2 gezeigt.

An dem Tag t setzen wir den Gesamtwert der Portfolio V_t in Pfund um und die

Gewichte des Protfolios (FTSE100, S & P500 und SMI) sind 30%, 40% und 30%. Mit einem ähnlichen Grund zum Beispiel 2.4 erhalten wir den Verlustoperator

$$l_{[t]}(X) = 1 - (0.3e^{x_1} + 0.4e^{x_2+x_4} + 0.3e^{x_3+x_5})$$

$$\text{Und } l_{[t]}^{\Delta}(X) = -(0.3x_1 + 0.4(x_2 + x_4) + 0.3(x_3 + x_5)),$$

wobei x_1 , x_2 und x_3 log-Return für den drei Indizes bezeichnen und x_4 und x_5

log-Return für GBP / USD und GBP / CHF Wechselkurse bezeichnen.

Unser Ziel ist, VaR mit Niveau 95% und 99% für alle Arbeitstage in den Jahren 1996 bis 2003 zu berechnen. Wir betrachten den Ferien in einzelnen Märkten, so erhalten rund 260 Tagen Risikofaktorserträge in jedem Jahr.

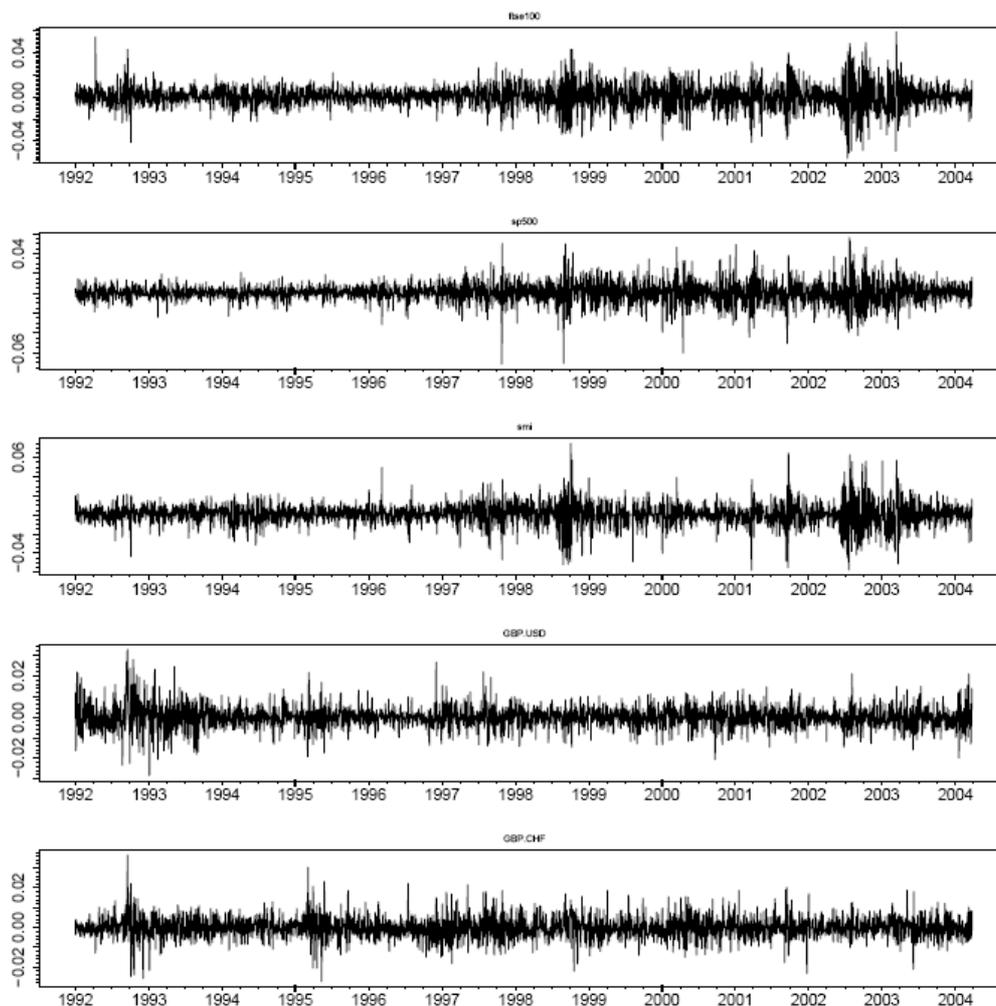


Bild 2.2: Zeitreihe der Risikofaktoränderungen. Diese sind die Log-Return von (a)FTSE100, (b)S & P500 und(c) SMI-Indizes sowie Log-Return für (d) GBP / USD und (e)GBP / CHF-Wechselkurs in dem Zeitraum 1992 bis 2003.

Wir nutzen die letzten 1000 historischen Daten X_{t-999}, \dots, X_t für alle VaR für Tag

$t+1$ mit der folgenden Methoden zu bestimmen:

VC. Standard unbedingte Varianz-Kovarianz-Methode mit multivariaten Gaußschen Risikofaktoränderungen.

HS. Standard unbedingte historische Simulations-Methode.

VC-t. Eine unbedingte Varianz-Kovarianz-Methode, bei dem eine multivariate t -Verteilung ist für der Risikofaktoränderungen geeignet.(siehe Kap 3)

VC-MGARCH. Eine bedingte Version der Varianz-Kovarianz-Methode, bei dem eine multivariate GARCH-Modell mit multivariate normale Innovationen wird verwendet, um die bedingte Kovarianzmatrix des Risikos für der Risikofaktoränderungen am nächsten Tag zu schätzen. (siehe Kap 4)

VC-EWMA. Eine ähnliche Methode wie VC-MGARCH, aber eine mehrdimensionale Version der EWMA Methode wird verwendet, um die bedingte Kovarianzmatrix für die Risikofaktoränderungen am nächsten Tag zu schätzen.

HS-CONDEVT. Eine bedingte Methode unter Verwendung der Kombination von GARCH-Modell und EVT (extreme Wert-Theorie). (siehe Kap 7)

Year	96	97	98	99	00	01	02	03	error
Trading days	261	260	259	260	259	260	260	260	
Results for 95% VaR									
Exp. violations	13	13	13	13	13	13	13	13	
VC	13	30	29	15	13	20	27	6	7.88
HS	14	30	31	16	14	20	26	8	8.12
VC-t	14	32	35	19	16	23	29	8	10.25
HS-GARCH	15	17	15	15	14	21	19	11	3.38
VC-MGARCH	16	19	19	15	15	21	21	12	4.50
HS-EWMA	16	14	15	15	17	23	18	11	3.62
VC-EWMA	15	13	15	14	18	22	17	9	3.38
HS-GARCH-t	16	18	16	15	15	21	19	12	3.75
VC-MGARCH-t	18	19	19	17	16	23	21	11	5.50
HS-CONDEVT	14	16	15	15	14	18	18	10	2.75
Results for 99% VaR									
Exp. violations	2.6	2.6	2.6	2.6	2.6	2.6	2.6	2.6	
VC	5	11	20	5	2	6	12	2	5.58
HS	3	10	13	3	2	3	7	1	3.20
VC-t	3	11	15	4	2	4	9	1	4.08
HS-GARCH	10	7	7	6	5	4	5	3	3.27
VC-MGARCH	8	8	7	6	3	5	7	4	3.40
HS-EWMA	9	5	6	6	6	6	3	2	2.92
VC-EWMA	9	5	6	6	5	5	3	3	2.65
HS-GARCH-t	7	5	5	5	4	3	4	2	1.93
VC-MGARCH-t	7	5	6	4	2	1	4	1	2.10
HS-CONDEVT	5	4	5	5	2	2	3	2	1.35

Aus den Ergebnissen in Tabelle 2.2 schließen wir, dass die drei unbedingte Methoden (VC, HS- und VC-t) sind in der Regel von die bedingte Methoden übertroffen. Aber in den Jahren 1997, 1998 und 2002 sind Überschreitungen schlecht durch die unbedingten Methoden behandelt und führen zu vieler Überschreitungen von VaR mit dem Niveau 95% und 99%. Die historische Simulation ist in Varianz-Kovarianz auf dem 99%-Niveau bevorzugt, aber es gibt eine schwache Leistung auf dem 95%-Niveau. Es gibt eine Verbesserung auf den 99%-Niveau unter die bedingungslose Varianz-Kovarianz-Methode für eine multivariate t-Verteilung, aber tatsächlich macht alles schlimmer auf dem 95%-Niveau.

Die beste Methode ist HS-CONDEVT, die mit dem Extremwert Theorie und GARCH-Modell kombiniert.

In dem Bild 2.3 haben wir nur die Jahre 2002 betrachtet und zeigt die tatsächlichen Verluste zusammen mit Risikomaßen und Überschreitung für die gegebene zwei Methoden: HS und HS-GARCH-t. In diesem Jahr war die standard historische Simulations-Methode nicht gut. Es gibt 26 Überschreitungen von der 95%-VaR und 7 Überschreitungen von der 99%-VaR, oder etwa doppelt so viele wie zu erwarten wäre. Das HS-GARCH-t-Methode ist in der Lage, sich den Veränderungen der Überschreitungen des gesamten Jahres 2002 zu reagieren und es gibt 19 und 4 Überschreitungen; das ist mehr als erwartet bei der 95%-Niveau, aber ist eine gute Leistung auf dem 99%-Niveau.

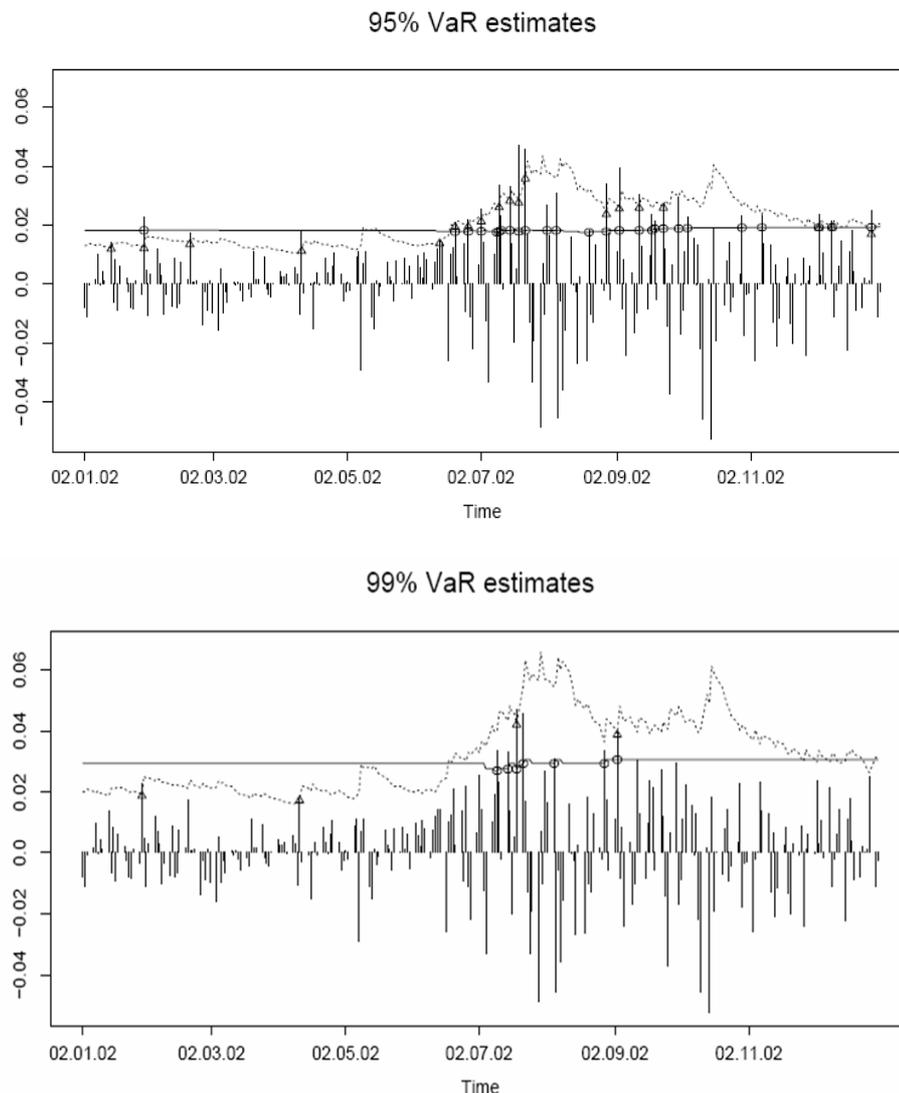


Bild.2.3 Täglicher Verlust im Jahre 2002 mit Risikomassen ((a).95%-VaR,(b).99%-VaR) und auch Überschreitungen für die Methode HS und HS-GARCH-t. HS VaR ist durch eine durchgezogene Linie bezeichnet und Überschreitungen sind durch Kreise bezeichnet; HS-GARCH-t ist durch eine gestrichelte Linie mit Dreiecken bezeichnet.