Seminar
Quantitatives Risikomanagement

Dynamische Kreditrisikomodelle I

Olga Voytolovska

Mathematisches Institut
der
Universität zu Köln

Wintersemester 2009/2010
Betreuung: Prof. Schmidli, J. Eisenberg

Contents

1 Kreditderivate

Wertpapiere, die mit Kreditrisiko behaftet sind, werden meist in drei Klassen unterteilt: gefährdete Forderungen (*vulnerable claims*), Kreditderivate auf Einzelnamen (*single-name credit derivatives*) und portfoliobezogene Kreditderivate (*portfolio-related credit derivatives*). Hier werden die letzten beiden Klassen behandelt. Dies sind Wertpapiere, die in erster Linie zum Management und Handeln mit Kreditrisiko dienen.
Im Falle von Kreditderivaten auf Einzelnamen hängt der Pay-Off vom Eintreten eines bestimmten Kreditereignisses einer Finanzeinheit ab. Bei portfoliobezogenen Kreditderivaten wird der Pay-Off durch Kreditereignisse des ganzen Portfolios betroffen.

1.1 Single-Name Kreditderivate

Credit Default Swaps / CDS.
Der CDS ist das bekannteste und das meist gehandelte Kreditderivat. Es handelt sich hierbei um einen Vertrag, den zwei Parteien miteinander außerbörslich (over the counter) abschließen. Bei einem CDS sind drei Parteien beteiligt: der Referenzschuldner (*reference entity*), der Sicherungsverkäufer (*protection seller*) und der Sicherungskäufer (*protection buyer*). Dabei verpflichtet sich der Sicherungsgeber (SG) der anderen Partei, dem Sicherungsnehmer (SN), im Falle eines Kreditereignisses des dem CDS zugrunde liegenden Referenzschuldners eine Ausgleichszahlung zu leisten. Im Gegenzug zahlt der SN bis zum Eintritt des Kreditereignisses eine regelmäßige Prämie (*CDS Spread*). Nach dem Eintritt eines Kreditereignisses ist das Geschäft beendet.
Der SN hat ein zusätzliches Ausfallrisiko im SG, da für den SN bei Ausfall des Assets das Risiko besteht, dass der SG den vertraglich zugesicherten Ausgleich nicht leisten kann. Bei dem Sicherungsgeber liegt ebenso das Adressenausfallrisiko des SN, da die Möglichkeit besteht, dass dieser die Prämien nicht bezahlen kann.

Credit-Linked-Notes.
Credit-Linked-Notes (synthetische Unternehmensanleihen) sind eine spezielle Form von Kreditderivaten kombiniert mit einer Anleihe. Sie bieten ebenfalls die Möglichkeit, Kreditrisiken vom Verkäufer an den Käufer zu transferieren. Der Hauptvorteil liegt zum einen darin, dass der Investor bereits beim Kauf einer Credit-Linked-Note den Kaufpreis bezahlt und am Ende der Laufzeit die Tilgung zurückerhält, wenn das Kreditereignis nicht eingetreten ist. Dadurch besteht für den Sicherungsnehmer kein Adressenrisiko des Sicherungsgebers. Zum anderen stehen mit Credit-Linked-Notes Kreditderivate auch

Investoren offen, die keine Credit Default Swaps eingehen können oder dürfen (bspw. private Investoren).

1.2 Portfolio Kreditderivate

Collateralised Debt Obligation (CDO).
Collateralised Debt Obligationen sind Finanzinstrumente zur Absicherung des Kreditrisikos bei einem Pool von Vermögensgegenständen. Diese Vermögensgegenstände sind entweder ein Pool von Forderungen in Form von Anleihen (in sog. *Collateralised Bond Obligations/ CBO*), Krediten (in sog. *Collateralised Loan Obligations/ CLO*), Credit Default Swaps oder eine Mischung daraus. Die Produktbezeichnung CDO ist der Oberbegriff.
Die CDOs können sich in dem zugrunde liegenden Portfolio unterscheiden, die Aufbaustruktur ist jedoch immer dieselbe. Eine CDO Transaktion beruht auf der Gründung einer Zweckgesellschaft (*special-purpose vehicle /SPV*), welches in ein Portfolio verschiedener Referenzassets investiert. Um diese Investition zu finanzieren, begibt das SPV Wertpapiere, die CDO-Notes oder CDO-Tranchen. Diese Tranchen nennt man Equity-Tranche, Mezzanine-Tranche und Senior-Tranche (in steigender Rating-Reihenfolge). Zins und Tilgung der Notes sind von der Entwicklung des Portfoliowertes über die Laufzeit der Transaktion abhängig. Die CDO-Tranchen unterscheiden sich in ihrem Rang bezüglich der Cash Flows aus dem Collateralpool. Somit sind sie den möglichen Ausfällen in unterschiedlichem Maße ausgesetzt: die Equity-Tranche trägt das höchste Ausfallrisiko. Die Tranche mit dem besten Rating wird so durch die Tranchen mit schlechteren Ratings geschützt. D.h.: Senior Tranchen werden vor der Mezzanine und diese vor der Equity-Tranche bedient. Verluste werden also zuerst von den Equity-Tranchen getragen. Damit bieten die einzelnen Tranchen ein sehr unterschiedliches Risiko- und Gewinnprofil, obwohl sie alle auf dem gleichen unterliegenden Portfolio von Kreditinstrumenten basieren.

Zum Verständnis der qualitativen Eigenschaften wird hier ein stilisiertes Modell eines CDO behandelt.
Betrachte ein Portfolio von m verschiedenen Unternehmen mit einem Gesamtverlust $L_t = \sum\limits_{i=1}^{m} \delta_i e_i Y_{t,i}$ zum Zeitpunkt t. Betrachte ein CDO mit k Tranchen: $\kappa \in \{1, \ldots, k\}$, dabei sei jede Tranche durch die sog. "attachment points"
$0 = K_0 < K_1 < \cdots < K_k \leq \sum\limits_{i=1}^{m} e_i$ charakterisiert. Der Tranche κ entsprechende

Nominalwert kann wie folgt beschrieben werden. Zunächst ist der Nominalwert gleich $K_\kappa - K_{\kappa-1}$; er wird reduziert, sobald ein Ausfallsereignis eintritt, durch welches der Gesamtverlust im Bereich $[K_{\kappa-1}, K_\kappa]$ fällt.
Der Nominalwert der Tranche κ zum Zeitpunkt t ist also gegeben durch:

$$N_\kappa(t) = f_\kappa(L_t) \text{ mit } f_\kappa(l) = \begin{cases} K_\kappa - K_{\kappa-1} & l < K_{\kappa-1} \\ K_\kappa - l, & l \in [K_{\kappa-1}, K_\kappa] \\ 0, & l > K_\kappa \end{cases}$$

Mann nennt $f_\kappa(l) = (K_\kappa - l)^+ - (K_{\kappa-1} - l)^+$ *Put Spread.*

2 Mathematisches Werkzeug

2.1 Zufallszeit und Hazardrate

Betrachte einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit Zufallszeit τ, d.h. eine $\mathcal{F}$–messbare Zufallsvariable mit Werten aus $[0, \infty]$, die als Ausfallszeit eines Unternehmens zu interpretieren ist.
Bezeichne mit $F(t) = P(\tau \leq t)$ die Verteilungsfunktion von τ und $\bar{F}(t) := 1 - F(t)$ die Überlebensfinktion von τ.
Ann.: $P(\tau = 0) = F(0) = 0$; $\bar{F}(t) > 0 \;\; \forall \;\; t < \infty$.
Definiere den Sprung-Indikatorprozess des Ausfalssereignisses durch $Y_t = I_{\{\tau \leq t\}}, \; t \geq 0$.
Dabei ist (Y_t) ein rechtsstetiger Prozess, der zum Ausfallszeitpunkt τ von 0 auf 1 springt; es gilt $1 - Y_t = I_{\{\tau > t\}}$.

Eine *Filtration* $(\mathcal{F}_t)$ auf $(\Omega, \; \mathcal{F})$ ist eine aufsteigend geordnete Familie von Sub-σ-Algebren von $\mathcal{F}$: $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}$ für $0 \leq t \leq s < \infty$. Setze $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t)$.
Filtrationen werden hier benutzt, um den Informationsfluss eines Zufallssystems zu modellieren. $\mathcal{F}_t$ gibt den Wissensstand eines Beobachters zur Zeit t wieder; $A \in \mathcal{F}_t$ bedeutet, dass man zur Zeit t beobachten kann, ob das Ereigniss A stattfand. In diesem Kapitel wird zunächst angenommen, dass die einzige beobachtbare Größe die Zufallszeit τ bzw. der Sprung-Indikatorprozess (Y_t) ist. Eine geeignete Filtration ist somit gegeben durch $(\mathcal{H}_t)$ mit:

$$\mathcal{H}_t = \sigma(\{Y_u : u \leq t\}) \tag{1}$$

Laut Definition ist τ also die $(\mathcal{H}_t)$-*Stoppzeit*, sobald gilt: $\{\tau \leq t\} = \{Y_t = 1\} \in \mathcal{H}_t$, $\forall \; t \geq 0$. Offenbar ist $(\mathcal{H}_t)$ die kleinste Filtration mit dieser Eigenschaft.

Definition 2.1 (Kumulierte Hazardfunktion und Hazardrate)
Man nennt die Funktion $\Gamma(t) := -\ln(\bar{F}(t))$ *die* kumulierte Hazardfunktion *der Zufallszeit* τ*. Falls* F *eine absolut stetige Funktion mit Dichte* f *ist, so bezeichnet man die Funktion* $\gamma(t) := \frac{f(t)}{(1-F(t))} = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)}$ *als* Hazardrate *von* τ.

Lemma 2.2
Jede $\mathcal{H}_t$*-messbare Zufallsvariable* H *kann wie folgt dargestellt werden:*

$$H = h(\tau)I_{\{\tau \leq t\}} + cI_{\{\tau > t\}} \tag{2}$$

für eine messbare Funktion $h : [0, t] \to \mathbb{R}$ *und eine reelle Konstante* c.

Lemma 2.3
Sei τ *eine Zufallszeit mit Sprung-Indikatorprozess* $\mathrm{Y}_t = \mathrm{I}_{\{\tau \leq t\}}$ *und* $(\mathcal{H}_t)$ *eine Filtration. Dann gilt für jede integrierbare Zufallsvariable X,* $\forall \ \ t \geq 0$*:*

$$E(I_{\{\tau > t\}}X \mid \mathcal{H}_t) = I_{\{\tau > t\}}\frac{E(X; \tau > t)}{P(\tau > t)}. \tag{3}$$

Die nächste Propostion stellt das erste Ergebnis bzgl. der stochastischen Eigenschaften des Sprung-Indikatorprozesses der Zufallszeit τ vor.
Erinnerung: Sei $(\mathcal{F}_t)$ eine Filtration. Einen $(\mathcal{F}_t)$-adaptierten, integrierbaren Prozess (M_t) nennt man $(\mathcal{F}_t)$-*Martingal*, falls $E(M_s \mid \mathcal{F}_t) = M_t \ \ \forall \ 0 \leq t \leq s$, d.h. der aktuelle Wert M_t ist die beste Vorhersage für den kommenden Wert M_s.

Proposition 2.4
Sei τ *eine Zufallszeit mit absolut stetiger Verteilungsfunktion* $F(t)$ *und Hazardrate* $\gamma(t)$*. Dann ist* $M_t := Y_t - \int_0^{t\wedge\tau} \gamma(s) \ \mathrm{d}s, \ t \geq 0$ *ein* $(\mathcal{H}_t)$*-Martingal.*

2.2 Modellierung zusätzlicher Informationen

Wir behandeln nun die Situation, dass weitere Informationen (z.B. Wirtschaftswachstum eines Landes oder eines Industriesektors) bzgl. der Verteilung von τ beobachtbar sind. Formal werden diese Informationen durch eine Filtartion $(\mathcal{F}_t)$ dargestellt.

Definition 2.5 (Kumulierter Hazardrate-Prozess)
Sei τ eine Zufallszeit auf einem gefilterten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ mit $P(\tau > 0) = 1$. Sei $F_t = P(\tau \leq t \mid \mathcal{F}_t)$ und $\bar{F}_t = 1 - F_t$. Falls $F_t < 1 \ \ \forall \ \ t \geq 0$ gilt, wird der $(\mathcal{F}_t)$-bedingte kumulierte Hazard-Prozess (Γ_t) definiert durch: $\Gamma_t := -\ln(\bar{F}_t)$.
Falls (Γ_t) monoton steigend und absolut stetig ist, d.h. falls $\Gamma_t = \int_0^t \gamma_s \, \mathrm{d}s$ streng positiv ist, wobei (γ_t) ein $(\mathcal{F}_t)$-adaptierter Prozess ist, so nennt man (γ_t) $(\mathcal{F}_t)$-bedingter Hazardrate-Prozess von τ.

Definiere eine weitere Filtration $\mathcal{G}_t$, die Informationen über vergangene Prozesse, sowie über das Eintreten oder Nicht-Eintreten des Ausfallsereignisses bis zur Zeit t beinhaltet:

$$\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_t \ , \quad t \geq 0$$

$\mathcal{G}_t$ ist die kleinste σ-Algebra, welche $\mathcal{F}_t$ und $\mathcal{H}_t$ enthält. Somit ist τ eine $(\mathcal{G}_t)$-Stoppzeit, falls τ $(\mathcal{H}_t)$-Stoppzeit ist.

Lemma 2.6
Für jede $\mathcal{G}_t$-messbare Zufallsvariable X existiert eien $\mathcal{F}_t$-messbare Zufallsvariable $\tilde{X}$, s.d. gilt: $X I_{\{\tau>t\}} = \tilde{X} I_{\{\tau>t\}}$.

Lemma 2.7
Für jede integrierbare Zufallsvariable X gilt:

$$E(I_{\{\tau>t\}} X \mid \mathcal{G}_t) = I_{\{\tau>t\}} \tfrac{E(I_{\{\tau>t\}} X \mid \mathcal{F}_t)}{P(\tau>t \mid \mathcal{F}_t)}.$$

Korollar 2.8
Sei $s > t$. Falls $\tilde{X}$ integrierbar und $\mathcal{F}_s$-messbar, gilt:

$$E(I_{\{\tau>s\}} \tilde{X} \mid \mathcal{G}_t) = I_{\{\tau>t\}} E(e^{-(\Gamma_s - \Gamma_t)} \tilde{X} \mid \mathcal{F}_t).$$

Die Aussage des Korollars ist für Pricing der Unternehmensanleihen nützlich. Sei (r_t) der risikolose Zins, $(\mathcal{F}_t)$ eine Hintergrundfiltration und P ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Betrachte eine Nullkouponanleihe eines Unternehmens mit Zero Recovery Rate und Laufzeit $T > t$. Der Wert der Anleihe bei Fälligkeit ist gegeben durch $I_{\{\tau>T\}}$.

Setze $\tilde{X} := \exp(-\int_t^T r_s \, ds)$.
Der Preis der Anleihe zur Zeit t ist somit gegeben durch $E(I_{\{\tau>T\}}\tilde{X} \mid \mathcal{G}_t)$. Aus dem Korollar folgt:

$$E(I_{\{\tau>T\}}\tilde{X} \mid \mathcal{G}_t) = I_{\{\tau>t\}}E(\exp(-\int_t^T (r_s + \gamma_s)\mathrm{ds}) \mid \mathcal{F}_\mathrm{t}).$$

Außerdem impliziert das Korollar, dass unter den hier gemachten Annnahmen γ_t eine gute Approximation der Ein-Jahres-Ausfalls-Wahrscheinlichkeit wiedergibt. Es gilt:

$$P(\tau > t+1 \mid \mathcal{G}_t) = I_{\{\tau>t\}}E(\exp(-\int_t^{t+1} \gamma_s \, \mathrm{ds}) \mid \mathcal{F}_\mathrm{t}). \tag{4}$$

Nehme an, die Hazardrate sei relativ stabil über die Zeit, s.d. $P(\gamma_s \approx \gamma_t) \; \forall \; s \; \in [t, t+1]$ nahe 1 ist und $\tau > t$. Unter diesen Annahmen wird die rechte Seite der Gleichung (2.4) relativ gut durch $\exp(-\gamma_t)$ approximiert. Falls γ_t nicht zu groß ist, bekommt man für $\{\tau > t\}$ die Ein-Jahres-Ausfallwahrscheinlichkeit

$$P(\tau < t+1 \mid \mathcal{G}_t) \approx 1 - \exp(-\gamma_t) \approx \gamma_t. \tag{5}$$

2.3 Doppelt-Stochstische Zufallszeiten

Das Konzept der doppelt-stochastischen Zufallszeiten ist das wichtigste Beispiel für Zufallszeiten mit einer stochastischen Hazardrate.

Definition 2.9 (Doppelt-stochastische Zufallszeiten)
Eine Zufallszeit τ nennt man doppelt-stochastisch *bzgl. der Filtration $(\mathcal{F}_t)$, falls τ den $(\mathcal{F}_t)$-bedingten Hazardrate-Prozess (γ_t) gemäß Definition 2.5 erzeugt, falls $\Gamma_t = \int_0^t \gamma_s \, \mathrm{d}s$ streng monoton wachsend ist und falls für alle $t > 0$ gilt:*

$$P(\tau \leq t \mid \mathcal{F}_\infty) = P(\tau \leq t \mid \mathcal{F}_t). \tag{6}$$

Im folgenden Lemma wird eine explizite Konstruktion der doppelt-stochastischen Zufallszeiten gegeben.

Lemma 2.10
Sei E eine standard-exponentialverteilte Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, unabhängig von $\mathcal{F}_\infty$, d.h. $P(\mathrm{E} \leq t \mid \mathcal{F}_\infty) = 1 - e^{-t} \quad \forall \; t \geq 0$. Sei (γ_t) ein positiver $(\mathcal{F}_t)$-adaptierter Prozess, s.d. $\Gamma_t = \int_0^t \gamma_s \, \mathrm{d}s$ streng monoton wachsend und endlich ist für alle $t > 0$. Definiere die Zufallszeit τ:

$$\tau := \Gamma^{-1}(\mathrm{E}) = \inf\{t \geq 0 \; : \Gamma_t \geq \mathrm{E}\}.$$

Dann ist τ doppelt-stochastisch mit $(\mathcal{F}_t)$-bedingtem Hazardrate-Prozess (γ_t).

Die Umkehrung des Lemmas 2.10 lautet wie folgt:

Lemma 2.11

Sei τ eine doppelt-stochastische Zufallszeit mit $(\mathcal{F}_t)$-bedingtem Hazardrate-Prozess (γ_t). Bezeichne mit $\Gamma_t = \int_0^t \gamma_s \, \mathrm{d}s$ den bedingten kumilierten Hazardrate-Prozess von τ und setze $\mathrm{E} := \Gamma_\tau$. Dann ist die Zufallsvariable E standard-exponentialverteilt und unabhängig von $\mathcal{F}_\infty$, und $\tau = \Gamma^{-1}(\mathrm{E})$ fast sicher.

Algorithmus: Univariate Schranken-Simulation

1) Erzeuge eine Trajektorie des Hazardrate-Prozesses (γ_t)

2) Erzeuge eine exponentialverteilte Zufallsvariable E von (γ_t) (die Schranke) und setze $\tau = \Gamma^{-1}(E)$

Martingal-Intensität für doppelt-stochastische Zufallszeiten.

Proposition 2.12

*Sei τ eine doppelt-stochastische Zufallszeit mit $(\mathcal{F}_t)$-bedingtem Hazardrate-Prozess (γ_t). Dann ist $M_t := Y_t - \int_0^{t\wedge\tau} \gamma_s \, \mathrm{d}s$ ein $(\mathcal{G}_t)$-*Martingal.

Definition 2.13

*Einen nicht-negativen, $(\mathcal{G}_t)$-adaptierten Prozess (λ_t) nennt man $(\mathcal{G}_t)$-*Martingal-Intensitätsprozess *der Zufallszeit τ, falls $M_t := Y_t - \int_0^{t\wedge\tau} \lambda_s \, \mathrm{d}s$ ein $(\mathcal{G}_t)$-Martingal ist.*

In den Intensitätsmodellen (reduced-form credit risk models) wird (λ_t) oft als die Ausfallintensität der Zufallszeit τ bezeichnet.

3 Risikoneurtales und versicherungsmathematisches Pricing von Kreditrisiken

Im Wesentlichen werden zwei Ansätze zum Pricing von kreditrisikobehafteten Wertpapieren benutzt: entweder der risikoneutrale Pricing-Ansatz oder der versciherungsmathematische.
Der risikoneutrale Ansatz basiert auf dem Konzept der Arbitragefreiheit und dynamischem Risiko-Hedging; dabei werden zukünftige Preise der Derivate als erwartete diskonierte Werte unter einem äquivalenten Martingalmaß (auch risikoneutrales Maß genannt) berechnet.
Mit einem versicherungsmathematischen Ansatz werden Preise unter dem physischen Maß berechnet. Dabei wird davon ausgegangen, dass Wertpapiere mit einer höheren Preis-Volatilität, also mit mehr Risiko, zukünftig auch höhere Erträge bringen.

3.1 Risikoneutrales und Real-World Maß

Beispiel
Betrachte eine Nullkouponanleihe mit Laufzeit T von einem Jahr. Nehme an, dass die Rückzahlungsquote $1-\delta$ determinischtisch ist und genau 60% beträgt; die Real-World-Ausfallwahrscheinlichkeit sei $\overline{p}=1\%$, der risikoloser Zins sei 5%. Der derzeitige ($t=0$) Preis der Anleihe sei $p_1(0,1)=0,941$ und der Preis der entsprechenden risikofreien Anleihe sei $p_0(0,1)=(1,05)^{-1}=0,952$.
Für den diskontierten Erwartungswert der Anleihe gilt:

$$(1,05)^{-1}(0,99\cdot 1+0,01\cdot 0,6)=0,949>p_1(0,1).$$

Dies ist eine typische Situation bei Unternehmensanleihen, da Investoren eine Risikoprämie verlangen.
Ein äquivalentes Martingalmaß oder risikoneutrales Maß ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q, der äquivalent zu dem empirischen (physischen) Wahrscheinlcihkeitsmaß P ist, wobei der diskonierte Preisprozess eines Wertpapieres ein Q-Martingal ist. Laut dem *1. Fundamentalsatz der Wertpapierbewertung* ist ein Modell arbitragefrei genau dann wenn mindestens ein äquivalentes Martingalmaß Q existiert.
In diesem Zwei-Perioden-Modell ist Q durch eine Ausfallwahrscheinlichkeit $\overline{q}$ gegeben, s.d. gilt: $p_1(0,1)=(1,05)^{-1}\left((1-\overline{q})\cdot 1+\overline{q}\cdot 0,6\right)$. Hierbei ist $\overline{q}=0,03$ eindeutig bestimmt.

Übergang vom physischen zum risikoneutralen Maß

Im Merton-Modell ist die physische Ausfallwahrscheinlichkeit auf $[0, T]$ gegeben durch

$$\overline{p} = P(V_T \leq F) = \Phi\left(\frac{\ln F - \ln V_0 - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right);$$

die risiko-neutrale Ausfallswahrscheinlichkeit auf dem gleichen Intervall ist

$$\overline{q} = Q(V_T \leq F) = \Phi\left(\frac{\ln F - \ln V_0 - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$\overline{q} = \Phi(\Phi^{-1}(\overline{p}) + \tfrac{\mu - r}{\sigma}\sqrt{T}).$$

Der Korrektursterm $(\mu - r)/\sigma$ entspricht dem *Sharpe Ratio* von V.

In den Intensitätsmodellen wird die Ausfallszeit als eine doppelt-stochastische Zufallszeit mit Hazardrate $\gamma_t^P = h^P(\Psi_t)$ (unter dem physischen Maß P) und $\gamma_t^Q = h^Q(\Psi_t)$ (unter dem risikoneurtalen Maß) Q modelliert. Hierbei ist (Ψ_t) ein d-dimensionaler, $(\mathcal{F}_t)$-adaptierter Prozess; h^P und h^Q sind Funktionen von $\mathbb{R}^d$ nach $\mathbb{R}^+$.

3.2 Risikoneutrales Pricing und Marktvollständigkeit

Feststellung: In einem vollständigen Markt kann der Preis derivativer Finanzinstrumente als Erwartungswert von diskontiertem Pay-Off unter dem risikoneutralen Maß berechnet werden.

Man nennt ein Derivat *erreichbar*, falls eine Portfolio-Handelsstrategie existiert, welche den Pay-Off des Derivates repliziert. Modelle, in denen jedes Derivat ein erreichbares Derivat ist, bezeichnet man als *vollständig*.

Sei $\mathcal{Q}$ die Menge der äquivalenten Martingalmaße Q. Jeden Preis des Derivates, berechnet unter einem Martingalmaß $Q \in \mathcal{Q}$, nennt man *zulässiger Wert* des Derivates.

2. Fundamentalsatz der Wertpapierbewertung besagt, dass ein arbitragefreier Markt genau dann vollständig ist, wenn es ein eindeutiges äquivalentes Martingalmaß Q existiert.

3.3 Martingal-Modelle

Bei Konstruktionen von Modellen zum Pricing von Derivaten ist man in der Regel daran interessiert, direkt unter einem exogen vorgegebenen Martingalmaß Q zu modellieren.

Solcher Ansatz wird als Martingal-Modell bezeichnet.

Martingal-Modelle sind insbesondere praktisch, falls der Basiswert mit einer Laufzeit T exogen vorgegen ist, wie z.B. bei Nullkouponanleihen. In diesem Fall kann der Preis des Basisinstrumentes zur Zeit $t < T$ als bedingter Erwartungswert unter Q des diskontierten Wertes in T berechnet werden.
Bezeichne mit $B(t) > 0$ die sog. Numeraire und mit $\mathcal{G}_t$ die den Investoren zugänglichen Informationen zur Zeit t, so gilt für den Preis des Wertpapieres zur Zeit t, dessen Wert in T durch eine $\mathcal{F}_t$-messbare Zufallsvariable $H \geq 0$ gegeben ist:

$$H_t = B(t)E^Q(B(T)^{-1}H \mid \mathcal{G}_t),\ t \leq T.$$

Modellparameter werden unter der Bedingung berechnet, dass der Preis des Wertpapieres, wie in der obigen Formel berechnet, in $t = 0$ mit dem auf dem Markt beobachtbaren Preis übereinstimmen soll. Dies wird als die *Kalibrierung des Modells* zu Marktdaten bezeichnet. Durch Martingal-Modelle wird sichergestellt, dass das Model arbitragefrei ist; dies ist von Vorteil, wenn man Preise verschiedener Wertpapiere simultan modelliert. Deshalb wird bei Intensitätsmodellen auf diesen Ansatz zurückgegriffen.
Martingal-Modelle haben jedoch zwei Nachteile. Erstens, sind Informationen aus der Vergangenheit weitgehend irrelevant für die berechneten Modellparameter, da diese sich beim Übergang von dem Real-World-Maß zum äquivalenten Martingalmaß verändern könnten. Zweitens, sind realistische Modelle zum Pricing von Kreditderivaten oft nicht vollständig, s.d man durch dynamisches Hedging nicht alle Risiken eliminieren kann. In solchen Fällen interessiert man sich für die Verteilung der Risiken unter dem physischen Maß P; das Martingal-Modell allein ist also nicht ausreichend.
Das Martingal-Modell ist am besten in den Fällen brauchbar, wenn der Markt relativ liquid ist; dann liegen genügend Informationen bzgl. des Preises vor, um das Modell zu kalibrieren und Sachverhalte bzgl. der Marktvollkommenheit weniger relevant werden.

Martingal-Modelle mit CDS-Spread.
Wir wenden nun die Ansätze des Martingal-Modells zur Konstruktion eines einfachen Intensitätsmodells mit deterministischer Hazardrate zur Bewertung von Kreditderivaten an. Ziel ist es, die wichtigen Größen, wie Ausfallszeit und Zinssatz, direkt unter einem Martingalmaß Q zu modellieren.
Nehme an, dass unter Q die Ausfallszeit τ eine Zufallszeit mit einer deterministischen Hazardrate $\gamma^Q(t)$ ist. Der Zinssatz sowie die Recovery Rate seien deterministisch.

Bezeichne die Verlustquote mit $\delta \in (0,1)$. Sei $r(t) \geq 0$ der laufende Zinseszins zum Zeitpunkt t, s.d. $p_0(0,t) = \exp(-\int_0^t r(s)\mathrm{d}s)$ der Preis der risikolosen Nullkouponanleihe mit Fälligkeit t ist.
Sei der Nominalwert gleich 1 (damit die prozentuale Verlusthöhe mit der absoluten übereinstimmt). Die Prämienzahlungen erfolgen zu N Zeitpunkten: $0 < t_1 < \cdots < t_N$. Falls $\tau > t_k$ leistet der Sicherungsnehmer eine Prämienzahlung in Höhe von $x^*(t_k - t_{k-1})$, wobei x^* den Swap Spread bezeichnet. Nach dem Ausfallsereignis findet keine Prämienzahlung mehr statt. Falls das Ausfallsereignis vor dem Fälligkeitstermin t_N eintritt, leistet der Sicherungsgeber an den Sicherungsnehmer eine Ausgleichszahlung in Höhe von δ zum Ausfalszeitpunkt τ.
Sei die risikoneutrale Hazardrate γ^Q und Spread x, dann kann man die Zahlungen des SN an den SG, sowie die des SG jeweils bewerten. Der Preis der Prämienzahlungen in $t = 0$, also der erwartete diskontierte Wert der Zahlungen an den SG, ist

$$\begin{aligned} V^{prem}(x;\gamma^Q) &= E^Q\left(\sum_{k=1}^{N} \exp\left(-\int_0^{t_k} r(u)\ \mathrm{d}u\right) x(t_k - t_{k-1}) I_{\{t_k<\tau\}}\right) \\ &= x\sum_{k=1}^{N} p_0(0,t_k)(t_k - t_{k-1}) Q(\tau > t_k). \end{aligned}$$

Der diskontierte Erwartungswert der Ausgleichszahlung im Falle eines Ausfalls ist gleich

$$V^{def}(\gamma^Q) = E^Q\left(\exp\left(-\int_0^\tau r(u)\ \mathrm{d}u\right)\delta I_{\{\tau<t_N\}}\right).$$

Definiere $R(u) := r(u) + \gamma^Q(u)$. τ hat die Dichte $f_\tau = \gamma^Q(t)\exp(-\int_0^t \gamma^Q(u)\ \mathrm{d}u)$. Damit folgt:

$$\begin{aligned} V^{def}(\gamma^Q) &= \sigma \int_0^{t_N} \exp\left(-\int_0^t r(s)\ \mathrm{d}s\right) f_\tau(t)\mathrm{d}t \\ &= \sigma \int_0^{t_N} \gamma^Q(t)\exp\left(-\int_0^t R(s)\ \mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Laut Marktbedingungen werden beim Eintritt der CDS-Transaktion keine Prämien gezahlt (in $t = 0$). Somit muss der *faire CDS Spread* x^* so gewählt werden, dass der Wert des abgeschlossenen Vertrags in $t = 0$ Null ist. Durch die Gleichung $V^{prem}(x^*, \gamma^Q) = V^{def}(\gamma^Q)$ wird x^* festgelegt.

Versicherungsmathematischer Ansatz zur Bewertung von Kreditrisiken

Der versicherungsmathematische Ansatz wird meist zur Bewertung von Krediten und relativ illiquiden Finanzprodukten herangezogen. Unter diesem Ansatz wird der *Total Spread*, den ein Kredit erbringen soll (die Differenz zwischen der Zinsrate des Kredits und der Zinsrate einer risikolosen Anleihe mit gleichen Eigenschaften) wie in der folgenden Formel schematisch dargestellt, berechnet:

$$\text{Total Spread} = \text{Verwaltungskosten} + \text{erwarteter Verlust} + \text{Risikoprämie}$$

Bem.: In der Praxis kann die Kreditbewertung in der obigen Form nicht allgemein angewendet werden; andere Faktoren, wie z.B. der Konkurrenzdruck seitens anderer Kreditgeber und das langjährige Geschäft zwischen Kreditgeber und Kreditnehmer, spielen eine wichtige Rolle bei der Bestimmung der Renditespanne eines Kredits.
Der erwartete Verlust bezieht sich auf den erwarteten Verlust unter dem physischen Wahrscheinlichkeitsmaß, wobei angenommen wird, dass kein Zusammenhang zwischen dem Ausfallsereignis und Recovery Rates besteht.
Die Berechnung der Risikoprämie ist etwas umständlicher. Im modernen Kredit-Pricing-System wird die Risikoprämie eines Kredits berechnet, indem sog. Grundverzinsung des ökonomischen Kapitals (*hurdle rate*) als Reserve gegen Transaktionsverluste erfolgt. Hurdle Rates werden von dem Management gesetzt; sie geben den angestrebten Ertrag aus Eigenkapital eines Finanzinstituts wieder. Das ökonomische Kapital für einen bestimmten Kredit wird in zwei Schritten bestimmt. Zunächst wird das ökonomische Kapital des ganzen Kreditportfolios bestimmt. Hier wird normalerweise zwischen dem erwarteten Verlust, gegeben durch den Erwartungswert $E(L)$, und dem unerwarteten Verlust, gegeben durch $UL := L - E(L)$, unterschieden. Im zweiten Schritt muss das ökonomi-sche Kapital dem einzelnen Kredit im Portfolio angepasst werden. Diesen Prozess nennt man *Kapitalallokation*. Eine angemessene Kapitalallokation muss das Zusammenspiel der einzelnen Kredite im gesamten Portfolio widerspiegeln. Zum Beispiel, kann ein großer Kredit, welcher fast unabhängig vom dem gesamten Portfolio ist, relativ wenig zum Gesamtrisiko des Portfolios beitragen; während der Ausfall eines kleineren Kredits an Bedingungen verbunden ist, s.d. große Verluste entstehen können.

References

[1] J.McNeil, R.Frey, P.Embrechts (2005). *Quantitative Risk Management*. Princeton University Press.