Seminar
"Quantitatives Risikomanagement"

Kreditrisikomanagement I

Tina Ruess

Mathematisches Institut
der
Universität zu Köln

Wintersemester 2009
Betreuung: Prof. Schmidli, J. Eisenberg

Contents

Chapter 1

Kredit-Risiko Management

1.1 Einführung zur Modellierung von Kredit-Risiken

Kredit-Risiko ist das Risiko, dass sich der Wert eines Portfolios ändert aufgrund von unerwarteten Veränderungen in der Kreditwürdigkeit bzw. Bonität von Emittenten oder Handelspartnern.

Es zählen somit hierzu:

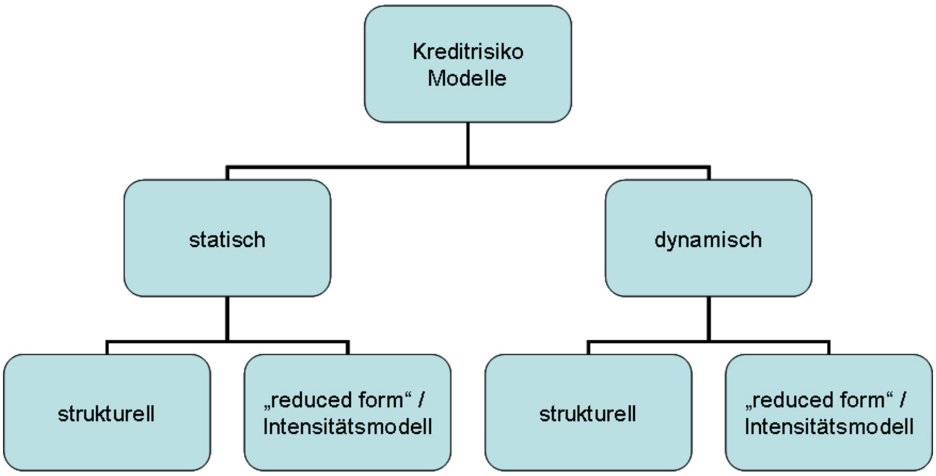
- Verluste durch Zahlungsausfälle
- Verluste verursacht durch Bonitätsänderung

Kredit-Risiko finden wir vor allem in Finanzinstitutionen, aber auch in vielen anderen Bereichern der Wirtschaft. Sobald es sich um Zahlungsverpflichtungen zwischen zwei Vertragsparteien handelt, kann das Kredit-Risiko eine Rolle spielen. Einmal auf der Kreditgeber- und einmal auf der Kreditnehmerseite. Somit besteht ein großes Interesse an der Quantifizierung der Kredit-Risiken:

- Der Fortschritt der Kredit Derivate ist enorm, d.h. die Möglichkeiten sind größer geworden ein Kredit-Risiko-Portfolio abzusichern, oder auch Risiken weiter zu verkaufen.
- Basel II, gesetzliche Vorschriften, die an die Höhe des Eigenkapitals von Finanzinstituten gewisse Mindestanforderungen stellen. Diese sind direkt abhängig von der Struktur des bestehenden Kreditportfolios.

1.1.1 Kredit-Risiko Modelle

Für die Modellierung von Kreditrisiken gibt es verschiedene Grundtypen. Diese lassen sich folgendermaßen unterscheiden:



Zwei Haupteinsatzgebieten finden wir für quantitative Kreditrisiko-Modelle, nämlich das Kreditrisikomanagement und die Bewertung von Kredit-Risiko behafteten Wertpapieren.

1. Kreditrisikomanagement
   Zur Bestimmung der Verlustverteilung eines Kredit- bzw. Anleihen-Portfolios werden vorwiegend statische Modelle genutzt.

   Hierbei ist der Betrachtungszeitraum im Voraus festgelegt und beträgt meistens ein Jahr.

2. Analyse von mit Kredit-Risiko behafteten Wertpapieren
   Hier werden dynamische Modelle genutzt, da das Auszahlungsprofil der meisten Produkte von dem exakten Ausfallzeitpunkt abhängt.

Zudem können wir Kredit-Risiko-Modelle nach der Art des zugrunde liegenden Mechanismus unterscheiden: Es gibt strukturelle und Intensitäts-Modelle.

1. "Strukturelle Modelle"
   Diese Modelle setzen einen Mechanismus für den Zahlungsausfall voraus. Ein Ausfall tritt in diesem Firmen-Wert-Modell genau dann auf, wenn eine stochastische Variable, die im Allgemeinen den Vermögenswert einer Firma

repräsentiert, unter eine Schranke fällt, die die Höhe der Verbindlichkeiten darstellt.

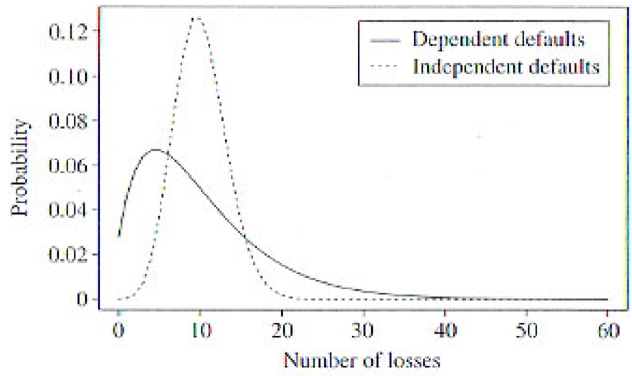
2. "Intensitätsmodelle"
   In diesen Modellen wird der exakte Mechanismus, welcher zum Ausfall führt, nicht im Detail spezifiziert. Der Zeitpunkt des Ausfalls wird modelliert als eine nicht-negative Zufallsvariable. Deren Verteilung hängt typischerweise von ökonomischen Faktoren ab.

In diesem Vortrag widmen wir uns den statischen Modelle, also dem Kreditrisikomanagement. Zu erst werden wir die strukturellen Modelle in Bezug auf eine einzelne Firma betrachten. Diese werden bezeichnet als Firmen-Wert-Modelle. Betrachten wir die gleichen Modelle auf Portfolio-Ebene, so werden wir diese Schrankenmodelle nennen.

1.1.2 Die verschiedenen Herausforderung

Einem Modell sind grundsätzlich Grenzen gesetzt, wenn es um die Beschreibung der Wirklichkeit geht. Folgende drei Punkte sind beachtenswert in Bezug auf die Modellierung von Kredit-Risiko Modellen.

- Fehlende öffentliche Daten und Informationen bzgl. der Kreditwürdigkeit von Firmen. Diese Informations-Asymmetrie (zwischen Management einer Firma und der breiten Öffentlichkeit) stellt eine der Hauptproblematiken dar, ein Kredit-Risiko-Modell richtig zu kalibrieren.
- Schiefe Kredit-Verlust Verteilungen. Diese weisen meist eine starke Flanke auf. Ein typisches Kreditportfolio erwirtschaftet viele kleine Gewinne, muss aber gelegentlich hohe Verluste hinnehmen. (Das 99,97% Quantil dient als Grundlage für die Risiko-Kapital Unterlegung durch Eigenkapital.)
- Die Rolle der Modellierung von Abhängigkeiten innerhalb eines Kredit- oder Anleihen Portfolios der verschiedenen Vertragsparteien untereinander.



1.2 Strukturelle Ausfallmodelle

Ein Ausfallmodell zählt zu diesen Modellen, wenn es versucht den Mechanismus zu erklären, durch welchen der Ausfall zustande kommt.

(X_t) := gewöhnlicher stochastischer Prozess in stetiger Zeit.
X_t := Zufalls-Variable, die den Wert des Prozesses zum Zeitpunkt $t \geq 0$ repräsentiert

1.2.1 Das Merton Modell

Dies ist der Urvater aller Firmen-Wert-Modelle.

Die Finanzierung der Firma, die betrachtet wird, erfolgt durch Eigen- und Fremdkapital. In diesem Modell hat das Fremdkapital eine sehr einfache Struktur, d.h. es gibt nur eine einzige Schuldverpflichtung in Form einer Null-Coupon Anleihe (Zero-Coupon Bond) mit folgenden Ausstattungsmerkmalen:
B := Nennwert der Anleihe
T := Fälligkeitszeitpunkt der Anleihe

Für die Finanzierungsstruktur gelten folgende Variablen:
S_t := Wert des Eigenkapital zum Zeitpunkt t
B_t := Wert der des Fremdkapitals zum Zeitpunkt t

Annahmen für dieses Modell:

- Ein reibungsfreier Markt, d.h. es entstehen keine Steuern oder Transaktionskosten.
- Die Firma zahlt keine Dividenden aus und nimmt keine neuen Schulden auf.

Das Vermögen der Firma ist die Summe aus deren Eigen- und Fremdkapital:

$$V_t = B_t + S_t \quad \text{für} \quad 0 \leq t \leq T$$

(V_t) := stochastischer Prozess für den Vermögenswert einer Firma

Ein Ausfall tritt dann auf, wenn die Firma einer Zahlungsverpflichtung nicht nachkommt. Dies kann in diesem Modell erst zum Fälligkeitszeitpunkt T der Anleihe passieren. (Eine Eigenschaft, die die statischen Modelle kennzeichnet.)

Zu diesem Zeitpunkt unterscheiden wir zwei Fälle:

1. Der ideale Fall: $V_T > B$

   Das Vermögen des Unternehmens übersteigt die Verbindlichkeiten.

   In diesem Fall erhalten die Gläubiger den Betrag B, die Aktionäre erhalten den verbleibenden Restwert:

   $S_T = V_T - B \quad \text{und} \quad B_T = B$

2. Der ungünstigere Fall: $V_T < B$

   Die Verbindlichkeiten übersteigen das Vermögen des Unternehmens und somit können die Zahlungsverpflichtungen nicht vollständig erfüllt werden.

   In diesem Fall erhalten die Inhaber der Firma nichts und die Gläubiger erhalten den verbleibenden Vermögenswert:

   $S_T = 0 \quad \text{und} \quad B_T = V_T$

Zusammengefasst haben wir folgende Relationen:

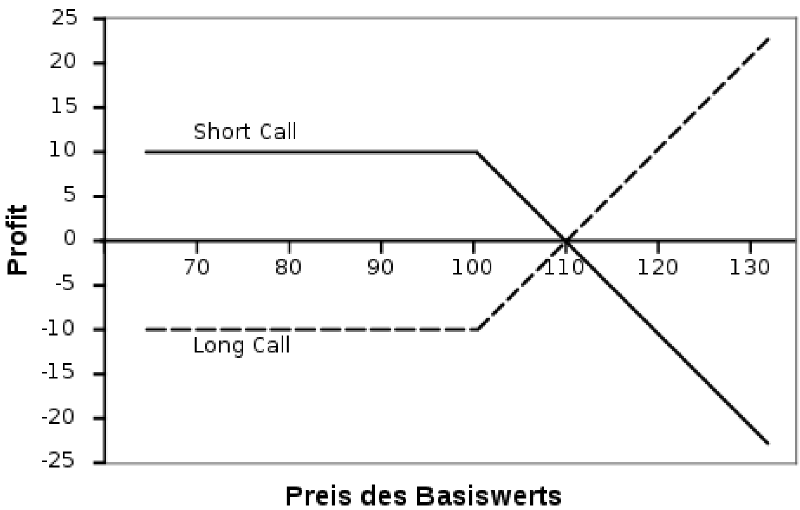
$$S_T = \max\{V_T - B, 0\} = (V_T - B)^+ \tag{1.1}$$

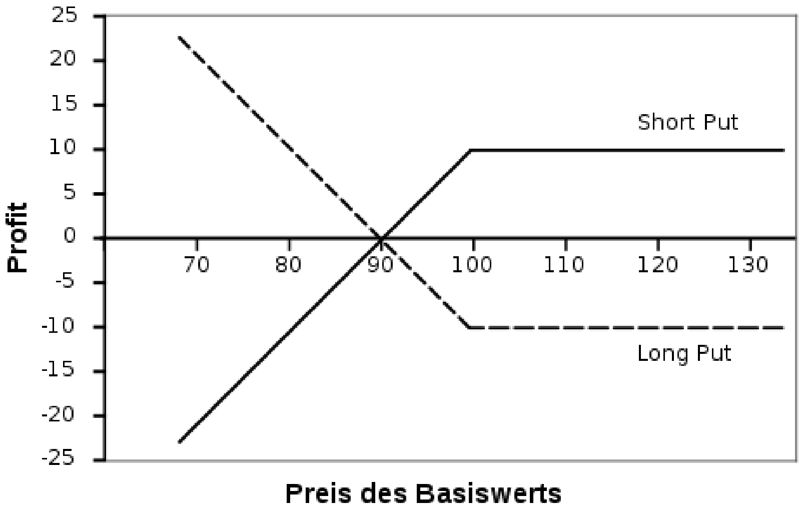
$$B_T = \min\{V_T, B\} = B - (B - V_T)^+ \tag{1.2}$$

Europäische Option: Das Ausübungsrecht gilt nur am Fälligkeitszeitpunkt.

Call-Option: Das Recht einen Basiswertpapier zu einem im Voraus bestimmten Preis zu erwerben. Gemäß (**??**) entspricht S_T dem Auszahlungsprofil einer gekauften europäischen Call Option auf den Basiswert (V_t) mit Ausübungspreis B zum Fälligkeitszeitpunkt T.

Put-Option: Das Recht einen Basiswertpapier zu einem im Voraus bestimmten Preis zu verkaufen. Gemäß (**??**) entspricht B_T dem Nennwert des Fremdkapitals abzüglich dem Auszahlungsprofils einer verkauften europäischen Put Option auf den Basiswert (V_t) mit Ausübungspreis B zum Fälligkeitszeitpunkt T.





Interpretation der Auszahlungs-Werte als Werte der Optionen

- Diese Interpretation ist sehr nützlich, um potentielle Interessenkonflikte zwischen Eigenkapitalgebern, (Aktionären) und Fremdkapitalgebern (Gläubiger) zu erklären.

- Der Wert einer Call Option erhöht sich mit zunehmender Volatilität des Basiswerts, vorausgesetzt, dass der Erwartungswert nicht entgegengesetzt beeinflusst wird. Somit haben Aktionäre ein Interesse an der Übernahme von risikoreichen Projekten.

- Gläubiger, auf der anderen Seite, welche die short-Position einer Put-Option auf den Vermögenswert der Firma einnehmen, würden dagegen gerne die Volatilität des Vermögenswertes reduziert sehen.

Da es für die Preisbestimmung von Optionen das **Black Scholes** Modell gibt, werden wir dies für das Merton Modell nutzen. Wir nehmen an, dass der Prozess (V_t) unter dem reellen Wahrscheinlichkeits-Maß P einer geometrischen Brownschen Bewegung folgt:

$$\mathrm{d}V_t = \mu_V \cdot V_t \mathrm{d}t + \sigma_V \cdot V_t \mathrm{d}W_t \tag{1.3}$$

für Konstanten $\mu_V \in \mathbb{R}$, $\sigma_V > 0$ und einer Standard Brownschen Bewegung (W_t).

Somit ist folgende Gleichung für V_T gegeben:

$$V_T = V_0 \cdot \exp\Big((\mu_V - \tfrac{1}{2}\sigma_V^2) \cdot T + \sigma_V \cdot W_T\Big)$$

$$\ln V_T \sim N(\ln V_0 + (\mu_V - \frac{1}{2} \cdot \sigma_V^2) \cdot T, \sigma_V^2 \cdot T)$$

Unter der Dynamik von (**??**) ist die Ausfallwahrscheinlichkeit unserer Firma vollständig berechnet. Es gilt:

$$P(V_T \leq B) = P(\ln V_T \leq \ln B) = \Phi\left(\frac{\ln(B/V_0) - (\mu_V - \frac{1}{2} \cdot \sigma_V^2) \cdot T}{\sigma_V \cdot \sqrt{T}}\right) \tag{1.4}$$

Man sieht aus dieser Gleichung,

- dass die Ausfall-Wahrscheinlichkeit zunimmt, wenn B sich erhöht,
- dass die Ausfall-Wahrscheinlichkeit abnimmt, wenn V_0 und μ_V zunehmen.
- Und für $V_0 > B$, nimmt die Ausfall-Wahrscheinlichkeit zu, wenn σ_V steigt.

Alle diese Feststellungen stimmen mit ökonomischen Beobachtungen überein.

1.2.2 Bewertung in einem Merton Modell

Voraussetzungen für diese Modelle

1. Es liegt ein reibungsfreier Markt mit kontinuierlichem Handel vor
2. Der risikofreie Zinssatz $r \geq 0$ ist deterministisch gegeben.
3. Der Prozess des Vermögenswertes (V_t) ist unabhängig von der Finanzierungsstruktur einer Firma und somit auch unabhängig von deren Verschuldungsgrad. (V_t) wird angesehen als ein gehandeltes Wertpapier mit der Dynamik aus (**??**).

Der Wert des Eigenkapitals:

Hierbei wird der Black-Scholes Preis C^{BS} eines europäischen Calls ermittelt:

$$S_t = C^{BS}(t, V_t; r, \sigma_V, B, T) \coloneqq V_t \cdot \Phi(d_{t,1}) - B \cdot e^{(-r\cdot(T-t))} \cdot \Phi(d_{t,2})$$

$$\text{mit} \quad d_{t,1} = \frac{\ln V_t - \ln B + (r + \frac{1}{2}\sigma_V^2)(T-t)}{\sigma_V \sqrt{T-t}} \quad \text{und} \quad d_{t,2} = d_{t,1} - \sigma_V \sqrt{T-t} \tag{1.5}$$

Der Wert des Fremdkapitals:

Durch unsere Annahme gilt, dass der Wert einer Null-Coupon Anleihe mit Fälligkeitspunkt T zum Zeitpunkt $t \leq T$ diesen Wert annimmt:

$$p_0(t, T) = \exp(-r \cdot (T-t))$$

Hierbei wird der Black-Scholes Preis P^{BS} einer europäischen Put-Option ermittelt. Nach (**??**) gilt:

$$B_t = B \cdot p_0(t, T) - P^{BS}(t, V_t; r, \sigma_V, B, T) \tag{1.6}$$

Es gilt:

$$P^{BS}(t, V_t; r, \sigma_V, B, T) = B \cdot e^{(-r\cdot(T-t))} \cdot \Phi(-d_{t,2}) - V_t \cdot \Phi(-d_{t,1}) \tag{1.7}$$

mit $d_{t,1}$ und $d_{t,2}$ aus (**??**).
Durch (**??**) und (**??**) ergibt sich:

$$B_t = p_0(t, T) \cdot B \cdot \Phi(d_{t,2}) + V_t \cdot \Phi(d_{t,1}) \tag{1.8}$$

Der *Credit-Spread* $c(t, T)$ ist ein Risiko-Zuschlag, der den Wertunterschied zwischen einer Ausfall-Risikofreien Null-Coupon Anleihe $p_0(t, T)$ und einer Ausfall-Risikobehafteten Anleihe $p_1(t, T)$ ausgleicht.
Es gilt im Merton Modell: $p_1(t, T) = B_t/B$

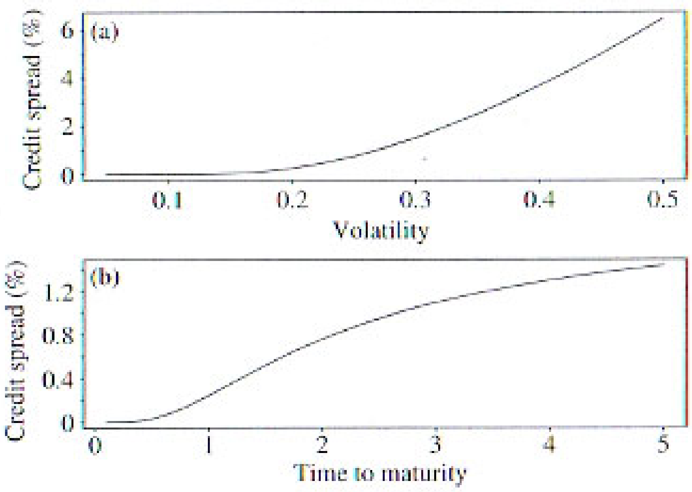
$$c(t, T) = \frac{-1}{T-t} \cdot (\ln p_1(t, T) - \ln p_0(t, T)) = \frac{-1}{T-t} \cdot \ln\frac{p_1(t, T)}{p_0(t, T)} \tag{1.9}$$

$$c(t,T) = \frac{-1}{T-t}\ln\left(\Phi(d_{t,2}) + \frac{V_t}{B \cdot p_0(t,T)} \cdot \Phi(-d_{t,1})\right) \tag{1.10}$$

Da $d_{t,1}$ (und analog $d_{t,2}$) umgeschrieben werden kann zu:

$$d_{t,1} = \frac{-\ln(B \cdot p_0(t,T)/V_t) + \frac{1}{2} \cdot \sigma_V^2 \cdot (T-t)}{\sigma_V \cdot \sqrt{T-t}}$$

sehen wir, dass der Credit-Spread für einen festen Zeitraum bis zur Fälligkeit nur von der Volatilität σ_V und dem Verhältnis $(B \cdot p_0(t,T)/V_t)$ abhängt. Das letztere ist das Verhältnis des Barwertes des Fremdkapitals zu dem Vermögenswert der Firma. Dieses gibt den Verschuldungsgrad des Unternehmens an. Der Credit-Spread erhöht sich mit steigender Volatilität.



1.2.3 Das KMV Modell

Mehr als 40 der 50 größten Finanzinstutionen auf der Welt nutzen dieses Modell. Das Modell ist entwickelt und benannt worden nach einem Privatunternehmen, das die Initialien seiner Gründerväter: Kealhofer, McQuown und Vasicek trägt. Heutzutage wird dieses Modell von Moody's KMV vertrieben. Der Hauptbeitrag wird durch empirische Tests und entsprechende Implementationen geleistet, die auf einem enormen Datenbestand beruhen, den Moody's KMV sein Eigen nennen kann.

Die Schlüsselgröße in diesem Modell ist die "Expected default frequency" (EDF). Dies ist die Wahrscheinlichkeit (unter dem reellen Wahrscheinlichkeitsmaß P), dass eine Firma innerhalb eines Jahres einen Ausfall aufweist.
Für die Ausfall-Wahrscheinlichkeit im Merton Modell gilt:

$$EDF_{MERTON} = 1 - \Phi\left(\frac{\ln V_0 - \ln B + (\mu_V - \frac{1}{2} \cdot \sigma_V^2) \cdot T}{\sigma_V}\right) \tag{1.11}$$

Hierbei nutzen wir aus, dass die Gleichung (**??**), $\Phi(d) = 1 - \Phi(-d)$ und $T = 1$ gilt.

Überführung in die Ausfall-Wahrscheinlichkeit im KMV Modell:

- $(1 - \phi)$ wird ersetzt durch eine fallende Funktion, die von Moody's KMV empirisch geschätzt wird.

- B wird ersetzt durch eine neue Ausfallschranke $\tilde{B}$, welche die Fremdkapitalstruktur der Firma besser repräsentiert. (Meist wird die Höhe der Verbindlichkeiten mit Restlaufzeit von einem Jahr genutzt.)

- das Argument der Normal Verteilung in (**??**) wird ersetzt durch einen einfacheren Ausdruck.

Bestimmung der Vermögenswerte:
Grundsätzlich wird in Firmen-Wert-Modellen der Marktwert des Vermögens einer Firma zu Grunde gelegt. Jedoch ist der Marktwert meist nicht vollständig beobachtbar.
Somit erfolgt im KMV Modell die Bestimmung des Vermögenswertes V_0 durch einen indirekten Ansatz. Dieser wird abgeleitet von dem einfacher zu beobachtenden Wert des Eigenkapitals S_0.

Kalkulation der Ausfall-Wahrscheinlichkeit
Durch die Annahme der logarithmisch Normal verteilten Vermögenswerte erhalten wir die Ausfall-Wahrscheinlichkeit aus (**??**). Diese Verbindung zwischen den Vermögenswerten und der Ausfall-Wahrscheinlichkeit ist jedoch für eine akkurate Beschreibung der Wirklichkeit zu einfach.

Kritikpunkte:

- Vermögenswerte sind nicht unbedingt logarithmisch Normal verteilt. Es könnte eine Verteilung mit einer stärkeren Flanke vorliegen.
- Die Annahmen über die Kapitalstruktur der Firma sind zu einfach.
- Evtl. sind Zahlungen unterjährig fällig, d.h. der Ausfall kann auch zu anderen Zeitpunkten stattfinden.
- Unter heutigen Richtlinien bedeutet ein Zahlungsausfall noch nicht zwangsläufig die Insolvenz einer Firma.

Um diese Kritikpunkte zu berücksichtigen, führt KMV als einen Zwischenschritt bei der Berechnung der Ausfall-Wahrscheinlichkeit die Variable "distance to default" (DD) ein. Diese beschreibt den Abstand bis zum Ausfall.

$$DD := \frac{(V_0 - \tilde{B})}{(\sigma_V \cdot V_0)} \tag{1.12}$$

Durch Auswertungen von empirischen Daten weisen Firmen mit gleichem Abstand zum Ausfall (DD) die gleiche Ausfall-Wahrscheinlichkeit (EDF) auf.

Somit schätzt Moody's KMV mit Hilfe ihrer enormen Datenbasis für jeden Zeithorizont und für einen bestimmten festgelegten Bereich des Abstands zum Ausfall, den Anteil der Firmen, die einem Ausfall unterliegen werden. Das stellt die empirisch geschätzte Ausfall-Wahrscheinlichkeit (EDF_{MERTON}) dar. Die exakte Formel obliegt Moody's KMV.

1.2.4 Modelle auf Kredit-Migration basierend

Dies ist eine weitere Modellart innerhalb der strukturellen Modelle. Die Ausfall-Wahrscheinlichkeit einer Firma wird bestimmt durch eine Analyse der Kredit-Migration, d.h. Bonitätsänderung.

Das Standard Modell dieser Kategorie in der Industrie ist das CreditMetrics Modell, welches von JP Morgen und von der RiskMetrics Group entwickelt wurde.

Grundidee eines solchen Modells:

Jeder Firma wird eine Rating Kategorie zugeordnet. Es gibt nur eine endliche Anzahl von Rating Kategorien, welche die Bonität bzw. Kreditwürdigkeit einer Firma darstellen. Für den Ausfall gibt eine separate Kategorie.
Die Übergangswahrscheinlichkeit, d.h. die Wahrscheinlichkeit von einem Rating, innerhalb eines bestimmten vorgegebenen Zeitraumes (meist ein Jahr), einem anderen Rating zugeordnet zu werden, wird durch historische Daten errechnet.
Kreditratings für große Firmen and Übergangs-Matrizen werden von Ratingagenturen wie z.B. Moody's oder Standard & Poor's (S&P) bereitgestellt.

Table 8.2. Probabilities of migrating from one rating quality to another within one year. Source: Standard & Poor's CreditWeek (15 April 1996).

Initial rating	Rating at year-end (%)							
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default
AAA	90.81	8.33	0.68	0.06	0.12	0.00	0.00	0.00
AA	0.70	90.65	7.79	0.64	0.06	0.14	0.02	0.00
A	0.09	2.27	91.05	5.52	0.74	0.26	0.01	0.06
BBB	0.02	0.33	5.95	86.93	5.30	1.17	1.12	0.18
BB	0.03	0.14	0.67	7.73	80.53	8.84	1.00	1.06
B	0.00	0.11	0.24	0.43	6.48	83.46	4.07	5.20
CCC	0.22	0.00	0.22	1.30	2.38	11.24	64.86	19.79

In diesem Ansatz wird angenommen, dass durch die Einteilung in eine Rating Kategorie die Ausfallwahrscheinlichkeit einer Firma vollständig bestimmt ist. Somit kann diese aus der Matrix direkt abgelesen werden.

Empirische bestimmte Ausfall-Raten variieren im Allgemeinen mit der konjunkturellen Lage. In Zeiten des wirtschaftlichen Aufschwungs sind diese niedriger, in Zeiten der Rezession höher. Aus diesem Grund werden für Übergangsmatrizen, wie von S&P und Moody's erstellt werden, historische Durchschnittswerte gebildet. Hierdurch können sie Firmen ein Rating unabhängig von den Konjunkturzyklen zuordnen.

Das MKV Modell im Vergleich zu den Rating basierten Modellen:

- Das KMV Modell spiegelt die aktuellen wirtschaftlichen Geschäftsaussichten einer Firma sehr gut wieder. Der EDF reagiert schnell auf diese Veränderungen, so dass diese eine Verschlechterung in der Bonität schneller aufdeckt, als dies die Rating basierten Modelle tun können.

- Das KMV Modell berücksichtigt das aktuelle ökonomische Umfeld bei der Bewertung des Kreditrisiko einer Firma. Somit trifft dieses Modell über kurze Zeithorizonte bessere Prognosen für die Ausfall-Wahrscheinlichkeit einer Firma.

- Das KMV Modell reagiert sehr sensitiv auf Marktveränderungen, also auf Über- und Unterreaktionen des Marktes. Zum Beispiel kann das Platzen einer Aktienblase zu einer Erhöhung der Ausfall-Wahrscheinlichkeit einer Firma führen, obwohl sich die Geschäftsaussichten der Firma nur unwesentlich geändert haben.

- Das KMV Modell kann nur auf Firmen angewendet werden, deren Anteile öffentlich gehandelt werden.

Einbettung des auf Kredit-Migration basierenden Modells in ein Firmen-Wert Modell, wie wir es bisher kennengelernt haben.
Für eine Firma mit zugehöriger Rating Kategorie zu Beginn der Zeitperiode $[0, T]$ gibt es die Übergangswahrscheinlichkeiten $\bar{p}(j)$, $0 \leq j \leq n$. Diese geben an, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Firma zum Zeitpunkt T der Rating Kategorie j zugeordnet sein wird. $\bar{p}(0)$ bedeutet die Ausfallwahrscheinlichkeit der Firma.

Vorausgesetzt der Prozess des Vermögenswerts folgt der Gleichung (**??**), dann folgt V_T der logarithmischen Normal Verteilung:

$$V_T = V_0 \cdot \exp\left((\mu_V - \frac{1}{2}\sigma_V^2) \cdot T + \sigma_V \cdot W_T\right) \tag{1.13}$$

Wir können folgende Schranken so wählen,

$$-\infty = \tilde{d}_0 < \tilde{d}_1 < ... < \tilde{d}_n < \tilde{d}_{n+1} = \infty \tag{1.14}$$

dass folgende Gleichung gilt: $P(\tilde{d}_j < V_T \leq \tilde{d}_{j+1}) = \bar{p}(j)$ für $j \in \{0, ..., n\}$

Somit haben wir die Übergangsmatrix in eine Folge von Schranken übertragen, wobei die Schranke $\tilde{d}_1$ die Schranke für einen Ausfall darstellt.

Für das Firmen-Wert-Modell, in welches wir das Migrations-Modell eingebettet haben, kann zusammengefasst werden: Die Firma gehört zum Rating j zum Zeitpunkt T, wenn gilt: $\tilde{d}_j < V_T \leq \tilde{d}_{j+1}$.

Die Übergangswahrscheinlichkeit in einem Firmen-Wert-Modell ist invariant unter gleichzeitiger Transformation des Vermögenswertes V_T und der Grenzen $\tilde{d}_j$.
Somit können wir auch sagen, dass die Firma zum Zeitpunkt T das Rating j erhält, wenn gilt: $d_j < X_T \leq d_{j+1}$.
Die Größen X_T und d_j wurden hierfür folgendermaßen definiert:

$$X_T := \frac{\ln V_T - \ln V_0 - (\mu_V - \frac{1}{2} \cdot \sigma_V^2) \cdot T}{\sigma_V \cdot \sqrt{T}} \tag{1.15}$$

$$d_j := \frac{\ln \tilde{d}_j - \ln V_0 - (\mu_V - \frac{1}{2} \cdot \sigma_V^2) \cdot T}{\sigma_V \cdot \sqrt{T}} \tag{1.16}$$

X_T ist die standardisierte Version der logarithmischen Vermögenswert-Returnwerte $(\ln V_T - \ln V_0)$. Zudem gilt, dass $X_T = \frac{W_T}{\sqrt{T}}$. Somit ist X_T Standard Normal verteilt.

1.2.5 Mehrdimensionale Firmen-Wert-Modelle

Bisher haben wir diese Modelle nur auf einzelne Firmen angewendet. Möchten wir diese auf Portfolios übertragen, benötigen wir eine mehrdimensionale Version des Merton Modells.

Wir nehmen nun an, dass unser Portfolio aus m Firmen besteht und dass der mehrdimensionale Prozess des Vermögenswerts $(\boldsymbol{V}_t)$ mit $\boldsymbol{V_t} = (V_{t,1}, ..., V_{t,m})'$ einer m-dimensionalen geometrischen Brownschen Bewegung folgt. Mit dem Drift-Vektor $\boldsymbol{\mu}_V = (\mu_{V1}, ..., \mu_{Vm})'$, dem Vektor der Volatilitäten $\boldsymbol{\sigma}_V = (\sigma_{V1}, ..., \sigma_{Vm})'$ und der

Korrelationsmatrix P.

Das bedeutet, dass für alle i der Vermögenswert $V_{T,i}$ von der Form (**??**) ist, wobei $\mu_V = \mu_{Vi}, \quad \sigma_V = \sigma_{Vi}$ und $\quad W_T = W_{T,i}$. Darüber hinaus ist $\boldsymbol{W}_T := (W_{T,1}, \ldots, W_{T,m})'$ ein mehrdimensionaler Zufalls-Vektor mit der Verteilung: $\boldsymbol{W}_T \sim N_m(\mathbf{0}, T \cdot P)$

Das Modell ist vollständig, wenn für alle Firmen die Schranken entsprechend (**??**) gesetzt werden. In einem Merton Modell werden die Schranken entsprechend der Höhe ihrer Verbindlichkeiten und in einem CreditMetrics Modell entsprechend ihrer Übergangs-Wahrscheinlichkeiten gesetzt.

Wiederum können wir Transformationen der Vermögenswerte, wie in (**??**) und (**??**) vornehmen. Hierbei entsteht:
$X_{T,i} = \dfrac{W_{T,i}}{\sqrt{T}}$ und $\boldsymbol{X}_T = (X_{T,1}, \ldots, X_{T,m})' \sim N(\mathbf{0}, P)$
Somit hätten wir das Modell wieder auf eine Standard Gaussche Skala gebracht.

1.3 Schrankenmodelle

Schranken-Modelle sind strukturelle Modelle, die das Kredit-Risiko für ein Portfolio für eine feste Zeitperiode berechnen.

Ausfall für Firma i tritt auf, wenn die kritische Zufalls-Variable $X_i := X_{T,i}$ am Ende der Zeitperiode $[0, T]$ unter eine vorgegebene kritische Schranke d_i fällt.

Der sehr generelle Aufbau des Schrankenmodells erlaubt uns zum einen eine allgemeine Interpretation der kritischen Variablen und zum anderen die Betrachtung verschiedener Verteilungsstrukturen für $\boldsymbol{X}$.

Ein interessanter Aspekt wird der Einfluss durch die Wahl der Copula für $\boldsymbol{X}$ auf das Risiko des Portfolios sein.
Die Abhängigkeiten der Ausfälle entstehen durch die Abhängigkeiten in den Komponenten des Vektors $\boldsymbol{X}$.

1.3.1 Notationen für Einperioden Portfolio Modelle

Das Portfolio soll aus m Firmen bestehen und mit einem festen Zeithorizont T versehen sein.
Für $1 \leq i \leq m$, soll die Zufalls-Variable S_i den *Zustands-Indikator* für die Firma i zum Zeitpunkt T darstellen. $S_i := S_{T,i}$ kann Werte aus der Menge $\{0, 1, \ldots, n\}$ annehmen. Diese Werte stehen zum Beispiel für Rating Kategorien. Die Null interpretieren wir als die Kategorie des Ausfalls und alle anderen Werte ungleich Null als aufsteigende Bonitätszustände. Wir nehmen an, dass zum Zeitpunkt t keine Firmen dem Ausfall unterliegen.

Hauptsächlich interessieren wir uns für die binären Zustände: "Ausfall" oder "kein Ausfall" und ignorieren dabei die feinere Kategorisierung der Firmen, bzgl. ihrer exakten Bonität.

Für $1 \leq i \leq m$, soll die Zufalls-Variable Y_i den *Ausfall-Indikator* für die Firma i zum Zeitpunkt T darstellen. $Y_i := Y_{T,i}$. Es gilt:

$Y_i = 1 \Leftrightarrow S_i = 0$ und $Y_i = 0 \Leftrightarrow S_i > 0$.
Der Zufalls-Vektor $\boldsymbol{Y}_T = (Y_1, \ldots, Y_m)'$ ist der Ausfall-Indikator für das Portfolio. Die gemeinsame Ausfall-Wahrscheinlichkeitsfunktion für diesen Vektor ist gegeben durch: $p(\boldsymbol{y}) = P(Y_1 = y_1, \ldots, Y_m = y_m)$, wobei $\boldsymbol{y} \in \{0, 1\}^m$. Die entsprechenden Rand-Ausfall-Wahrscheinlichkeiten sind: $\bar{p}_i = P(Y_i = 1)$, für $i = 1, \ldots, m$

Die Korrelationen der Ausfall-Ereignisse sind von besonderem Interesse für uns. Denn diese definieren uns die Korrelationen der Ausfall-Indikatoren.

Es gilt: $\operatorname{var}(Y_i) = E(Y_i^2) - \bar{p}_i^2 = E(Y_i) - \bar{p}_i^2 = \bar{p}_i - \bar{p}_i^2$.

Hierdurch gilt für Firmen i und j, mit $i \neq j$, folgende Formel für die Korrelation:

$$\rho(Y_i, Y_j) = \frac{E(Y_i, Y_j) - \bar{p}_i \cdot \bar{p}_j}{\sqrt{(\bar{p}_i - \bar{p}_i^2)(\bar{p}_j - \bar{p}_j^2)}} \tag{1.17}$$

Die Anzahl der ausgefallenen Firmen zum Zeitpunkt T zählen wir mit der Zufalls-Variable $M := \sum_{i=1}^{m} Y_i$.

Den tatsächlichen Verlust bezogen auf den Ausfall einer Firma i, genannt "Loss given default" (LGD) modellieren wir durch die Größe $\delta_i \cdot e_i$. Der Wert am Portfolio, den Firma i einnimmt, ist e_i. Der Anteil, der hiervon als verloren gilt, im Falle eines Ausfalls, wird durch $0 \leq \delta_i \leq 1$ dargestellt. Den Gesamtverlust bezeichnen wir mit $L := \sum_{i=1}^{m} \delta_i \cdot e_i \cdot Y_i$.

Es ist möglich verschiedene Modelle zu erstellen, die zur gleichen mehrdimensionalen Verteilung von $\boldsymbol{S}$ oder $\boldsymbol{Y}$ führen. Da in der Analyse von Kredit-Risiken eines Portfolios genau dieser Verteilung unser hauptsächliches Interesse gilt, werden wir zwei Modelle mit den Zustands-Vektoren $\boldsymbol{Y}$ und $\tilde{\boldsymbol{Y}}$ (oder $\boldsymbol{S}$ und $\tilde{\boldsymbol{S}}$) als äquivalent ansehen, wenn gilt: $\boldsymbol{Y} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \tilde{\boldsymbol{Y}}$ (oder $\boldsymbol{S} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \tilde{\boldsymbol{S}}$).

1.3.2 Schrankenmodelle in Verbindung mit Copulas

Definition 1.3.1

Sei $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_m)'$ ein m-dimensionaler Zufalls-Vektor und $D \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine deterministische Matrix mit Elementen d_{ij}, s.d. für jedes i, die Elemente der i-ten Zeile einer Folge von strikt aufsteigenden Schranken ($d_{i1} < \ldots < d_{in}$) genügen. Erweitere diese Folge mit $d_{i0} = -\infty$ und $d_{i(n+1)} = \infty$ für alle Schuldner und setze:

$$S_i = j \quad \Leftrightarrow \quad d_{ij} \leq X_i \leq d_{i(j+1)}, \quad j \in \{0, \ldots, n\}, i \in \{0, \ldots, m\}$$

$(\boldsymbol{X}, D)$ definiert ein Schrankenmodell für den Zustands-Vektor $\boldsymbol{S} = (S_1, \ldots, S_m)'$.

In unserem Modell stellt $\boldsymbol{X}$ unsere kritische Variable mit den Randverteilungen $F_i(x) = P(X_i \leq x)$ dar. Zudem enthält die i-te Zeile von D die kritischen Schranken der Firma i.

Per Defintion des Ausfalls (zugehöriges Ereignis $S_i = 0$) tritt dieser auf, wenn $X_i \leq d_{i1}$, s.d. die Ausfall-Wahrscheinlichkeit dieser Firma i durch $\bar{p}_i = F_i(d_{i1})$

gegeben ist.

Betrachte zwei Firmen i,j mit $i \neq j$.
Folgende Unterscheidung ist wichtig:

- Die *Ausfall-Korrelation* dieser beiden Firmen, $\rho(Y_i, Y_j)$, wird bestimmt durch die Gleichung (**??**). Zudem gilt: $E(Y_i, Y_j) = P(X_i \leq d_{i1}, X_j \leq d_{j1})$. Somit hängt die Ausfall-Korrelation von der gemeinsamen Verteilung von X_i und X_j ab.

- Die *Vermögens-Korrelation* dieser beiden Firmen, $\rho(X_i, X_j)$, ist die Korrelation von den kritischen Variablen X_i und X_j.

- Falls $\boldsymbol{X}$ mehrdimensional Normal verteilt ist, wie im Fall des CreditMetrics-/KMV Modell, bestimmt die Korrelation von X_i und X_j die Copula und somit die gemeinsame Ausfall-Wahrscheinlichkeit.

- Falls $\boldsymbol{X}$ nicht mehrdimensional Normal verteilt ist, wird die gemeinsamen Ausfall-Wahrscheinlichkeit nicht vollständig beschrieben. Das kann extreme Folgen auf die Flanke der Verteilung von $M = \sum_{i=1}^{m} Y_i$ haben.

Es gibt ein einfaches Kriterium, um die Äquivalenz zweier Schrankenmodelle zu bestimmen. Dies erfolgt durch die Randverteilungen des Zustandsvektors $\boldsymbol{S}$ und der Copula von $\boldsymbol{X}$. Dieses Resultat ist nützlich, um die strukturellen Ähnlichkeiten verschiedener industrieller Modelle zu studieren.

Lemma 1.3.2 (Äquivalente Schranken-Modelle)
Seien $(\boldsymbol{X}, D)$, $(\tilde{\boldsymbol{X}}, \tilde{D})$ zwei Schranken-Modelle mit zugehörigen Zustands-Vektoren $\boldsymbol{S} = (S_1, \ldots, S_m)'$ und $\tilde{\boldsymbol{S}} = (\tilde{S}_1, \ldots, \tilde{S}_m)'$. Die beiden Modelle sind äquivalent, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. *Die Randverteilungen der Zufalls-Vektoren $\boldsymbol{S}$ und $\tilde{\boldsymbol{S}}$ stimmen überein, d.h.*

$$P(S_i = j) = P(\tilde{S}_i = j), \quad \text{fuer} \quad j \in \{1, \ldots, n\} \quad \text{und} \quad i \in \{1, \ldots, m\}$$

2. *$\boldsymbol{X}$ und $\tilde{\boldsymbol{X}}$ besitzen die gleiche Copula C.*

Beweis. Per Definition gilt:
$\boldsymbol{S} \overset{\mathscr{D}}{=} \tilde{\boldsymbol{S}}$ wenn, für alle $j_1, \dots, j_m \quad in \quad \{1, \dots, m\}$

$$\begin{aligned} & P(d_{1j_1} < X_1 \leq d_{1(j_1+1)}, \dots, d_{mj_m} < X_m \leq d_{m(j_m+1)}) \\ = & P(d_{1j_1} < \tilde{X}_1 \leq d_{1(j_1+1)}, \dots, d_{mj_m} < \tilde{X}_m \leq d_{m(j_m+1)}) \end{aligned}$$

Durch Standard-Maß-theoretische Argumente gilt dies auch,
wenn für alle $j_1, \dots, j_m \quad in \quad \{1, \dots, m\}$

$$\begin{aligned} & P(X_1 \leq d_{1(j_1+1)}, \dots, X_m \leq d_{m(j_m+1)}) \\ = & P(\tilde{X}_1 \leq d_{1(j_1+1)}, \dots, \tilde{X}_m \leq d_{m(j_m+1)}). \end{aligned}$$

Durch Sklar's Theorem folgt, dass dies äquivalent ist, zu

$$C(F_1(d_{1j_1}), \dots, F_m(d_{mj_m})) = C_{i_1,\dots,i_k}(\bar{p}_{i_1}, \dots, \bar{p_{i_k}}), \tag{1.18}$$

wobei nach der zweiten Eigenschaft C die Copula von $\boldsymbol{X}$ und $\tilde{\boldsymbol{X}}$ ist.
Durch die erste Eigenschaft gilt, dass
$F(d_{ij}) = \tilde{F}(\tilde{d}_{ij})$ für alle $j \; in \, \{1, \dots, m\}$ und $i \in \{1, \dots, m\}$.
Somit folgt die Behauptung.

∎

Die Copula in einem Schrankenmodell stellt die Verbindung zwischen den Randverteilungen für individuelle Firmen und den gemeinsamen Verteilungen bzgl. Bonitätsänderungen für Firmengruppen dar.

Als einfaches Beispiel betrachten wir ein Modell mit zwei möglichen Zuständen ("Ausfall" / "Kein Ausfall") für eine Teilgruppe von k Firmen ($\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, m\}$) mit zugehörigen individellen Ausfall-Wahrscheinlichkeiten $\bar{p}_{i_1}, \dots, \bar{p}_{i_k}$. Dann gilt:

$$P(Y_{i_1} = 1, \dots, Y_{i_k} = 1) = P(X_{i_1} \leq d_{i_1}1, \dots, X_{i_k} \leq d_{i_k}1) = C_{i_1 \cdots i_k}(\bar{p}_{i_1}, \dots, \bar{p}i_k) \tag{1.19}$$

wobei $C_{i_1 \cdots i_k}$ die k-dimensionale Rand-Copula von C ist.

1.3.3 Modelle auf alternativen Copulas basierend

Auch wenn die meisten Beispiele aus der Industrie impliziert oder explizit auf der Gauss Copula basieren, gibt es keinen Grund, diese zu verwenden. Die Wahl der Copula ist sehr entscheidend für die Flanke einer Verteilung bzgl. der Anzahl der Ausfälle M.

Daher betrachten wir nun Modelle, die auf alternativen Copula basieren. Sie versuchen die Flexibilität der KMV-/ CreditMetrics Modelle für eine große Breite an verschiedenen Korrelationsstrukturen für die kritischen Variablen anwendbar zu sein, zu erhalten. Das ist ein Vorteil beim Modellieren eines Portfolios, in welchem die Schuldner in unterschiedlichem Maß verschiedenen Risikofaktoren ausgesetzt sind. Beispiele hierfür sind Unterschiede in der Zugehörigkeit zu Industriesektoren oder zu Ländern.

1.3.4 Aspekte bzgl. der Modell-Risiken

Das Modell-Risiko kann grob definiert werden als das Risiko, dass das Arbeiten mit fehlkalibrierten Modellen mit sich bringt. In unserem Fall sind das die Modelle, die nicht den tatsächlichen Mechanismus beschreiben, der zum Ausfall oder zur Bonitätsveränderung in einem Kreditportfolio führen.
Zum Beispiel, wenn wir versuchen, durch unsere Modelle das Risiko-Maß der Flanken von Verteilungen zu schätzen, so wie den VaR oder den Expected Shortfall, dann sind wir mit der Gefahr konfrontiert, dass wir diese für das Portfolio unterschätzen.
Ein Schrankenmodell besteht hauptsächlich aus Ausfall-Wahrscheinlichkeiten für individuelle Firmen und einer Copula, die die Abhängigkeiten der kritischen Variablen beschreibt.
Bei der Diskussion um das Modell-Risiko werden wir annehmen, dass die individuellen Ausfall-Wahrscheinlichkeiten in zufriedenstellendem Maße bestimmt wurden.
Es ist sehr viel schwieriger die Copula zu bestimmen, die die Abhängigkeiten der Ausfälle beschreibt.

Die Wahl der Copula
In der Industrie werden meist Schrankenmodelle verwendet, die die Gauss Copula

unterstellen. Daher sind wir im Speziellen an der Sensitivität der Verteilung bzgl. der Anzahl der Ausfälle M interessiert, unter der Annahme, dass eine Gaussche Abhängigkeit vorliegt.

Bei solch einer Abhängigkeitsstruktur wird häufig die Wahrscheinlichkeit unterschätzt, dass gemeinsame große Bewegungen der Risikofaktoren, drastischen Folgen für die Performance unserer Risiko-Management Modelle haben.

Vergleich zweier Modelle:
Wir vergleichen ein Modell mit mehrdimensionalen Normal verteilten kritischen Variablen und ein Modell, in welchem die Variablen mehrdimensional t-verteilt sind.
Zur Einfachheit betrachten wir ein homogenes Gruppen-Modell. Seien eine Standard Normal verteilte Zufalls-Variable F, eine iid Folge $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ von Standard Normal verteilten Zufalls-Variablen (die zudem von F unabhängig sind) und ein Vermögens-Korrelations-Parameter $\rho \in [0, 1]$ gegeben. Dann definiere den Zufallsvektor $\boldsymbol{Z}$ durch $Z_i = \sqrt{\rho} \cdot F + \sqrt{1 - \rho} \cdot \varepsilon_i$.

- In dem Fall der t-Copula definieren wir die kritische Variable $X_i := \sqrt{W} \cdot Z_i$, wobei $W \sim \mathrm{Ig}\left(\frac{1}{2} \cdot \nu, \frac{1}{2} \cdot \nu\right)$ und unabhängig von $\boldsymbol{Z}$ ist, $\boldsymbol{X}$ weist eine mehrdimensionale t Verteilung auf.

- Im dem Fall der Gauss Copula setzen wir $\boldsymbol{Z} := \boldsymbol{X}$

In beiden Fällen setzen wir die Schranken so, dass $P(Y_i = 1) = \pi$ für alle i und für ein beliebiges $\pi \in (0, 1)$. Zudem ist auch die Korrelations-Matrix P von $\boldsymbol{X}$ (die Vermögens-Korrelations-Matrix) identisch und durch die Equi-Korrelations-Matrix mit diagonalen Elementen ρ gegeben.
Die Copula von $\boldsymbol{X}$ in beiden Modellen unterscheidet sich. Aufgrund des höheren Levels an Abhängigkeiten in der gemeinsamen Flanke der t-Copula, erwarten wir mehr gemeinsame Ausfälle im t-Modell.

Für ein Portfolio, der Größe $m = 10.000$, definieren wir drei absteigenden Bonitäts-Kategorien A, B und C:

- A: $\pi = 0,06\%$ und $\rho = 2,58\%$

- B: $\pi = 0,50\%$ und $\rho = 3,80\%$

- C: $\pi = 7,5\%$ und $\rho = 9,21\%$

Für jede Gruppe variieren wir den Parameter für den Freiheitsgrad ν.
Um die Flanke bzgl. der Anzahl der Ausfälle M zu beobachten, betrachten wir uns die Simulation der Bestimmung der 95% und 99% Quantile ($q_{0,95}(M)$ und $q_{0,99}(M)$).
Die wirkliche Simulation wurde durch einen Repräsentanten der Schrankenmodelle, das sogenannte "Bernouille-Mixture-Modell" ausgeführt.

Table 8.4. Results of simulation study. We tabulate the estimated 95th and 99th percentiles of the distribution of M in an exchangeable model with 10 000 firms. The values for the default probability π and the asset correlation ρ corresponding to the three groups A, B and C are given in the text.

	$q_{0.95}(M)$			$q_{0.99}(M)$		
Group	$\nu = \infty$	$\nu = 50$	$\nu = 10$	$\nu = \infty$	$\nu = 50$	$\nu = 10$
A	14	23	24	21	49	118
B	109	153	239	157	261	589
C	1618	1723	2085	2206	2400	3067

Die Tabelle zeigt, dass ν einen deutlichen Einfluß auf die hohen Quantile hat. Für das wichtige 99% Quantil ist der Einfluß für Gruppe A am stärksten.

Veränderungen in der Vermögens-Korrelationen

Wir bleiben bei der Annahme, dass $\boldsymbol{X}$ einer Gauss-Copula unterliegt. Wir studieren den Einfluss der Faktor-Struktur der Vermögens-Return-Werte auf gemeinsame Ausfall-Ereignisse und somit auf die Flanke von M.
Spezieller gesprochen, wir erhöhen die systematische Risiko Komponente der kritischen Variablen für die Schuldner in unserem Portfolio und analysieren den Effekt auf die Flanke von M.

Table 8.5. Results of simulation study. Estimated 95th and 99th percentiles of the distribution of M in an exchangeable model for varying values of asset correlation ρ.

Quantile	$\rho = 2.58\%$	$\rho = 3.80\%$	$\rho = 9.21\%$
$q_{0.95}(M)$	98	109	148
$q_{0.99}(M)$	133	157	250

Wir nutzen hierfür das eben eingeführte homogene Gruppenmodell als Werkzeug

für unsere Analyse. Wir setzen die Ausfall-Wahrscheinlichkeit fest auf $\pi = 0,50\%$ (Siehe Gruppe B) und variieren die Vermögens-Korrelation ρ, welche das systematische Risiko für alle Firmen in einem Modell für homogene Gruppen angibt.
Auch hier wirkt sich die Veränderung auf die Quantile aus. Aber wie zu erwarten war, längst nicht in so starkem Maß, wie durch die Wahl der Copula.

Kommentar:
Beide Simulations Experimente ergeben, dass Schrankenmodelle anfällig für substantielle Modell-Risiken sind, wenn für die Kalibrierungsversuche genutzt wurde, dass

- die Rand-Ausfall-Wahrscheinlichkeiten geschätzt wurden und
- die Faktor-Struktur der kritischen Variablen, welche durch die Vermögens-Return-Werte bestimmt sind, grob abgeschätzt wurde.

Idealerweise sollen auch die Parameter, die die Ausfallabhängigkeit beschreiben, auf Basis historischer Ausfalldaten geschätzt werden.
Die beste Strategie wäre, die Faktor-Modelle der Vermögens-Return-Werte mit einer statistischen Schätzung wichtiger Schlüsselgrößen zu kombinieren. Grundlage der Schätzung sind historische Ausfalldaten. Zu diesen Schlüsselgrößen zählt beispielsweise der Parameter für das systematische Risiko.

Bibliography

[1] McNeil, A.J., Frey, R. und Embrechts, P. (2005). *Quantitative Risk Management*. Princeton University Press, Princeton.