Quantitatives Risikomanagement

Dynamische Kreditrisikomodelle II

Jens Brumhard

Mathematisches Institut
der
Universität zu Köln

Wintersemester 09/10
Betreuung: Prof. Schmidli, J. Eisenberg

Inhaltsverzeichnis

4 Pricing mit zweifach stochastischen Ausfallzeiten

4.1 Recovery Zahlungen für Unternehmensanleihen

Zur Notation: $p_1(t,T)$ bezeichne den Preis einer Unternehmens Nullkuponanleihe zum Zeitpunkt t mit Laufzeit T und $p_0(t,T)$ bezeichne den Preis der entsprechenden ausfallfreien Nullkuponanleihe. Der Nominalwert dieser Anleihen sei immer eins. Die Zufallsvariable δ_τ modelliere die Verlustquote.
Die folgenden drei Modelle sind oft in der Literatur zu finden:

- Das *Recovery of Treasury* Modell, kurz RT, wurde 1995 vorgeschlagen von Robert Jarrow und Stuart Turnbull. Falls zu einem beliebigen Zeitpunkt $\tau \leq T$ ein Ausfall auftritt, erhält der Halter der ausgefallenen Anleihe eine Recovery Zahlung in Höhe von $(1-\delta_\tau)$. Zur Fälligkeit T erhält der Halter der ausfallgefährdeten Anleihe daher die Zahlung $p_1(T,T) = I_{\{\tau>T\}} + (1-\delta_\tau)I_{\{\tau\leq T\}}$. Insbesondere für ein $\delta_\tau \equiv \delta \in (0,1)$ erhalten wir $p_1(T,T) = (1-\delta) + \delta I_{\{\tau>T\}}$. Somit ist der Preis der Unternehmensanleihe zur Zeit $t < T$ gleich $p_1(t,T) = (1-\delta)p_0(t,T) + \delta I_{\{\tau>T\}}$.

- Im *Recovery of Face Value* Modell, kurz RF, erhält der Halter der Anleihe, falls bei $\tau \leq T$ ein Ausfall auftritt, sofort zum Ausfallzeitpunkt τ eine Recovery Zahlung in Höhe von $(1-\delta_\tau)$. Der Wert zur Fälligkeit T ist somit $p_1(T,T) = I_{\{\tau>T\}} + \frac{1-\delta_\tau}{p_0(\tau,T)} I_{\{\tau\leq T\}}$. Selbst bei deterministischer Verlustquote $\delta_\tau \equiv \delta \in (0,1)$ und deterministischen Zinssätzen ist der Wert der Recovery Zahlung zur Fälligkeit T zufällig. Dies macht das Pricing der Recovery Zahlungen bei RF schwieriger als bei RT.

- Die Annahmen des *Recovery of Market Value* Modells, kurz RM, wurden 1999 von Darrell Duffie und Kenneth Singleton vorgebracht. Der Hauptvorteil liegt darin, dass es zu einfachen Pricing Formeln für Unternehmensanleihen führt. Unter RM wird angenommen, dass die Recovery Zahlung zur Ausfallzeit $\tau \leq T$ gegeben ist durch einen Anteil $(1-\delta_\tau)$ des Wertes der Anleihe vor dem Ausfall. Dies ist eine rekursive Definition, da der Wert vor dem Ausfall von der Recovery Zahlung abhängt. Trotzdem ist es unter gewissen Annahmen möglich, einen spezifischen Preis für Unternehmensanleihen zu erhalten, wobei Recovery unter den Annahmen von RM modelliert ist (Proposition 4.4.1).

4.2 Das Modell

Wir betrachten eine Firma deren Ausfallzeit durch eine zweifach stochastische Zufallszeit gegeben ist. Die ökonomische Hintergrundfiltration stellt die Informationen dar, die durch ein arbitragefreies und vollständiges Modell für nicht ausfallgefährdete Wertpapierpreise erzeugt worden sind. Konkreter, bezeichne mit $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), Q)$ einen filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum, wobei Q bereits das risikoneutrale Maß ist. Die Preise von ausfallfreien Wertpapieren, wie etwa ausfallfreie Anleihen, sind $(\mathscr{F}_t)$-adaptierte Prozesse. Bezeichne mit (r_t) den risikolosen Zinssatz, $B_t = \exp\big(\int_0^t r_s \, ds\big)$ modelliere das Numéraire (die risikolosen Spareinlagen). Sei τ die Ausfallzeit und sei $Y_t = I_{\{\tau \le t\}}$ der dazugehörende Ausfall-Indikatorprozess. Wir setzen $\mathscr{H}_t = \sigma\big(\{Y_s : s \le t\}\big)$ und $\mathscr{G}_t = \mathscr{F}_t \vee \mathscr{H}_t$. Wir nehmen an, dass man Ausfall beobachten kann und dass Investoren zu den in der Hintergrundfiltration $(\mathscr{F}_t)$ enthaltenen Informationen Zugang haben, so dass die den Investoren zur Zeit t verfügbaren Informationen gegeben sind durch $\mathscr{G}_t$. Wir betrachten einen Markt für Kreditprodukte, der liquide genug ist, dass wir den Martingal-Modell Ansatz nutzen können; wir nutzen Q als Pricing Maß für ausfallbedrohte Wertpapiere. Ferner nehmen wir an, dass die Ausfallzeit τ unter Q eine zweifach stochastische Zufallszeit ist mit Hintergrundfiltration $(\mathscr{F}_t)$ und Hazardrate Prozess (γ_t).

4.3 Pricing Formeln

Definition 4.3.1 (**Vulnerable Claim und Recovery Zahlung**)
Ein Vulnerable Claim ist eine $\mathscr{F}_T$ messbare, zugesicherte Zahlung X,
welche zum Zeitpunkt T erfolgt, falls es keinen Ausfall gibt. Dabei entspricht $XI_{\{\tau > T\}}$ der eigentlichen Zahlung des Vulnerable Claims.
Eine Recovery Zahlung zum Ausfallzeitpunkt τ ist von der Form $Z_\tau I_{\{\tau \le T\}}$,
wobei $Z = (Z_t)_{t \ge 0}$ ein $(\mathscr{F}_t)$-adaptierter stochastischer Prozess ist und T die Fälligkeit der Recovery Zahlung.

Zu diesen Bausteinen ein Beispiel:

Beispiel 4.3.2 (**Gefährdete Option**)
Betrachte eine (europäische) Call Option mit Ausübungspreis K und Laufzeit T auf einem ausfallfreien Wertpapier (S_t) und nehme an, dass dessen Emittent zahlungsunfähig sein kann. Angenommen der Halter der Option erhält im Falle eines Ausfalls des Emittenten zur Zeit $\tau < T$ einen Anteil $(1 - \delta_\tau)$ des Wertes der Option zum Zeitpunkt des Ausfalls, dann kann dies modelliert werden als eine Kombination aus dem Vulnerable Claim $(S_T - K)^+ I_{\{\tau > T\}}$ und der Recovery Zahlung $(1 - \delta_\tau)(S_\tau - K)^+ I_{\{\tau \le T\}}$. Für den Wert des Calls gilt somit $V = (S_T - K)^+ I_{\{\tau > T\}} + (1 - \delta_\tau)(S_\tau - K)^+ I_{\{\tau \le T\}}$.

Gemäß der Preisformel $H_t = B(t)E^Q(B(T)^{-1}H \mid \mathscr{G}_t)$, $t \leq T$, erhalten wir für einen beliebigen, nichtnegativen, $\mathscr{G}_T$ messbaren Claim H:

$$H_t = E^Q\left(\exp\left(-\int_t^T r_s \,\mathrm{d}s\right)H \,\middle|\, \mathscr{G}_t\right) \tag{4.3.4}$$

Betrachte einen ausfallfreien Claim mit $\mathscr{F}_T$ messbarem Pay-Off X. Da τ eine zweifach stochastische Zufallszeit ist, nützt uns die in $(\mathscr{G}_t)$ enthaltene zusätzliche Information über den Ausfallverlauf nichts bei der Berechnung des bedingten Erwartungswerts (4.3.4) und es lässt sich schreiben

$$E^Q\left(\exp\left(-\int_t^T r_s \,\mathrm{d}s\right)X \,\middle|\, \mathscr{G}_t\right) = E^Q\left(\exp\left(-\int_t^T r_s \,\mathrm{d}s\right)X \,\middle|\, \mathscr{F}_t\right)$$

Satz 4.3.3 (**Pricing Formeln**)
Angenommen τ ist, unter Q, zweifach stochastisch mit Hintergrundfiltration $(\mathscr{F}_t)$ und Hazardrate Prozess (γ_t) und die Zufallsvariablen
$\exp(-\int_t^T R_s \,\mathrm{d}s)\,|X|$ *und* $\int_t^T |Z_s\gamma_s| \exp(-\int_t^s R_u \,\mathrm{d}u)\mathrm{d}s$
sind integrierbar bezüglich Q; definiere $R_s := r_s + \gamma_s$.
Dann gelten die folgenden Identitäten:

$$\begin{aligned} &E^Q\left(\exp\left(-\int_t^T r_s \,\mathrm{d}s\right)I_{\{\tau>T\}}X \,\middle|\, \mathscr{G}_t\right) \\ &\qquad = I_{\{\tau>t\}}E^Q\left(\exp\left(-\int_t^T R_s \,\mathrm{d}s\right)X \,\middle|\, \mathscr{F}_t\right) \end{aligned} \tag{4.3.3.1}$$

für die Pricing Formel des Vulnerable Claim und

$$\begin{aligned} &E^Q\left(I_{\{\tau>t\}}\exp\left(-\int_t^\tau r_s \,\mathrm{d}s\right)Z_\tau I_{\{\tau\leq T\}} \,\middle|\, \mathscr{G}_t\right) \\ &\qquad = I_{\{\tau>t\}}E^Q\left(\int_t^T Z_s\gamma_s \exp\left(-\int_t^s R_u \,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s \,\middle|\, \mathscr{F}_t\right) \end{aligned} \tag{4.3.3.2}$$

für die Pricing Formel der Recovery Zahlung.

Beweis. Wir starten mit der Pricing Formel (4.3.3.1). Definiere die $\mathscr{F}_T$ messbare Zufallsvariable $\tilde{X} := \exp(-\int_t^T r_s \,\mathrm{d}s)X$. Wir wenden Korrolar 2.8 an mit $s = T$ und $\Gamma_t = \int_0^t \gamma_s \,\mathrm{d}s$ und erhalten

$$E^Q(\tilde{X}I_{\{\tau>T\}} \mid \mathscr{G}_t) = I_{\{\tau>t\}}E^Q(\exp(-(\Gamma_T - \Gamma_t))\tilde{X} \mid \mathscr{F}_t)$$

Aus der Relation $\Gamma_T - \Gamma_t = \int\limits_0^T \gamma_s \,\mathrm{d}s - \int\limits_0^t \gamma_s \,\mathrm{d}s = \int\limits_t^T \gamma_s \,\mathrm{d}s$ und der Definition von $\tilde{X}$ folgt, dass $\exp\big(-(\Gamma_T - \Gamma_t)\big)\tilde{X} = \exp\big(-\int\limits_t^T (r_s + \gamma_s)\,\mathrm{d}s\big)X$ und mit $R_s = r_s + \gamma_s$ schließlich die rechte Seite von (4.3.3.1).

Als nächstes betrachen wir die Pricing Formel (4.3.3.2). Mit Lemma 2.7 erhalten wir

$$E^Q\left(I_{\{\tau>t\}} \exp\left(-\int\limits_t^\tau r_s \,\mathrm{d}s\right) Z_\tau I_{\{\tau\le T\}} \;\Big|\; \mathscr{G}_t\right)$$

$$= I_{\{\tau>t\}} \frac{E^Q\big(I_{\{\tau>t\}} \exp(-\int\limits_t^\tau r_s \,\mathrm{d}s) Z_\tau I_{\{\tau\le T\}} \mid \mathscr{F}_t\big)}{P(\tau > t \mid \mathscr{F}_t)} \tag{4.3.4.3}$$

Beachte, dass $P(\tau \le t \mid \mathscr{F}_T) = 1 - \exp\left(-\int\limits_0^t \gamma_s \,\mathrm{d}s\right)$. Somit ist die bedingte Dichte von τ gegeben $\mathscr{F}_T$ gleich $f_{\tau|\mathscr{F}_T}(t) = \gamma_t \exp\left(-\int\limits_0^t \gamma_s \,\mathrm{d}s\right)$. Daraus folgt

$$E^Q\left(I_{\{\tau>t\}} \exp\left(-\int\limits_t^\tau r_s \,\mathrm{d}s\right) Z_\tau I_{\{\tau\le T\}} \;\Big|\; \mathscr{F}_T\right)$$

$$= \int\limits_t^T \exp\left(-\int\limits_t^s r_u \,\mathrm{d}u\right) Z_s \gamma_s \exp\left(-\int\limits_0^s \gamma_u \,\mathrm{d}u\right) \mathrm{d}s$$

Wir blasen die rechte Seite der Gleichung auf und bekommen

$$\int\limits_t^T \exp\left(-\int\limits_t^s r_u \,\mathrm{d}u\right) Z_s \gamma_s \exp\left(-\int\limits_0^s \gamma_u \,\mathrm{d}u\right) \exp\left(\int\limits_0^t \gamma_u \,\mathrm{d}u\right) \exp\left(-\int\limits_0^t \gamma_u \,\mathrm{d}u\right) \mathrm{d}s$$

$$= \exp\left(-\int\limits_0^t \gamma_u \,\mathrm{d}u\right) \int\limits_t^T Z_s \gamma_s \exp\left(-\int\limits_t^s R_u \,\mathrm{d}u\right) \mathrm{d}s$$

Nun verwenden wir für $\mathscr{F}_t \subset \mathscr{F}_T$ die Turmeigenschaft

$$E^Q\left(I_{\{\tau>t\}} \exp\left(-\int\limits_t^\tau r_s \,\mathrm{d}s\right) Z_\tau I_{\{\tau\le T\}} \;\Big|\; \mathscr{F}_t\right)$$

$$= E^Q\left(E^Q\left(I_{\{\tau>t\}} \exp\left(-\int\limits_t^\tau r_s \,\mathrm{d}s\right) Z_\tau I_{\{\tau\le T\}} \;\Big|\; \mathscr{F}_T\right) \;\Big|\; \mathscr{F}_t\right)$$

und erhalten dadurch

$$E^Q\left(I_{\{\tau>t\}} \exp\left(-\int\limits_t^\tau r_s \,\mathrm{d}s\right) Z_\tau I_{\{\tau\leq T\}} \;\Big|\; \mathscr{F}_t\right)$$

$$= \exp\left(-\int\limits_0^t \gamma_u \,\mathrm{d}u\right) E^Q\left(\int\limits_t^T Z_s\gamma_s \exp\left(-\int\limits_t^s R_u \,\mathrm{d}u\right) \mathrm{d}s \;\Big|\; \mathscr{F}_t\right)$$

wobei wir auch genutzt haben, dass $P(\tau > t \mid \mathscr{F}_T) = \exp\left(-\int\limits_0^t \gamma_s \,\mathrm{d}s\right)$ und

$$P(\tau > t \mid \mathscr{F}_t) = E^Q\big(P(\tau > t \mid \mathscr{F}_T) \;\big|\; \mathscr{F}_t\big) = \exp\left(-\int\limits_0^t \gamma_s \,\mathrm{d}s\right)$$

da $\exp\left(-\int\limits_0^t \gamma_s \,\mathrm{d}s\right)$ $\mathscr{F}_t$ messbar ist.
Die Identität (4.3.3.2) folgt schlussendlich aus (4.3.4.3). □

4.4 Anwendungen

1. **Credit Default Swaps (CDS)**
2. **Recovery of Market Value**
3. **Credit Spreads und Hazardraten**

1. Credit Default Swaps:
Wie beim letzten Mal schon vorgestellt, sind die Prämienzahlungen fällig zu N Zeitpunkten $0 < t_1 < \cdots < t_N$. Zu einem Zeitpunkt t_k vor dem Ausfall bezahlt der Sicherungsnehmer (*protection buyer*) eine Prämie in Höhe von $x(t_k - t_{k-1})$, wobei x der Swap Spread in Prozentpunkten ist. Falls $\tau \leq t_N$, gibt es zudem noch eine angelaufene Prämienzahlung in Höhe von $x(\tau - t_{k-1})$, vorausgesetzt dass $t_{k-1} < \tau \leq t_k$. Falls also $\tau \leq t_N$, leistet der Sicherungsgeber (*protection seller*) die Ausfallzahlung in Höhe von δ_τ an den Nehmer zum Ausfallzeitpunkt τ, wobei die Verlustquote nun ein allgemeiner $(\mathscr{F}_t)$-adaptierter Prozess ist. Mit Hilfe von Satz 4.3.3 können wir beides bewerten. Die regulären Prämienzahlungen stellen eine Folge von

Vulnerable Claims dar. Somit erhalten wir mittels (4.3.3.1) den fairen Preis in $t = 0$,

$$\begin{aligned} V^{\text{Prämie},1} &= \sum_{k=1}^{N} E^Q\Bigg(\exp\Bigg(-\int_0^{t_k} r_u \,\mathrm{d}u\Bigg) x(t_k - t_{k-1}) I_{\{t_k<\tau\}}\Bigg) \\ &= x\sum_{k=1}^{N}(t_k - t_{k-1}) E^Q\Bigg(\exp\Bigg(-\int_0^{t_k} R_u \,\mathrm{d}u\Bigg)\Bigg) \end{aligned}$$

Die angelaufenen Prämienzahlungen stellen eine Recovery Zahlung dar, wobei Z gegeben ist durch $Z_s = x\sum_{k=1}^{N}(s - t_{k-1}) I_{\{t_{k-1}<s\le t_k\}}$. Mittels (4.3.3.2) erhalten wir auch hier den fairen Preis in $t = 0$,

$$V^{\text{Prämie},2} = x\sum_{k=1}^{N} E^Q\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} (s - t_{k-1})\gamma_s \exp\left(-\int_0^{s} R_u \,\mathrm{d}u\right) \mathrm{d}s\right)$$

Die Ausfallzahlungen stellen ebenfalls eine Recovery Zahlung dar, diesmal mit $Z_s = \delta_s$ und Fälligkeit t_N. Wir erhalten

$$V^{\text{Ausfall}} = E^Q\left(\int_0^{t_N} \delta_s\gamma_s \exp\left(-\int_0^{t_k} R_u \,\mathrm{d}u\right) \mathrm{d}s\right)$$

2. Recovery of Market Value:

Proposition 4.4.1

Angenommen τ ist, unter Q, zweifach stochastisch mit Hazardrate Prozess (γ_t), X ist integrierbar und es gelten die RM-Annahmen. Dann ist der Wert-Prozess vor dem Ausfall (V_t) eindeutig bestimmt und für $0 \le t \le T$ gegeben durch

$$V_t = E^Q\left(\exp\left(-\int_t^{T} r_s + \delta_s\gamma_s \,\mathrm{d}s\right) X \,\middle|\, \mathscr{F}_t\right) \tag{4.4.1.1}$$

Wir bemerken, dass der Claim für $\delta_t \equiv 1$ ein gewöhnlicher Vulnerable Claim ist. Dann reduziert sich (4.4.1.1) auf (4.3.3.1). Ferner ist der Claim für $\delta_t \equiv 0$ im Wesentlichen ausfallfrei. Dann reduziert sich (4.4.1.1) auf die Standard Pricing Formel für einen Claim X in einem ausfallfreien Wertpapier-Marktmodell.

3. Credit Spreads und Hazardraten:
Mit zweifach stochstischen Ausfallzeiten sind der risikoneutrale Hazardraten-Prozess (γ_t) und der Credit Spread ausfallbedrohter Anleihen $c(t,T) = -\frac{1}{T-t}\big(\ln p_1(t,T) - \ln p_0(t,T)\big)$ eng miteinander verwandt. Analytische Resultate lassen sich am einfachsten für den sofortigen Credit Spread

$$c(t,t) = \lim_{T \to t} c(t,T) = -\frac{\partial}{\partial T}\bigg|_{T=t} \big(\ln p_1(t,T) - \ln p_0(t,T)\big) \tag{4.4.2}$$

ableiten. Nehmen wir $\tau > t$ an, so dass $p_1(t,t) = p_0(t,t) = 1$ gilt, erhalten wir für $p_1(t,T)$ und entsprechend für $p_0(t,T)$

$$\frac{\partial}{\partial T}\bigg|_{T=t} \ln p_1(t,T) = \frac{\partial}{\partial T}\bigg|_{T=t} p_1(t,T) \tag{4.4.3}$$

Um die Ableitung in (4.4.3) zu berechnen, müssen wir zwischen den verschiedenen Recovery Modellen unterscheiden.
Unter RM haben wir durch Proposition 4.4.1

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial T}\bigg|_{T=t} p_1(t,T) &= -E^Q\left(\frac{\partial}{\partial T}\bigg|_{T=t} \exp\left(-\int_t^T r_s + \delta_s\gamma_s \,\mathrm{d}s\right) \Bigm| \mathscr{F}_t\right) \\ &= r_t + \delta_t\gamma_t \end{aligned} \tag{4.4.4}$$

Mit $\delta_t \equiv 0$ bei $p_0(t,T)$ und (4.4.4) ergibt sich

$$-\frac{\partial}{\partial T}\bigg|_{T=t} p_0(t,T) = r_t$$

und folglich $c(t,t) = r_t + \delta_t\gamma_t - r_t = \delta_t\gamma_t$. Der sofortige Credit Spread ist also das Produkt aus Hazardrate und Verlustquote.
Mit analogen Berechnungen lässt sich zeigen, dass auch unter RT und RF $c(t,t) = \delta_t\gamma_t$ gilt. Allerdings unterscheidet sich der Credit Spread entsprechend der verschiedenen Recovery Modelle für $(T-t) > 0$.

5 Affine Modelle

In den meisten Modellen, in denen Ausfall mit einer zweifach stochastischen Zufallszeit modelliert wird , sind (r_t) und (γ_t) Funktionen einer p dimensionalen Markovschen Zustandsvariable $(\mathbf{\Psi}_t)$ mit Zustandsraum $D \subset \mathbb{R}^p$, so dass $R_t := r_t + \gamma_t$ von der Form $R_t = R(\mathbf{\Psi}_t)$ ist für eine Funktion $R : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}_+$. Daher ist die natürliche Hintergrundfiltration gegeben durch $(\mathscr{F}_t) = \sigma\big(\{\mathbf{\Psi}_s : s \le t\}\big)$. Wir müssen also bedingte Erwartungswerte der Form

$E\left(\exp\left(-\int_t^T R(\boldsymbol{\Psi}_s)\,\mathrm{d}s\right)g(\boldsymbol{\Psi}_T)\;\middle|\;\mathscr{F}_t\right)$ für $g : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}_+$ berechnen. Da $(\boldsymbol{\Psi}_t)$ ein Markov Prozess ist, ist der bedingte Erwartungswert gegeben durch eine Funktion $f(t, \boldsymbol{\Psi}_t)$ der Zeit und des aktuellen Wertes $\boldsymbol{\Psi}_t$ der Zustandvariable. Die Funktion f lässt sich durch eine parabolische PDGL charakterisieren, was zu dem Ansatz führt, f mit Hilfe von analytischen oder numerischen Methoden für PDGL zu bestimmen. Falls $(\boldsymbol{\Psi}_t)$ zur Klasse der affinen Sprung Diffusionen zählt, wobei R eine affine Funktion ist und $g(\boldsymbol{\psi}) = \exp\left(\mathbf{u}^t\boldsymbol{\psi}\right)$ für ein $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$, dann hat f folgende Gestalt:

$$f(t, \boldsymbol{\psi}) = \exp\left(\alpha(t,T) + \boldsymbol{\beta}^t(t,T)\boldsymbol{\psi}\right) \tag{5.4}$$

mit deterministischen Funktionen $\alpha : [0,T] \to \mathbb{R}$ und $\boldsymbol{\beta} : [0,T] \to \mathbb{R}^p$, die durch ein $(p+1)$ dimensionales GDGL System bestimmt sind, welches einfach numerisch zu lösen ist.

5.1 Elementare Ergebnisse

Wir nehmen an, dass die Zustandsvariable Ψ_t die eindeutige Lösung der SDGL

$$\begin{cases} \mathrm{d}\Psi_t = \mu(\Psi_t)\mathrm{d}t + \sigma(\Psi_t)\mathrm{d}W_t \\ \Psi_0 = \psi \in D \end{cases} \tag{5.1.3}$$

mit Zustandsraum $D \subseteq \mathbb{R}$ ist. Hierbei ist (W_t) eine Standard eindimensionale Brownsche Bewegung auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), P)$, $\mu : D \to \mathbb{R}$ und $\sigma : D \to \mathbb{R}_+$ sind stetige Funktionen. Betrachte Funktionen $R, g : D \to \mathbb{R}_+$. Da (Ψ_t) Markovsch ist, gegeben der aktuelle Wert Ψ_t, ist die zukünftige Entwicklung $(\Psi_s)_{s \geq t}$ der Zustandsvariable unabhängig von $\mathscr{F}_t$, und wir erhalten

$$E\left(\exp\left(-\int_t^T R(\Psi_s)\,\mathrm{d}s\right)g(\Psi_T)\;\middle|\;\mathscr{F}_t\right) = f(t, \Psi_t) \tag{5.1.4}$$

für eine Funktion $f : [0,T] \times D \to \mathbb{R}_+$. Das folgende Lemma liefert die oben angekündigte Charakterisierung für f. Dabei bezeichnen untere Indizes die partiellen Ableitungen.

Lemma 5.1.1 (**Feynman-Kac**)
Falls f einmal stetig differenzierbar in t und zweimal stetig differenzierbar in ψ ist, löst f das Endwertproblem

$$\begin{cases} f_t + \mu(\psi) f_\psi + \frac{1}{2}\sigma^2(\psi) f_{\psi\psi} = R(\psi) f, & (t,\psi) \in [0,T) \times D \\ f(T,\psi) = g(\psi), & \psi \in D \end{cases} \tag{5.1.1.1}$$

Umgekehrt heißt das: angenommen die Funktion g ist beschränkt, $R(\psi) \geq 0 \quad \forall\, \psi \in D$ und $\tilde{f} : [0,T] \times D \to \mathbb{R}_+$ ist eine beschränkte Lösung des Endwertproblems (5.1.1.1)*. Sei* (Ψ_t) *eine Lösung der SDGL* (5.1.3)*. Dann gilt*

$$E\left(\exp\left(-\int_t^T R(\Psi_s)\,\mathrm{d}s\right) g(\Psi_T)\;\Big|\; \mathscr{F}_t\right) = \tilde{f}(t,\Psi_t)$$

Die folgende Annahme garantiert, dass die Lösung der PDGL (5.1.1.1) mit Endbedingung $g(\psi) = \exp(u\psi)$, $u\psi \leq 0$ für $\psi \in D$, von der Form (5.4) ist. Beachte, dass $g \equiv 1$ für $u = 0$; dies ist die dazugehörige Endbedingung für das Pricing von Nullkuponanleihen.

Annahme:
R, μ und σ^2 sind affine Funktionen von ψ, das heißt, es gibt Konstanten $\rho^0, \rho^1, k^0, k^1, h^0, h^1$ so dass $R(\psi) = \rho^0 + \rho^1\psi$, $\mu(\psi) = k^0 + k^1\psi$ und $\sigma^2(\psi) = h^0 + h^1\psi$. Für alle $\psi \in D$ gilt außerdem $h^0 + h^1\psi \geq 0$ und $\rho^0 + \rho^1\psi \geq 0$.

Sei $T > 0$ vorgegeben. Wir versuchen eine Lösung der Form $\tilde{f}(t,\psi) = \exp\big(\alpha(t,T) + \beta(t,T)\psi\big)$ mit stetig differenzierbaren Funktionen $\alpha(\cdot\,,T)$ und $\beta(\cdot\,,T)$ für (5.1.1.1) zu finden. Wegen $\tilde{f}(T,\psi) = g(\psi) = \exp(u\psi)$ erhalten wir sofort die Endbedingungen $\alpha(T,T) = 0$ und $\beta(T,T) = u$. Auf Grund der Form von $\tilde{f}$ erhalten wir

$$\tilde{f}_t = (\dot{\alpha} + \dot{\beta}\psi)\tilde{f}, \;\; \tilde{f}_\psi = \beta\tilde{f} \;\text{ und }\; \tilde{f}_{\psi\psi} = \beta^2\tilde{f}$$

wobei $\dot{\alpha}$ und $\dot{\beta}$ die Ableitungen von α und β nach der Zeit t sind. Unter obiger Annahme lässt sich (5.1.1.1) nun so schreiben

$$(\dot{\alpha} + \dot{\beta}\psi)\tilde{f} + (k^0 + k^1\psi)\beta\tilde{f} + \frac{1}{2}(h^0 + h^1\psi)\beta^2\tilde{f} = (\rho^0 + \rho^1\psi)\tilde{f}$$

Teilen durch $\tilde{f}$ und Umformen liefert

$$\dot{\alpha} + k^0\beta + \frac{1}{2}h^0\beta^2 - \rho^0 + (\dot{\beta} + k^1\beta + \frac{1}{2}h^1\beta^2 - \rho^1)\psi = 0$$

Da die Gleichung für alle $\psi \in D$ gelten muss, erhalten wir folgendes GDGL System:

$$\begin{cases} \dot{\beta}(t,T) &= \rho^1 - k^1\beta(t,T) - \frac{1}{2}h^1\beta^2(t,T) \\ \beta(T,T) = u \end{cases} \tag{5.1.5}$$

$$\begin{cases} \dot{\alpha}(t,T) &= \rho^0 - k^0\beta(t,T) - \frac{1}{2}h^0\beta^2(t,T) \\ \alpha(T,T) = 0 \end{cases} \tag{5.1.6}$$

Proposition 5.1.2

Angenommen es gilt obige Annahme, das GDGL System (5.1.5), (5.1.6) *hat eine eindeutige Lösung* (α, β) *auf* $[0,T]$ *und es gibt ein* C*, so dass* $\beta(t,T)\psi \leq C \;\; \forall\, t \in [0,T], \psi \in D$. *Dann ist*

$$E\left(\exp\left(-\int_t^T R(\Psi_s)\,\mathrm{d}s\right)\exp\left(u\Psi_T\right) \,\Big|\, \mathscr{F}_t\right) = \exp\big(\alpha(t,T) + \beta(t,T)\Psi_t\big)$$

Beweis. $\beta(t,T)\psi \leq C$ liefert die Beschränktheit für $\tilde{f}(t,\psi) = \exp\big(\alpha(t,T) + \beta(t,T)\psi\big)$. Das Ergebnis folgt aus Lemma 5.1.1. □

5.2 Die CIR Wurzel-Diffusion

In diesem Modell ist (Ψ_t) gegeben durch die Lösung der SGDL

$$\begin{cases} \mathrm{d}\Psi_t = \kappa(\bar{\theta} - \Psi_t)\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{\Psi_t}\,\mathrm{d}W_t \\ \Psi_0 = \psi > 0 \end{cases} \tag{5.2.1}$$

mit Parametern $\kappa, \bar{\theta}, \sigma > 0$ und Zustandsraum $D = [0, \infty)$. Im Sinne unserer obigen Annahme sind die Parameter $k^0 = \kappa\bar{\theta}$, $k^1 = -\kappa$, $h^0 = 0$ und $h^1 = \sigma^2$. Es ist bekannt, dass (5.2.1) eine globale Lösung besitzt.

Im CIR-Modell können (5.1.5) und (5.1.6) explizit gelöst werden. Mit Proposition 5.1.2 haben wir

$$E\left(\exp\left(-\int_t^T (\rho^0 + \rho^1\Psi_s)\,\mathrm{d}s\right) \,\Big|\, \mathscr{F}_t\right) = \exp\big(\alpha(T-t) + \beta(T-t)\Psi_t\big)$$

mit

$$\beta(\tau) = \frac{-2\rho^1(\mathrm{e}^{\gamma\tau} - 1)}{\gamma - \kappa + \mathrm{e}^{\gamma\tau}(\gamma + \kappa)} \tag{5.2.2}$$

$$\alpha(\tau) = -\rho^0\tau + 2\frac{\kappa\bar{\theta}}{\sigma^2}\ln\left(\frac{2\gamma\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\tau(\gamma + \kappa)}{\gamma - \kappa + \mathrm{e}^{\gamma\tau}(\gamma + \kappa)}\right) \tag{5.2.3}$$

wobei $\tau := T - t$ und $\gamma := \sqrt{\kappa^2 + 2\sigma^2\rho^1}$.

5.3 Erweiterungen

Ein Sprung Diffusions Modell für (Ψ_t)**.** In diesem Abschnitt nehmen wir an, dass (Ψ_t) die eindeutige Lösung der SDGL

$$\begin{cases} \mathrm{d}\Psi_t = \mu(\Psi_t)\mathrm{d}t + \sigma(\Psi_t)\mathrm{d}W_t + \mathrm{d}Z_t \\ \Psi_0 = \psi \in D \end{cases} \tag{5.3.3}$$

ist. Hierbei ist (Z_t) ein reiner Sprung Prozess, dessen Sprungintensität zur Zeit t gleich $\lambda^Z(\Psi_t)$ ist für eine Funktion $\lambda^Z : D \to \mathbb{R}_+$ und dessen Sprunghöhen Verteilung die Verteilungsfunktion ν auf $\mathbb{R}$ hat. Dies bedeutet, dass, gegeben eine Trajektorie $(\Psi_t(\omega))_{t\geq 0}$ des Faktorprozesses, (Z_t) zu den Sprungzeiten eines inhomogenen Poisson Prozesses[1] mit zeitvariierender Intensität $\lambda^Z(t, \Psi_t)$ springt; die Höhe der Sprünge hat die Verteilungsfunktion ν. Wir nehmen nun an, dass obige Annahme gilt und $\lambda^Z(\psi) = l^0 + l^1\psi$ ist für Konstanten l^0, l^1, so dass $\lambda^Z(\psi) > 0 \ \ \forall\, \psi \in D$. In diesem Fall sagen wir, dass (Ψ_t) einer affinen Sprung Diffusion folgt. Bezeichne mit $\hat{\nu}(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-xy} \, \mathrm{d}\,\nu(y) \in [0, \infty)$ die erweiterte Laplace-Stieltjes Transformation von ν für $x \in \mathbb{R}$ (mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$ anstatt dem üblichen Definitionsbereich $[0, \infty)$). Betrachte die folgende Erweiterung des GDGL Systems (5.1.5) (5.1.6):

$$\dot{\beta}(t,T) = \rho^1 - k^1\beta(t,T) - \frac{1}{2}h^1\beta^2(t,T) - l^1\Big(\hat{\nu}\big(-\beta(t,T)\big) - 1\Big) \tag{5.3.4}$$

$$\dot{\alpha}(t,T) = \rho^0 - k^0\beta(t,T) - \frac{1}{2}h^0\beta^2(t,T) - l^0\Big(\hat{\nu}\big(-\beta(t,T)\big) - 1\Big) \tag{5.3.5}$$

mit Endbedingungen $\beta(T,T) = u$ für ein $u \leq 0$ und $\alpha(T,T) = 0$. Angenommen das System (5.3.4), (5.3.5) hat eine eindeutige Lösung (α, β) und $\beta(t,T)\psi \leq C \ \ \forall\, t \in [0,T], \psi \in D$ (für l^0 oder $l^1 \neq 0$ impliziert dies, dass $\hat{\nu}\big(-\beta(t,T)\big) < \infty \ \ \ \forall\, t$). Definiere $\tilde{f}(t,\psi) = \exp\big(\alpha(t,T) + \beta(t,T)\psi\big)$. Dann kann mit ähnlichen Argumenten wie oben gezeigt werden, dass $E\left(\exp\left(-\int_t^T R(\Psi_s)\,\mathrm{d}s\right)\exp\left(u\Psi_T\right) \,\middle|\, \mathscr{F}_t\right) = \tilde{f}(t, \Psi_t)$.

Beispiel 5.3.1 (**Das Modell von Darrell Duffie und Nicolae Gârleanu (2001)**)
Die Dynamik von (Ψ_t) ist gegeben durch

$$\mathrm{d}\Psi_t = \kappa(\bar{\theta} - \Psi_t)\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{\Psi_t}\,\mathrm{d}W_t + \mathrm{d}Z_t \tag{5.3.1.1}$$

[1] Die konstante Intensität λ wird ersetzt durch eine deterministische Funktion $\lambda(\cdot) \geq 0$. Das Integral $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)\,\mathrm{d}s$ wird als Intensitätsmaß oder auch kumulative/zunehmende Intensitätsfunktion bezeichnet.

mit Parametern $\kappa, \bar{\theta}, \sigma > 0$ und einem Sprung Prozess (Z_t) mit konstanter Sprungintensität $l^0 > 0$ und exponentialverteilter[2]Sprunghöhe mit Parameter $\frac{1}{\mu}$. Nach Duffie und Gârleanu wird das Modell (5.3.1.1) auch als grundlegende affine Sprung Diffusion bezeichnet.
Als Nächstes berechnen wir die Laplace-Stieltjes Transformation $\hat{\nu}$.
Für $u > -\frac{1}{\mu}$ erhalten wir

$$\hat{\nu}(u) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-ux} \frac{1}{\mu} \mathrm{e}^{-\frac{x}{\mu}} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{1+\mu u}$$

Für $u \leq -\frac{1}{\mu}$ bekommen wir $\hat{\nu}(u) = \infty$. Wir haben also alle nötigen Zutaten, um die Gleichungen (5.3.4) und (5.3.5) aufzustellen. Im Falle des Modells (5.3.1.1) ist es tatsächlich möglich, diese Gleichungen explizit zu lösen. Allerdings ist die explizite Lösung sehr lang, wir verzichten deshalb auf Details.

Anwendung für Recovery Zahlungen. In einem Modell mit einer zweifach stochastischen Ausfallzeit τ mit risikoneutraler Hazardrate $\gamma(\Psi_t)$ ist der Preis in t einer Recovery Zahlung in Höhe von $(1-\delta)$ zur Ausfallzeit τ gemäß Satz 4.3.3 gleich

$$(1-\delta) E\left(\int_t^T \gamma(\Psi_s) \exp\left(-\int_t^s R(\Psi_u)\,\mathrm{d}u \right) \mathrm{d}s \;\Big|\; \mathscr{F}_t \right) \tag{5.3.6}$$

wobei wieder $R(\psi) = r(\psi) + \gamma(\psi)$. Unter Verwendung des Satzes von Fubini(-Tonelli) ist dies gleich

$$(1-\delta) \int_t^T E\left(\gamma(\Psi_s) \exp\left(-\int_t^s R(\Psi_u)\,\mathrm{d}u \right) \;\Big|\; \mathscr{F}_t \right) \mathrm{d}s \tag{5.3.7}$$

Wir nehmen nun an, dass $\gamma(\psi) = \gamma^0 + \gamma^1 \psi$, dass $R(\psi) = \rho^0 + \rho^1 \psi$ und dass (Ψ_t) gegeben ist durch eine affine Diffusion wie oben eingeführt. In diesem Fall ist der Erwartungswert in (5.3.7) gegeben durch eine Funktion $F(t, s, \Psi_s)$, die ausgerechnet werden kann, so dass (5.3.7) durch eindimensionale numerische Integration berechnet werden kann. Definiere für $0 \leq t \leq s$ die Funktion $\tilde{f}(t,s,\psi) = \exp\big(\alpha(t,s) + \beta(t,s)\psi\big)$, wobei $\alpha(\cdot\,, s)$ und $\beta(\cdot\,, s)$ die GDGL (5.3.4) und (5.3.5) mit Endwertbedingungen $\alpha(s,s) = \beta(s,s) = 0$ lösen. Bezeichne mit $\hat{\nu}'(x)$ die Ableitung der Laplace-Stieltjes Transformation von ν. Dann kann man zeigen, dass $F(t,s,\psi) = \tilde{f}(t,s,\psi)\big(A(t,s) + B(t,s)\psi\big)$, wobei $A(\cdot\,, s)$ und $B(\cdot\,, s)$ das folgende GDGL System lösen:

$$\dot{B}(t,s) + k^1 B(t,s) + h^1 \beta B(t,s) - l^1 \hat{\nu}'(-\beta) B(t,s) = 0 \tag{5.3.8}$$

$$\dot{A}(t,s) + k^0 B(t,s) + h^0 \beta B(t,s) - l^0 \hat{\nu}'(-\beta) B(t,s) = 0 \tag{5.3.9}$$

[2]Für $X \sim \mathrm{Exp}(\frac{1}{\mu})$, $\mu > 0$, ist die Dichte $f(x) = \frac{1}{\mu}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\mu}}$, $x > 0$, die Verteilungsfunktion $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{\mu}}$, $x > 0$, der Erwartungswert $E(X) = \mu$ und die Varianz $Var(X) = \mu^2$.

mit Endwertbedingungen $A(s,s) = \gamma_0$ und $B(s,s) = \gamma_1$. (5.3.8) und (5.3.9) können wieder direkt numerisch ausgewertet werden.

6 Bedingt unabhängige Ausfälle

6.1 Intensitätsmodelle für Kreditrisiko bei Portfolios

Zur Notation: Wir betrachten ein Portfolio von m Kreditnehmern mit Ausfallzeiten τ_i und Ausfall Indikatorprozessen $Y_{t,i} = Y_i(t) = I_{\{\tau_i \leq t\}}$, $1 \leq i \leq m$, auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, wobei die Auslegung von P, ob physisches ($\Rightarrow$ Real World) Maß oder risikoneutrales Maß, vom Kontext abhängt.
In den dynamischen Portfolio Kreditrisiko Modellen ist es vorteilhaft, Überlebensfunktionen zu betrachten anstatt Verteilungsfunktionen. $\bar{F}_i(t) = P(\tau_i > t)$ bezeichnet die Überlebensfunktion von Kreditnehmer i ; $\bar{F}(t_1, \ldots, t_m) = P(\tau_1 > t_1, \tau_2 > t_2, \ldots, \tau_m > t_m)$ bezeichnet die gemeinsame Überlebensfunktion. Wir beschränken uns bei unserer Analyse durchgehend auf Modelle ohne gleichzeitige Ausfälle. Dafür bezeichnen wir die geordneten Ausfallzeiten mit $T_0 < T_1 < \cdots < T_m$, wobei $T_0 = 0$ und $T_n = \min\{\tau_i : \tau_i > T_{n-1},\ 1 \leq i \leq m\}$ für $1 \leq n \leq m$. Mit $\xi_n \in \{1, \ldots, m\}$ bezeichnen wir die Identität der Firma, die zur Zeit T_n Ausfall erleidet, d.h. $\xi_n = i$, falls $\tau_i = T_n$. Die Menge der Firmen ohne Ausfall unmittelbar nach T_n ist $A_n = \{1 \leq i \leq m : Y_i(T_n) = 0\} = \{1, \ldots, m\} \setminus \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ für $n \geq 1$.
Wie in den vorigen Abschnitten stellt $(\mathscr{F}_t)$ unsere Hintergrundfiltration dar, typischerweise von einem beobachtbaren Prozess (Ψ_t) erzeugt, der ökonomische Faktoren repräsentiert. Außerdem führen wir die Filtrationen $\{\mathscr{H}_t^i\}, 1 \leq i \leq m$, $(\mathscr{H}_t)$ und $(\mathscr{G}_t)$ ein mit

$$\mathscr{H}_t^i = \sigma\big(\{Y_{s,i} : s \leq t\}\big), \quad \mathscr{H}_t = \mathscr{H}_t^i \vee \cdots \vee \mathscr{H}_t^m \quad \text{und} \quad \mathscr{G}_t = \mathscr{F}_t \vee \mathscr{H}_t \tag{6.1.1}$$

6.2 Bedingt unabhängige Ausfallzeiten

In diesem Abschnitt diskutieren wir allgemeine mathematische Eigenschaften von Modellen mit bedingt unabhängigen Ausfällen. Wir starten mit einer formalen Definition von bedingt unabhängigen Ausfällen.

Definition 6.2.1 (Bedingt unabhängige, zweifach stochastische Zufallszeiten) *Seien ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ mit Hintergrundfiltration $(\mathscr{F}_t)$ und Zufallszeiten $\tau_i, \ldots, \tau_m$ gegeben. Die τ_i sind bedingt unabhängige, zweifach stochastische Zufallszeiten, falls*

(i) jedes der τ_i eine zweifach stochastische Zufallszeit im Sinne von Definition 2.9 ist mit Hintergrundfiltration $(\mathscr{F}_t)$ und $(\mathscr{F}_t)$-bedingtem Hazardrate-Prozess $(\gamma_{t,i})$ und

(ii) die Zufallsvariablen $\tau_i, \ldots, \tau_m$, gegeben $\mathscr{F}_\infty$, bedingt unabhängig sind, das heißt, für alle $t_1, \ldots, t_m > 0$ haben wir

$$P(\tau_1 \leq t_1, \tau_2 \leq t_2, \ldots, \tau_m \leq t_m \mid \mathscr{F}_\infty) = \prod_{i=1}^{m} P(\tau_i \leq t_i \mid \mathscr{F}_\infty) \tag{6.2.1.1}$$

Konstruktion und Simulation einer bedingt unabhängigen, zweifach stochastischen Zufallszeit mittels Schranken

Das folgende Lemma erweitert Lemma 2.10.

Lemma 6.2.2

Seien $(\gamma_{t,1}), \ldots, (\gamma_{t,m})$ positive, $(\mathscr{F}_t)$-adaptierte Prozesse, so dass $\Gamma_{t,i} := \int_0^t \gamma_{s,i}\, ds$ streng monoton steigend und für jedes $t > 0$ endlich ist. Sei $\mathbf{E} = (E_1, \ldots, E_m)^t$ ein Vektor unabhängiger, standard exponentialverteilter Zufallsvariablen, der unabhängig von $\mathscr{F}_\infty$ ist. Definiere τ_i durch $\tau_i = \Gamma_i^{-1}(E_i)$. Dann sind $\tau_1, \ldots, \tau_m$ bedingt unabhängige, zweifach stochastische Zufallszeiten.

Beweis. Gemäß Lemma 2.10 ist jedes der τ_i eine zweifach stochastische Zufallszeit mit $(\mathscr{F}_t)$-bedingten Hazardrate Prozessen $(\gamma_{t,i})$. Es bleibt die bedingte Unabhängigkeit zu zeigen. Wir verwenden $\tau_i \leq t \Longleftrightarrow E_i \leq \Gamma_{t,i}$ und bekommen

$$\begin{aligned}
P(\tau_1 \leq t_1, \tau_2 \leq t_2, \ldots, \tau_m \leq t_m \mid \mathscr{F}_\infty) &= P(E_1 \leq \Gamma_{t_1,1}, E_2 \leq \Gamma_{t_2,2}, \ldots, E_m \leq \Gamma_{t_m,m} \mid \mathscr{F}_\infty) \\
&= \prod_{i=1}^{m} P(E_i \leq \Gamma_{t_i,i} \mid \mathscr{F}_\infty) \\
&= \prod_{i=1}^{m} P(\tau_i \leq t_i \mid \mathscr{F}_\infty) \qquad (6.2.2.1)
\end{aligned}$$

(6.2.2.1) gilt, da die Zufallsvariablen $\Gamma_{t_i,i}$ messbar sind bezüglich $\mathscr{F}_\infty$, während die E_i gegenseitig unabhängig und unabhängig von $\mathscr{F}_\infty$ sind. □

Wie auch im univariaten Fall besitzt Lemma 6.2.2 eine Umkehrung (vgl. [1]) .

Algorithmus 6.2.3 (**Multivariate Schranken-Simulation**)
Lemma 6.2.2 ist die Grundlage für den folgenden Simulationsalgorithmus:

(1) Erzeuge eine Trajektorie der Hazardrate Prozesse $(\gamma_{t,i})$ für $i = 1, \ldots, m$. Hierbei können die gleichen Methoden genutzt werden wie im univariaten Fall. Beachte jedoch, dass dieser Schritt für einen hoch dimensionalen Faktorvektor ziemlich zeitaufwändig werden kann.

(2) Erzeuge einen Vektor $\mathbf{E}$ unabhängiger, standard exponentialverteilter Zufallsvariablen (der Schrankenvektor) und setze $\tau_i = \Gamma_i^{-1}(E_i)$, $1 \leq i \leq m$.

Rekursive Ausfallzeit Simulation

Lemma 6.2.4
Seien $\tau_i, \ldots, \tau_m$ bedingt unabhängige, zweifach stochastische Zufallszeiten mit Hazardrate-Prozessen $(\gamma_{t,1}), \ldots, (\gamma_{t,m})$. Dann ist T_1 eine zweifach stochastische Zufallszeit mit $(\mathscr{F}_t)$-bedingtem Hazardrate-Prozess $\bar{\gamma}_t := \sum_{i=1}^{m} \gamma_{t,i}$, $t \geq 0$.

Beweis. Unter Verwendung der bedingten Unabhängigkeit τ_i erhalten wir

$$
\begin{aligned}
P(T_1 > t \mid \mathscr{F}_\infty) &= P(\tau_1 > t, \tau_2 > t, \ldots, \tau_m > t \mid \mathscr{F}_\infty) \\
&= \prod_{i=1}^{m} \exp\left(-\int_0^t \gamma_{s,i}\,\mathrm{d}s\right) \\
&= \exp\left(\sum_{i=1}^{m}\left(-\int_0^t \gamma_{s,i}\,\mathrm{d}s\right)\right) \\
&= \exp\left(-\int_0^t \left(\sum_{i=1}^{m} \gamma_{s,i}\right)\mathrm{d}s\right) \\
&= \exp\left(-\int_0^t \bar{\gamma}_s\,\mathrm{d}s\right)
\end{aligned}
$$

Da letzterer Ausdruck $\mathscr{F}_t$ messbar ist, folgt das Ergebnis. □

Proposition 6.2.5
Unter den Annahmen von Lemma 6.2.5 bekommen wir

$$
P\big(\xi_1 = i \mid \mathscr{F}_\infty \vee \sigma(T_1)\big) = \frac{\gamma_i(T_1)}{\bar{\gamma}(T_1)}, \quad i \in \{1, \ldots, m\}
$$

Beweis. Vgl. [1] □

Algorithmus 6.2.6 (Rekursive Ausfallzeit Simulation)
Dieser Algorithmus simuliert eine Umsetzung der Folge (T_n, ξ_n) bis zu einem Fälligkeitstermin T. Setze $A_0 := \{1, \ldots, m\}$ (zur Erinnerung:
$A_n = \{1 \leq i \leq m : Y_i(T_n) = 0\} = \{1, \ldots, m\} \setminus \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$, $n \geq 1$, ist Menge der Firmen ohne Ausfall unmittelbar nach T_n). Definiere $\bar{\gamma}_t^n := \sum_{i \in A_n} \gamma_{t,i}$, $0 \leq n \leq m$. Dann verfährt der Algorithmus nach folgenden Schritten.

(1) Erzeuge eine Trajektorie der Hazardraten Prozesse $(\gamma_{t,i})$.

(2) Erzeuge T_1 mit der Standard univariaten Schranken Simulation und verwende dabei, dass T_1 die Hazardrate $(\bar{\gamma}_t^0)$ hat (Lemma 6.2.4).

(3) Bestimme ξ_1 als Realisierung einer Zufallsvariablen ξ mit $P(\xi = i) = \dfrac{\gamma_i(T_1)}{\bar{\gamma}^0(T_1)}$ (Proposition 6.2.5).

(4) Stoppe, falls $T_1 \geq T$. Andernfalls beachte, dass für bedingt unabhängige Ausfälle

$$\begin{aligned} P(T_2 - T_1 > t \mid T_1, \xi_1, \mathscr{F}_\infty) &= \frac{P(\tau_j > T_1 + t,\ j \in A_1, \mid T_1, \xi_1, \mathscr{F}_\infty)}{P(\tau_j > T_1,\ j \in A_1, \mid T_1, \xi_1, \mathscr{F}_\infty)} \\ &= \exp\left(- \int\limits_{T_1}^{T_1+t} \bar{\gamma}_s^1 \, \mathrm{d}s \right) \end{aligned} \tag{6.2.6.1}$$

Erzeuge die Wartezeit $T_2 - T_1$ mittels univariater Schranken Simulation unter Verwendung von (6.2.6.1). Bestimme ξ_2 wie zuvor und benutze dabei, dass für $i \in A_i$

$$P(\xi_2 = i \mid T_1, T_2, \xi_1, \mathscr{F}_\infty) = \frac{\gamma_i(T_2)}{\bar{\gamma}^1(T_2)}.$$

(5) Fahre auf diese Weise fort bis $T_n \geq T$ für ein $n \leq m$ oder bis alle Firmen Ausfälle erlitten haben.

Martingal Intensitäten
Die folgende Proposition zeigt, dass Martingal Intensitäten und Hazardraten übereinstimmen für bedingt unabhängige Ausfälle.

Proposition 6.2.7
Seien $\tau_i, \ldots, \tau_m$ bedingt unabhängige, zweifach stochastische Zufallszeiten mit Hazardrate-Prozessen $(\gamma_{t,1}), \ldots, (\gamma_{t,m})$. Dann ist der Prozess $M_{t,i} := Y_{t,i} - \int\limits_0^{t \wedge \tau_i} \gamma_{s,i}\, ds$ ein $(\mathscr{G}_t)$-Martingal mit $(\mathscr{G}_t)$ wie in (6.1.1).

Beweis. Vgl. [1] □

6.3 Beispiele und Anwendungen

In den meisten Modellen mit bedingt unabhängigen Ausfällen werden Hazardraten durch Linearkombinationen unabhängier affiner Diffusionen, möglicherweise mit Sprüngen, modelliert. Ein typisches Modell ist das folgende:

$$\gamma_{t,i} = \gamma_{i0} + \sum_{j=1}^{p} \gamma_{ij} \Psi_{t,j}^{\text{syst}} + \Psi_{t,i}^{\text{id}}\,, \qquad 1 \leq i \leq m. \tag{6.3.1}$$

Hierbei sind $(\Psi_{t,j}^{\text{syst}})$, $1 \leq j \leq p$, und $(\Psi_{t,i}^{\text{id}})$, $1 \leq i \leq m$, unabhängige CIR Wurzel Diffusionen oder, etwas allgemeiner, grundlegende affine Sprung Diffusionen wie in (5.3.1.1); die Faktorgewichte γ_{ij} sind nichtnegative Konstanten.
$(\boldsymbol{\Psi}_t^{\text{syst}}) = \big((\Psi_{t,1}^{\text{syst}}), \ldots, (\Psi_{t,p}^{\text{syst}})\big)^t$ repräsentiert die systematischen Faktoren, wohingegen $(\Psi_{t,i}^{\text{id}})$ ein spezifischer Faktor ist, der nur die Hazardrate von Kreditnehmer i beeinflusst. Beachte, dass das Gewicht des spezifischen Faktors in die Parameter für die Dynamik von (Ψ_t^{id}) mit eingebaut werden kann, so dass wir kein zusätzliches Faktorgewicht brauchen. In diesem Kapitel werden wir durchweg annehmen, dass die Hintergrundfiltration von $(\boldsymbol{\Psi}_t^{\text{syst}})$ und $(\Psi_{t,i}^{\text{id}})$, $1 \leq i \leq m$ erzeugt ist. In praktischen Anwendungen des Modells wird der gegenwärtige Wert dieser Prozesse von beobachteten Preisen ausfallbedrohter Anleihen abgeleitet.
Darrell Duffie (1999) hat ein Modell der Form (6.3.1) mit $p = 2$ berechnet. In diesem Modell sind alle Faktorprozesse CIR Wurzel Diffusionen, so dass deren Dynamik durch das Parametertripel $(\kappa, \bar{\theta}, \sigma)$ charakterisiert ist.
In ihrer einflussreichen Fallstudie über das Pricing von CDO benutzen Duffie und Gârleanu (2001) grundlegende affine Sprung Diffusionen der Form (5.3.1.1), um die Faktoren, die die Hazardraten bestimmen, zu modellieren. Sprünge in (γ_t) stellen Schocks dar, welche die Ausfallwahrscheinlichkeit einer Firma erhöhen. Sie betrachten ein homogenes Modell mit einem systematischen Faktor, das heißt $\gamma_{t,i} = \Psi_t^{\text{syst}} + \Psi_{t,i}^{\text{id}}$, $1 \leq i \leq m$, und nehmen an, dass die Geschwindigkeit der Mean Reversion κ, die Volatilität σ und die durchschnittliche Sprunghöhe μ identisch sind für (Ψ_t^{syst}) und $(\Psi_{t,i}^{\text{id}})$. Man kann zeigen, dass dies impliziert, dass die Summe $\gamma_{t,i} = \Psi_t^{\text{syst}} + \Psi_{t,i}^{\text{id}}$ einer grundlegenden affinen Sprung Diffusion mit Parametern κ, $\bar{\theta}^{\text{syst}} + \bar{\theta}^{\text{id}}$, σ, $(l^0)^{\text{syst}} + (l^0)^{\text{id}}$ und μ folgt.

Pricing von Single-Name Kreditprodukten.

Angenommen $\tau_1, \ldots, \tau_m$ sind bedingt unabhängige, zweifach stochastische Zufallszeiten. Betrachte ein Single-Name Kreditprodukt mit Laufzeit T dessen Pay-Off H nur von dem Ausfallverlauf von Firma i und von der Entwicklung der Preise ausfallfreier Wertpapiere abhängt und dadurch $\mathscr{G}_T^i$ messbar ist. Ein typisches Beispiel ist ein Vulnerable Claim der Form $H = I_{\{\tau_i > T\}} X$ für eine $\mathscr{F}_T$ messbare Zufallsvariable X. Man kann zeigen, dass

$$E^Q\left(\exp\left(-\int_t^T r_s \,\mathrm{d}s\right) H \;\Big|\; \mathscr{G}_t^i\right) = E^Q\left(\exp\left(-\int_t^T r_s \,\mathrm{d}s\right) H \;\Big|\; \mathscr{G}_t\right), \qquad t \leq T$$

gilt, wobei (r_t) der $\mathscr{F}_t$-adaptierte risikolose Momentanzins ist. Die linke Seite obiger Gleichung stellt den Preis des Claim H in einem Einzelfirma Modell dar, bei dem die den Investoren zur Zeit t verfügbaren Informationen durch $\mathscr{G}_t^i$ gegeben sind, während die rechte Seite den Preis von H in dem Portfolio Modell darstellt, bei dem die Investoren zur Zeit t Zugang zur größeren Informationsmenge $\mathscr{G}_t$ haben, die die Ausfallinformationen aller Firmen im Portfolio beinhaltet. Somit bleiben die Preisformeln für ein Single-Name Kreditprodukt, die man in einem Einzelfirma Modell mit einer zweifach stochastisch Ausfallzeit erhält, wie etwa die Pricing Formeln aus Satz 4.3.3, gültig in einem Portfolio Modell mit bedingt unabhängigen Ausfallzeiten.

Außerdem können mit Hazardraten wie in (6.3.1) die meisten tatsächlichen Berechnungen reduziert werden auf ein eindimensionales Problem mit affinen Prozessen, auf das die Ergebnisse aus Abschnitt 5 zutreffen. Als einfaches, spezielles Beispiel betrachten wir die Berechnung der bedingten Überlebenswahrscheinlichkeit von Kreditnehmer i. Wie erhalten aus obiger Bemerkung und Satz 4.3.3, dass

$$P(\tau_i > T \mid \mathscr{G}_t) = P(\tau_i > T \mid \mathscr{G}_t^i) = I_{\{\tau_i > t\}} E\left(\exp\left(- \int_t^T \gamma_{s,i} \, \mathrm{d}s \right) \,\Big|\, \mathscr{F}_t \right)$$

Für Hazardraten Prozesse der Form (6.3.1) gleicht dies

$$I_{\{\tau_i > t\}} \mathrm{e}^{-\gamma_{i0}(T-t)} E\left(\exp\left(- \int_t^T \Psi_{s,i}^{\mathrm{id}} \, \mathrm{d}s \right) \,\Big|\, \mathscr{F}_t \right) \prod_{j=1}^{p} E\left(\exp\left(- \int_t^T \Psi_{s,j}^{\mathrm{syst}} \, \mathrm{d}s \right) \,\Big|\, \mathscr{F}_t \right) \tag{6.3.2}$$

Jede der bedingten Erwartungen in (6.3.2) können nun berechnet werden mit Hilfe der Ergebnisse für eindimensionale affine Modelle aus Abschnitt 5.

Ausfallkorrelation. Wie wir in Kapitel 8 gesehen haben, sind Ausfallkorrelationen (definiert als Korrelation $\rho(Y_{T,i}, Y_{T,j})$, $i \neq j$, der Ausfallindikatoren) entscheidend für die Flanke der Kreditausfall Verteilung. Für die Berechnung der Ausfallkorrelationen in Modellen mit bedingt unabhängigen Ausfällen ist es günstiger mit dem Überlebensindikator $1 - Y_{T,i}$ zu arbeiten. Nach Definition der (Standard) linearen Korrelation haben wir

$$\begin{aligned} \rho(Y_{T,i}, Y_{T,j}) &= \rho(1 - Y_{T,i}, 1 - Y_{T,j}) \\ &= \frac{P(\tau_i > T, \tau_j > T) - \bar{F}_i(T)\bar{F}_j(T)}{\left(\bar{F}_i(T)\big(1 - \bar{F}_i(T)\big)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\bar{F}_j(T)\big(1 - \bar{F}_j(T)\big)\right)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \tag{6.3.4}$$

Für die gemeinsame Überlebenswahrscheinlichkeit erhalten wir mittels bedingter Unabhängigkeit

$$
\begin{aligned}
P(\tau_i > T, \tau_j > T) &= E\big(P(\tau_i > T, \tau_j > T \mid \mathscr{F}_\infty)\big) \\
&= E\big(P(\tau_i > T \mid \mathscr{F}_\infty) P(\tau_j > T \mid \mathscr{F}_\infty)\big) \\
&= E\left(\exp\left(-\int_0^T (\gamma_{s,i} + \gamma_{s,j})\,\mathrm{d}s\right)\right) \qquad (6.3.5)
\end{aligned}
$$

Für Hazardraten der Form (6.3.1) kann der Ausdruck (6.3.5) auf ähnlicher Weise zerlegt werden wie die Zerlegung (6.3.2) und kann folglich berechnet werden unter Verwendung von unseren Ergebnissen für eindimensionale affine Modelle.

Es wird oft beanstandet, dass die Werte der Ausfallkorrelation, die in Modellen mit bedingter Unabhängigkeit erzielt werden können, zu niedrig sind verglichen mit den empirischen Ausfallkorrelationen. Da Ausfallkorrelationen eine erhebliche Auswirkung auf die durch ein Modell erzeugte Verlustverteilung haben, diskutieren wir diesen Aspekt weiter. Als konkretes Beispiel nutzen wir das Duffie-Gârleanu Modell und nehmen an, dass (Ψ_t^{id}) verschwindet $((\Psi_t^{\mathrm{id}}) \equiv 0)$. Im Duffie-Gârleanu Modell können hohe Niveaus der Ausfallkorrelation erreicht werden, falls die Varianz der Zufallsvariable $\Gamma_T := \int_0^T \Psi_s^{\mathrm{syst}}\,\mathrm{d}s$ hinreichend hoch ist. Eine hohe Varianz von Γ_T kann erlangt werden, indem man ein hohes Niveau für die Volatilität σ von $(\mathbf{\Psi}_t^{\mathrm{syst}})$ wählt oder indem man ein hohes Niveau für den Erwartungswert μ der Sprunghöhe Verteilung oder für die Sprungintensität l^0 wählt.

Ein hohes Niveau für σ schlägt sich in sehr unbeständige Schwankungen der Credit Spreads von Tag zu Tag nieder, die den realen Preisdaten von Anleihen widersprechen könnten. Dies zeigt, dass es schwierig sein kann, sehr hohe Niveaus der Ausfallkorrelation in Modellen, in denen die Hazardraten reinen Diffusionensprozessen folgen, zu erzeugen. Im Duffie-Gârleanu Modell können wir alternativ die Häufigkeit oder Höhe der Sprünge in der Hazardrate steigern, indem wir l^0 oder μ erhöhen.

Diese zusätzliche Flexibilität in der Modellierung von Ausfallkorrelationen ist sogar eine wichtige Motivation, affine Sprung Diffusionen anstatt die einfacheren CIR Modelle zu betrachten.

Literatur

[1] McNeil, Frey, Embrechts (2005). *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools.* Princeton University Press, Princeton and Oxford.