

Seminar Quantitatives Risikomanagement

Dynamische Kreditrisikomodelle Teil 3

Sabine Göpel

Mathematisches Institut
der
Universität zu Köln

Wintersemester 09/10
Betreuung: Prof. Schmidli, J. Eisenberg
Literatur: Quantitative Risk Management

Inhaltsverzeichnis

7	Copula Modelle	1
7.1	Definition und allgemeine Eigenschaften	1
7.1.1	Modelle mit deterministischen Hazard-Raten	4
7.1.2	Statische Version	5
7.1.3	Kalibrierung.	6
7.2	Faktor Copula Modelle	6
7.2.1	Algorithmus: Simulation von Faktor Copula Modellen	7
8	Ausfall-Übertragung in Intensitäts-Modellen	9
8.1	Ausfall-Übertragung und Ausfall-Abhängigkeit	9
8.2	Auf Informationen basierende Ausfall-Übertragung	16
8.3	Interacting Intensities (sich beeinflussende Intensitäten) . . .	18
	Literaturverzeichnis	25

7 Copula Modelle

Copula Modelle sind in der Praxis weit verbreitet zur Preisgestaltung von Basket Kreditderivaten und CDO Strukturen. Für eine bekannte Laufzeit von ausfallbedrohten Anleihen oder CDS spreads sind sie einfach zu berechnen. Außerdem können Sie benutzt werden um Ausfall-Übertragung (default contagion) zu modellieren. In diesem Abschnitt werden wir diese Modelle einführen.

Eine kurze Wiederholung der im Seminar über Copulas eingeführten Definition:

Definition 7.1

Eine d -dimensionale Copula ist eine VF auf $[0, 1]^d$ mit standard gleich verteilten Randverteilungen. Wir bezeichnen Copulas stets mit $C(u) = C(u_1, \dots, u_d)$. Für eine Copula müssen folgende drei Eigenschaften gelten:

1. $C(u_1, \dots, u_d)$ ist monoton steigend in jeder Komponente.

2. $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$ für Komponente $u_i \in [0, 1]$

3. Für alle $(a_1, \dots, a_d), (b_1, \dots, b_d) \in [0, 1]^d$ mit $a_i \leq b_i$ gilt:

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_d=1}^2 (-1)^{i_1+\dots+i_d} C(u_{1i_1}, \dots, u_{di_d}) \geq 0$$

wobei $u_{j1} = a_j$ und $u_{j2} = b_j$ für alle $j \in \{1, \dots, d\}$.

7.1 Definition und allgemeine Eigenschaften

Um unsere Definition von Copula Modellen zu motivieren kehren wir zurück zu den Modellen mit bedingt unabhängigen Ausfällen (conditionally independent defaults).

Nach Lemma 9.35 gilt, wenn τ_1, \dots, τ_m bedingte unabhängige doppelt stochastische Zufallszeiten sind mit (\mathcal{F}_t) -angepassten Hazardraten Prozessen $(\gamma_{t,1}), \dots, (\gamma_{t,m})$, dann können wir einen Zufallsvektor E finden mit unabhängigen exponential verteilten Komponenten, unabhängig von \mathcal{F}_∞ , derart dass

$$\tau_i = \inf\{t \geq 0 : \Gamma_{t,i} \geq E_i\}.$$

Das können wir umschreiben zu

$$\tau_i = \inf\{t \geq 0 : 1 - \exp(-\Gamma_{t,i}) \geq \tilde{U}_i := 1 - \exp(-E_i)\} \quad (1)$$

$\tilde{U} = (\tilde{U}_1, \dots, \tilde{U}_m)^t$ ist ein Vektor von m unabhängigen Zufallsvariablen mit einheitlichen Randverteilungen, so dass die gemeinsame Verteilfunktion die m -Dimensionale Unabhängigkeitscopula (Siehe Abschnitt 5.1.2.) ist. Im Copula Modell verallgemeinern wir diese Konstruktion und ersetzen die Unabhängigkeitscopulas durch andere Copulas. Offensichtlich erreichen wir dadurch eine reichere Abhängigkeits-Struktur für die τ_i als in dem Fall von bedingt unabhängigen Ausfallzeiten (conditionally independent default times).

Sei $U_i := 1 - \tilde{U}_i$, dann können wir (1) schreiben als

$$\tau_i = \inf\{t \geq 0 : \exp(-\Gamma_{t,i}) \leq U_i\}.$$

Um im Einklang mit der vorangegangenen Literatur zu bleiben arbeiten wir mit dieser Beschreibung der τ_i und definieren Copula Modelle in Bezug auf die Copula C von U (oder äquivalent die Überlebenscopula \tilde{C} von \tilde{U} , eingeführt in Abschnitt 5.1.5).

Wir nennen C die bedingte Überlebenscopula der Firmen ; Diese Bezeichnung wird weiter unten gerechtfertigt.

Definition 7.2 (Copula Modell für Ausfallzeiten)

Seien $(\gamma_{t,1}), \dots, (\gamma_{t,m})$ nicht-negative, (\mathcal{F}_t) -adaptierte Prozesse, so dass $\Gamma_{t,i} < \infty$ für alle $t > 0$ gilt, und sei C eine m -dimensionale Copula. Dann folgen die Zufalls-Zeiten τ_1, \dots, τ_m einem Copula Modell mit Rand Hazardrate Prozessen $(\gamma_{t,i}), i = 1, \dots, m$, und bedingter Überlebenscopula C , wenn es einen m -dimensionalen Zufallsvektor U gibt, mit $U \sim C$, unabhängig von \mathcal{F}_∞ , so dass

$$\tau_i = \inf\{t \geq 0 : \exp(-\Gamma_{t,i}) \leq U_i\} \quad \text{für } 1 \leq i \leq m. \quad (2)$$

Falls wir wissen wie wir die Copula C simulieren, stellt diese Definition einen offensichtlichen Weg zur Verfügung, ein Copula Modell für Ausfälle zu simulieren.

Um eine Realisation von τ_1, \dots, τ_m zu erhalten, erzeugen wir eine Realisation von den Hazard-Rate Prozessen $(\gamma_{t,1}), \dots, (\gamma_{t,m})$ und, unabhängig davon, eine Realisation vom Zufallsvektor U ;

Die τ_i lassen sich dann wie in (2) konstruieren. Der entscheidende Teil in der Aufstellung eines Copula Modells ist die Wahl der Schranken-Copula C .

Nützliche Copulas und die resultierende Copula werden im folgenden Paragraphen besprochen. Im Augenblick erinnern wir uns bloß daran, das wir bedingt unabhängige Ausfallzeiten erhalten, wenn und nur wenn wir C als die Unabhängigkeitscopula wählen.

Wir sammeln jetzt einige elementare Folgerungen aus der Definition.

Sei $E_i := -\ln(1 - U_i) \sim Exp(1)$,

dann ergibt Lemma 9.12, zusammen mit (2) sofort, dass jedes der τ_i eine doppelt stochastische Zufalls-Zeit ist mit (\mathcal{F}_t) -bedingtem Hazardrate- Prozess $(\gamma_{t,i})$.

Folglich ist $M_{t,i} := Y_{t,i} - \Gamma_i(t \wedge \tau_i)$ ein Martingal bzgl. der Filtration $\{\mathcal{G}_t^i\} := (\mathcal{F}_t) \vee \{\mathcal{H}_t^i\}$.

Falls C eine Unabhängigkeitscopula ist, ist $M_{t,i}$ kein Martingal im Bezug auf das Filtrieren (\mathcal{G}_t) .

Zur Zeit $t=0$ kann die Randverteilung der τ_i wie im Ein-Firmen Fall (single-firm case) geschätzt werden . Wenn wir bedingte Erwartungen verwenden erhalten wir

$$P(\tau_i \leq T) = E(P(\tau_i \leq T | \mathcal{F}_\infty)) = 1 - E(\exp(-\int_0^T \gamma_{s,i} ds)) \quad (3)$$

Insbesondere zur Zeit $t=0$ ist es möglich das Modell einer gegebenen Laufzeit-Struktur von Krediten oder CDS spreads anzupassen. Man kalibriert jeden der Rand Hazard-Rate-Prozesse $(\gamma_{s,i})$ durch das Benutzen von Methoden für den Ein-Firmen Fall.

Das ist eine wichtige Eigenschaft des Modells in praktischen Anwendungen. Es ist jedoch anzumerken das sich für $t > 0$ die bedingte Verteilung von τ_i bei gegebener Ausfall-Geschichte aller Schuldner im Portfolio im allgemeinen von der bedingten Verteilung von τ_i , gegeben das $\tau_i > t$ ist, unterscheidet. Das bedeutet das sich für $t > 0$ die Ein-Firmen und die Portfolio Version des Modells unterscheiden. Wir diskutieren diesen Punkt in Abschnitt 9.8.1.

Als nächstes zeigen wir das die Schrankencopula C tatsächlich die Überlebenscopula der τ_i bedingt durch \mathcal{F}_∞ ist.

Nach Definition haben wir

$$\bar{F}_{\tau_i|\mathcal{F}_\infty}(t) := P(\tau_i > t|\mathcal{F}_\infty) = \exp(-\int_0^t \gamma_{s,i} ds)$$

Außerdem ist nach (2), $\tau_i > t$ wenn und nur wenn $U_i < \bar{F}_{\tau_i|\mathcal{F}_\infty}(t)$. Wenn wir die Unabhängigkeit von U und \mathcal{F}_∞ benutzen erhalten wir,

$$\begin{aligned} P(\tau_1 > t_1, \dots, \tau_m > t_m|\mathcal{F}_\infty) &= \\ P(U_1 < \bar{F}_{\tau_1|\mathcal{F}_\infty}(t_1), \dots, U_m < \bar{F}_{\tau_m|\mathcal{F}_\infty}(t_m)) &= \\ C(\bar{F}_{\tau_1|\mathcal{F}_\infty}(t_1), \dots, \bar{F}_{\tau_m|\mathcal{F}_\infty}(t_m)) & \quad (4) \end{aligned}$$

Nach Sklar´s Identität für Überlebensfunktionen (siehe (5.13)), ist C die bedingte Überlebenscopula von den τ_i bei gegebenem \mathcal{F}_∞ .

7.1.1 Modelle mit deterministischen Hazard-Raten

Von nun an konzentrieren wir uns auf Modelle in denen die Rand Hazard-Rate $\gamma_i(s)$ deterministisch ist. Da die Abhängigkeit zwischen den τ_i über die Schrankencopula C eingeführt werden kann, erhält man interessante Modelle. Das Verstehen der Eigenschaften von Modellen mit deterministischen Hazard-Raten ist ein wichtiger Schritt in der Analyse von allgemeineren Modellen mit stochastischer Hazard-Rate. Diese Modelle werden gewöhnlich zuerst unter der Filtration $(\tilde{\mathcal{G}}_t)$, mit $\tilde{\mathcal{G}}_t = \mathcal{F}_\infty \vee \mathcal{H}_t, t \geq 0$ studiert, für die die Hazard-Raten deterministisch sind;

Preiskalkulationen bzgl. der kleineren Filtration $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_t, t \geq 0$ verwenden den Lehrsatz von wiederholten bedingten Erwartungen (theorem of iterated conditional expectations). Mit deterministischen Rand-Hazard-Raten $\gamma_i(t)$, sind die Ausfall-Zeiten τ_i unabhängig von der Hintergrundfiltration (\mathcal{F}_t) , und wir können unsere Aufmerksamkeit auf die Filtration \mathcal{H}_t richten, welche durch die Ausfall-Indikatoren erzeugt wird. Außerdem stimmen in diesem Fall die bedingte Überlebensfunktion in Bezug auf \mathcal{F}_∞ und die unbedingte Überlebensfunktion offensichtlich überein.

Wir haben $\bar{F}_i(t) = \bar{F}_{\tau_i|\mathcal{F}_\infty}(t) = \exp(-\Gamma_i(t))$.

Folglich ergibt Beziehung (4):

$$\bar{F}_i(t_1, \dots, t_m) = C(\bar{F}_1(t_1), \dots, \bar{F}_m(t_m)) \quad (5)$$

$$= C(\exp(-\int_0^t \gamma_1(s)ds), \dots, \exp(-\int_0^t \gamma_m(s)ds)) \quad (6)$$

Beziehung (5) zeigt, dass mit deterministischen Hazard-Raten die bedingte Überlebenscopula C die Überlebenscopula der Ausfall-Zeiten (default times) ist.

Beziehung (6) zeigt wie diese Copula und die Rand-Hazard-Raten die gemeinsame Überlebensfunktion der Ausfall-Zeiten bestimmen.

Wir werden beide Beziehungen später häufig verwenden. Vom mathematischen Standpunkt aus macht es keinen Unterschied, ob wir die Copula und Rand-Hazard-Raten oder die gemeinsame Überlebensfunktion \bar{F} direkt angeben, denn jede gemeinsame Überlebens-Funktion \bar{F} mit absolut stetiger Randverteilung hat eine einzigartige Darstellung der Form (6) (setze $\gamma_i(t) = -(\partial/\partial t) \ln \bar{F}_i(t)$ und definiere C durch das benutzen von Sklar's Identität für Überlebens-Funktionen). Wenn wir mathematische Ergebnisse ableiten, werden wir aus diesem Grund direkt mit \bar{F} arbeiten. Abschließend noch ein Wort der Warnung: In Modellen mit stochastischer Hazard-Rate, sind die unbedingte Überlebenscopula von (τ_i, \dots, τ_m) und die bedingte Überlebenscopula (gegeben \mathcal{F}_∞) unterschiedlich; In Modellen mit bedingten unabhängigen Ausfällen aber abhängigen Prozessen der Hazard-Rate ist zum Beispiel die bedingte Überlebenscopula (gegeben \mathcal{F}_∞) die Unabhängigkeitscopula, aber (τ_1, \dots, τ_m) ist offensichtlich kein Vektor von unabhängigen Zufallsvariablen.

7.1.2 Statische Version

Es ist interessant Copula Modelle mit den in Abschnitt 8.3 betrachteten statischen Schranken (treshold) Modellen zu verbinden. Fixiere einen Horizont $T > 0$. $Y_{T,i} = 1$ wenn $\tau_i \leq T$ und offensichtlich folgt dann Y_T einem Schranken Modell im Sinne von Definition 8.4 mit kritischen Variablen $X = (\tau_1, \dots, \tau_m)$ und Ausfall Schranke T . Nach (5) gleicht die Überlebenscopula von (τ_1, \dots, τ_m) C ; Falls C radial symmetrisch ist (siehe Definition 5.1.3)

ist C ebenfalls eine Copula von (τ_1, \dots, τ_m) .

7.1.3 Kalibrierung.

Die Kalibrierung eines Copula Modells mit deterministischen Rand-Hazard-Raten um die Preiskalkulation zu bewerten geht in zwei Schritten weiter. Risikoneutrale Rand-Hazard-Raten werden durch eine gegebene Frist-Struktur von Kredit-Spreads, von defaultable bonds oder CDS- Spreads kalibriert (wie beschrieben in Abschnitt 9.3.3.). Wenn der Markt für mit einem Portfolio-verbunden Kredit Derivat liquid ist, können die Parameter der Schranken-Copula C zu den beobachteten Preisen dieser Produkte kalibriert werden. Sonst kalibriert man normalerweise die Copula zu Schätzungen der Ausfall-Korrelation über die Laufzeit der zu bewertenden Produkte. Solche Schätzungen werden entweder erhalten durch das Benutzen von Anlagekorrelationen (asset correlations) in Verbindung mit der Multivariaten Version des Modells von Merton (in Abschnitt 8.2.4) oder über eines der statistischen Verfahren (beschrieben in Abschnitt 8.6). Es wird in dieser Annäherung implizit angenommen das Risiko-Neutrale und Historische Ausfall-Korrelationen gleich sind, was eine starke Annahme ist. Wenn wir ein Copula Modell unter dem wirklichen Wahrscheinlichkeitsmaß kalibrieren, werden Hazard-Raten zu Schätzungen von Historischen-Ausfall- Wahrscheinlichkeiten kalibriert. Parameter der Copula werden wieder zu Schätzungen von Historischen Ausfall-Korrelationen kalibriert.

7.2 Faktor Copula Modelle

In diesem Abschnitt betrachten wir Modelle in denen der Schranken-Vektor U eine bedingte Unabhängigkeits-Struktur hat (im Sinne von Definition 8.18), d.h. es existiert ein p -dimensionaler Zufalls Vektor V , mit $p < m$, so das , bedingt durch V , die U_i unabhängig sind. Diese Modelle werden manchmal Faktor Copula Modelle genannt. Unter der Annahme, dass $\gamma_i(t)$ deterministische Rand-Hazard-Raten sind, erhalten wir mit (2) und der bedingten Abhängigkeit der U_i (bei gegebenem V) dass

$$\begin{aligned}
\bar{F}(t_1, \dots, t_m) &= \\
E(P(U_1 \leq \bar{F}_1(t_1), \dots, U_m \leq \bar{F}_m(t_m)|V)) &= \\
E\left(\prod_{i=1}^m P(U_i \leq \bar{F}_i(t_i)|V)\right) & \quad (7)
\end{aligned}$$

$\bar{F}_{\tau_i|V}(t|V)$ gibt die bedingte Überlebensfunktion der τ_i bei gegebenem $V=v$ an und nach Konstruktion gilt dann

$$\bar{F}_{\tau_i|V}(t|V) = P(U_i < \bar{F}_i(t)|V = v).$$

Also

$$\bar{F}(t_1, \dots, t_m) = E\left(\prod_{i=1}^m \bar{F}_{\tau_i|V}(t_i|V)\right) \quad (8)$$

7.2.1 Algorithmus: Simulation von Faktor Copula Modellen

- (1) Erzeugen einer Realisierung von V .
- (2) Erzeuge unabhängige rvs τ_i mit df $1 - \bar{F}_{\tau_i|V}(t|V)$, $1 \leq i \leq m$.

Um eine Folge (T_n, ξ_n) , $T_n \leq T$ von Ausfall-Zeiten bis zu einem Fälligkeits-termin zu erzeugen, könnte man Algorithmus 9.3.8 verwenden

Die wichtigen Stichprobenverfahren Techniken die in Abschnitt 8.5 im Zusammenhang mit statischen Bernoulli Mixture Modellen diskutiert wurden, können verwendet werden um die Leistung dieses Algorithmus zu verbessern. Diese Techniken sind teilweise nützlich um einen Handel mit seltenen-Ereignissen zu simulieren, so wie beispielsweise in der Preisgestaltung von CDO-Tranchen mit hohen Sympathie Werten. Auf den ersten Blick wirken die mathematische Struktur von Faktor Copula Modellen und die Struktur von Modellen mit bedingt unabhängigen Ausfällen (conditionally independent defaults) ähnlich. Insbesondere sind die statischen Versionen von beiden Modell-Klassen Bernoulli Mixture Modelle. Der Unterschied der Modell-Klassen liegt in der Art wie Informationen mit der Zeit Kapitalanlegern mitgeteilt werden, das führt zu völlig unterschiedlichem dynamischen Verhalten.

In dem Modell mit bedingten unabhängigen Ausfällen (conditional independent defaults) ist der Wirtschaftsfaktor-Prozess (Ψ_t) , (\mathcal{F}_t) -adaptiert, das bedeutet das der gegenwärtige Wert den Kapitalanlegern zur Zeit t bekannt ist. Also befördert ein Ausfall-Ereignis keine Zusatzinformationen, die helfen könnten, den Verzug anderer Schuldner vorauszusagen.

Beim Faktor Copula Modell nimmt man dagegen an das die Schranke (threshold) U und die Schwäche (frailty) V unbeobachtbar sind. Da die Ausfall Wahrscheinlichkeiten von V abhängen, befördern Ausfall Informationen, wie z.Bsp. die Nachricht dass ein bestimmter Schuldner j zu einem bestimmten Zeitpunkt t in Verzug geraten ist, Zusatzinformationen über die Verteilung von V . Die Überlebenswahrscheinlichkeit der verbliebenen Schuldner verändert sich, weil sie als der Durchschnitt der bedingten Überlebensfunktion $\bar{F}_{\tau_i|V}(t|v)$ unter Berücksichtigung der bedingten Verteilung von V , bei gegebener Ausfall-Geschichte (default History) \mathcal{H}_t berechnet wird. Das Aktualisieren der Verteilung des unbeobachtbaren Zufallsvektors V kann zur Ausfall-Übertragung führen, dies wird später ausführlicher besprochen (9.8.2).

Dieser Vergleich zwischen Faktor Copula Modellen und Modellen mit bedingten unabhängigen Ausfällen zeigt uns das dynamische Modelle eine viel größere Struktur besitzen als statische Modelle. Offensichtlich kann jede stetige multivariate Verteilung mit p -dimensionaler bedingter Unabhängigkeitsstruktur benutzt werden um ein Faktor Copula Modell zu konstruieren.

Beispiel 7.3 (Ein-Faktor Gauss Copula)

Faktor Copula Modelle die auf einer Gauss Copula C_P^{Ga} basieren werden in der Praxis häufig verwendet. Die statische Version dieser Modelle entspricht den bekannten CreditMetrics/KMV-type Modellen die in Beispiel 8.6 besprochen wurden. Hier berechnen wir die bedingten Überlebensfunktionen für den Ein-Faktor Fall.

Sei $X_i = \sqrt{p_i}V + \sqrt{1-p_i}\epsilon_i$, mit $p \in (0, 1)$

und $V, (\epsilon_i)_{1 \leq i \leq m}$ seien unabhängig identisch standard-normal verteilte Zufallsvariablen (iid standard normal rvs),

dann ist $X \sim N_m(0, P)$, und das (i,j) -te Element von P ist gegeben durch

$$p_{ij} = \sqrt{p_i p_j}.$$

Setze $U_i = \Phi(X_i)$, d.h. $U \sim C_P^{Ga}$.

Die bedingte Überlebensfunktion ist einfach zu berechnen.

Mit $d_i(t) := \Phi^{-1}(\bar{F}_i(t))$, erhalten wir das

$$\bar{F}_{\tau_i|V}(t|v) = P(U_i \leq \bar{F}_i(t)|V = v) = P(\epsilon_i \leq (d_i(t) - \sqrt{p_i}V)/\sqrt{1-p_i}|V = v)$$

das führt uns zu

$$\bar{F}_{\tau_i|V}(t|v) = \Phi((d_i(t) - \sqrt{p_i}v)/(\sqrt{1-p_i}))$$

Folglich:

$$\bar{F}(t_1, \dots, t_m) = 1/\sqrt{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^m \Phi((d_i(t_i) - \sqrt{p_i}v)/\sqrt{1-p_i}) e^{-v^2/2} dv \quad (9)$$

Dieser Ausdruck kann durch eindimensionale numerische Integration berechnet werden. In der Anwendung eines Ein-Faktor Gauss Copula Modells zur Preiskalkulation eines Portfolio Kredit Derivates wird häufig angenommen das $p_i = p$ für alle i ist. In diesem Fall wird die abhängige Struktur des Modells durch den einzelnen Parameter p geregelt, die Copula von (τ_1, \dots, τ_m) ist austauschbar und $p = \text{corr}(X_i, X_j)$. Diese Eigenschaft macht die austauschbare (exchangeable) Version des Ein-Faktor Gauss Copula Modells populär in der praktischen Anwendung.

8 Ausfall-Übertragung in Intensitäts-Modellen

In diesem Abschnitt werden wir die Ausfall-Übertragung in Intensitäts-Modellen diskutieren. Wir beginnen mit einer detaillierten Analyse von Ausfall-Übertragung in allgemeinen Modellen für die abhängigen Ausfälle (defaults).

8.1 Ausfall-Übertragung und Ausfall-Abhängigkeit

Martingal-Intensitäten

Wir beginnen mit einem allgemeinem Resultat welches die Martingal-Ausfall-Intensitäten von abhängigen Ausfall-Zeiten charakterisiert. Wie wir schon früher gesehen haben, als wir die Martingal Eigenschaften von stochastischen Prozessen diskutierten, müssen wir bzgl. der Informationen die den Investoren zur Verfügung stehen genau sein, oder mathematisch ausgedrückt, bzgl. der Filtration die wir benutzen. Hier nehmen wir an das Investoren nur Zugang zur Ausfall-Geschichte von Firmen aus dem Portfolio haben die geprüft

wurden, d.h. das wir an den Martingal Eigenschaften interessiert sind unter Berücksichtigung der inneren Filtration (\mathcal{H}_t) die in (9.50) eingeführt wurde. \mathcal{H}_t kann beschrieben werden durch

$$\mathcal{H}_t = \sigma(\{(T_n, \xi_n) : T_n \leq t\}),$$

die Folge $(T_n, \xi_n), T_n \leq t$ gibt eine alternative Beschreibung der Ausfall-Geschichte bis zur Zeit t .

Durch \mathcal{H}_{T_n} bezeichnen wir die σ -Algebra von Ereignissen die bis dahin erkennbar sind, einschließlich der n -ten Ausfall-Zeit T_n ,

d.h. $\mathcal{H}_{T_n} = \sigma(\{(T_j, \xi_j) : 1 \leq j \leq n\})$. (Das stimmt mit der abstrakten Definition der σ -Algebra für beobachtbare Ereignisse bis zu einer bestimmten Zeit überein)

Theorem 8.1

Betrachte die Ausfall-Zeiten τ_1, \dots, τ_m und \mathcal{H}_t bezeichne die zugehörige innere Filtration.

Angenommen, dass es für jedes $0 \leq n \leq m - 1$ und jedes $i \in \{1, \dots, m\}$ eine Zufallsfunktion $g_i^{(n)} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ gibt, die messbar ist unter Berücksichtigung der Produkt σ -Algebra $\mathcal{H}_{T_n} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, und derart das

$$P(T_{n+1} - T_n \leq s, \xi_{n+1} = i | \mathcal{H}_{T_n})(\omega) = \int_0^s g_i^{(n)}(\omega, u) du, 1 \leq i \leq m \quad (10)$$

Dann ist die Martingal-Ausfall-Intensität von $(Y_{t,i})$ unter Berücksichtigung von (\mathcal{H}_t) gegeben durch

$$\lambda_{t,i}(\omega) = (g_i^{(n)}(\omega, t - T_n)) / (P(T_{n+1} > t | \mathcal{H}_{T_n})(\omega)), T_n < t \leq T_{n+1} \quad (11)$$

Auf den Beweis dieses Resultates wird an dieser Stelle verzichtet.

Anmerkung

Die wesentliche Voraussetzung der Zufallsfunktion $g_i^{(n)}$ ist einfach, dass die Funktions-Form von $g_i^{(n)}(\omega, \cdot)$ nur von der Ausfall-Geschichte \mathcal{H}_{T_n} abhängt. Es kann gezeigt werden, dass (10) immer erfüllt ist, falls der Vektor (τ_1, \dots, τ_m) eine gemeinsame Dichte zulässt.

Die Form (11) für die Martingal-Intensität ist sehr natürlich. Wenn Investoren nur vergangene und gegenwärtige Ausfälle beobachten, erhalten Sie wichtige neue Informationen nur zu den Zeitpunkten $T_1(\omega), \dots, T_m(\omega)$. Also

erwarten wir, dass sich die Martingal-Ausfall-Intensität $(\lambda_{t,i})$ von eine Firma $i \in A_n$ (eine überlebende Firma) auf deterministische Art für $t \in (T_n, T_{n+1}]$ entwickelt und sich mit der zufälligen Ankunft von neuen Informationen bei T_{n+1} verändert. Außerdem ist es möglich einen anderen Ausdruck für $(\lambda_{t,i})$ herzuleiten.

Wenn wir den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (fundamental theorem of calculus) und (10) verwenden, erhalten wir für $t \in [T_n, T_{n+1})$ und beliebiges $h < T_{n+1} - T_n$,

$$\begin{aligned} g_i^{(n)}(\omega, t - T_n) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{t-T_n}^{t-T_n+h} g_i^{(n)}(\omega, u) du \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} P(T_{n+1} \in (t, t+h], \xi_{n+1} = i | \mathcal{H}_{T_n})(\omega) \end{aligned}$$

Also erhalten wir für eine überlebende Firma $i \in A_n$, wenn wir (11) benutzen

$$\lambda_{t,i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} P(\tau_i \leq t+h | \{\tau_j > t \text{ für alle } j \in A_n\}, \mathcal{H}_{T_n}) \quad (12)$$

In dieser Form erkennt man das zur Zeit $t \in [T_n, T_{n+1})$ die Ausfall-Information von \mathcal{H}_{T_n} und

$B := \{\tau_j > t, \text{ für alle } j \in A_n\}$ abhängt.

Wenn wir mit $\bar{F}_{\tau_i | \mathcal{H}_t}(T) := P(\tau_i > T | \mathcal{H}_t)$ die bedingte Überlebenswahrscheinlichkeit von Firma i bei gegebener Ausfall-Geschichte bis zum Zeitpunkt t bezeichnen, erhalten wir für $\{\tau_i > t\}$

$$\lambda_{t,i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} P(\tau_i \leq t+h | \mathcal{H}_t) = - \frac{\partial}{\partial T} |_{T=t} \bar{F}_{\tau_i | \mathcal{H}_t}(T) \quad (13)$$

D.h. wir erhalten, wenn wir die Ausfall-Geschichte für alle Firmen im Portfolio bis zur Zeit t kennen, durch $\lambda_{t,i}$ sofort die bedingte Wahrscheinlichkeit das eine noch überlebende Firma $i \in A_n$ zur Zeit t in Verzug (default) gerät. Wir werden gleich zeigen, wie $\bar{F}_{\tau_i | \mathcal{H}_t}$ durch Ausdrücke von Ableitungen der unbedingten Überlebensfunktion von (τ_1, \dots, τ_m) dargestellt werden kann.

Bedingte Überlebensfunktionen

Sei $T_n \leq t < T_{n+1}$ für $0 \leq n \leq m-1$. Wir wollen die bedingte Überlebensfunktion $\bar{F}_{\tau_i|\mathcal{H}_t}$ für irgendeine Firma $i \in A_n$ berechnen. Um die Notation zu vereinfachen setzen wir eine Permutation der Indices voraus und zwar derart das $A_n^c = \{1, \dots, n\}$ und $A_n = \{n+1, \dots, m\}$, d.h. die Firmen die in Verzug sind stimmen mit den ersten n Firmen überein.

Setze $\tau_1 = (\tau_1, \dots, \tau_n)^t$ und $\tau_2 = (\tau_{n+1}, \dots, \tau_m)^t$

Als Zwischenschritt betrachten wir $\bar{F}_{\tau_2|\tau_1}(t_1, \dots, t_{m-n}|\tau_1)$, die bedingte Überlebensfunktion der letzten $m-n$ Firmen, bei gegebenem Vektor der Ausfallzeiten der ersten n Firmen.

Wir erhalten das folgende Lemma:

Lemma 8.2

Angenommen der Vektor (τ_1, \dots, τ_m) besitzt eine Dichte. Dann gilt

$$\bar{F}_{\tau_2|\tau_1}(t_1, \dots, t_{m-n}|\tau_1, \dots, \tau_n) = \frac{\frac{\partial^n}{\partial t_1 \dots \partial t_n} \bar{F}(\tau_1, \dots, \tau_n, t_1, \dots, t_{m-n})}{\frac{\partial^n}{\partial t_1 \dots \partial t_n} \bar{F}(\tau_1, \dots, \tau_n, 0, \dots, 0)}$$

Beweisskizze:

Die gemeinsame Dichte von (τ_1, \dots, τ_m) war gegeben durch $(-1)^m \frac{\partial^m \bar{F}}{\partial t_1 \dots \partial t_m}$. Also folgt das Resultat aus der Formel für bedingte Dichte (Kapitel 3), für die bedingte Dichte von τ_2 bei gegebenem τ_1 . Wir lassen die Details aus.

Abschließend wenden wir uns der bedingten Überlebensfunktion $\bar{F}_{\tau_i|\mathcal{H}_t}$ zu. Zur Zeit t bestehen die Ausfall Informationen aus dem Vektor τ_1 der Ausfallzeiten der Firmen von A_n^c und $B := \{\tau_2 > t\}$. Also erhalten wir für $i \in \{n+1, \dots, m\}$ und $T \geq t$, wenn wir die Definition für bedingte elementare Erwartungen (elementary conditional expectation) und voriges Lemma verwenden

$$\begin{aligned}
\bar{F}_{\tau_i|\mathcal{H}_t}(T) &= P(\tau_i > T|B, \tau_1) = \\
&= \frac{P(\tau_i > T, \tau_2 > t|\tau_1)}{P(\tau_2 > t|\tau_1)} = \\
&= \frac{\frac{\partial^n}{\partial t_1 \dots \partial t_n} \bar{F}(\tau_1, \dots, \tau_n, t, \dots, T, \dots, t)}{\frac{\partial^n}{\partial t_1 \dots \partial t_n} \bar{F}(\tau_1, \dots, \tau_n, t, \dots, t, \dots, t)} \quad (14)
\end{aligned}$$

Wenn wir (13) und (14) kombinieren können wir Martingal Ausfall-Intensitäten durch Ausdrücke der unbedingten Überlebensfunktion von (τ_1, \dots, τ_m) charakterisieren.

Korollar 8.3

Angenommen der Zufallsvektor (τ_1, \dots, τ_m) hat eine Dichte. Sei $T_n < t \leq T_{n+1}$; $0 \leq n < m$, und angenommen $A_n^c = \{1, \dots, n\}$. Dann entspricht die Martingal Ausfall-Intensität von Firma $i \in A_n$ unter Berücksichtigung von (\mathcal{H}_t)

$$\lambda_{t,i} = - \frac{\frac{\partial^{n+1}}{\partial t_1 \dots \partial t_n \partial t_i} \bar{F}(\tau_1, \dots, \tau_n, t, \dots, t)}{\frac{\partial^n}{\partial t_1 \dots \partial t_n} \bar{F}(\tau_1, \dots, \tau_n, t, \dots, t)}$$

Anwendungen auf Kreditrisikoreiche Wertpapiere

Es ist interessant die Implikation unserer allgemeinen Resultate für Martingal-Intensitäten für die Preisgestaltung von Kredit -Risikoreichen Wertpapieren zu untersuchen. An die Literatur angepasst benutzen wir die Methode zur Modellierung vom Martingal und nehmen an das unter dem Risiko-Neutralem Maß Q , das benutzt wird für die Preisgestaltung der Ausfall-Zeiten, τ_1, \dots, τ_m einem Copula Modells mit deterministischen Hazard Raten $\gamma_1(t), \dots, \gamma_m(t)$ und Überlebenscopula C folgen. Außerdem nehmen wir an das die risk-free short rate $r(t) \geq 0$ deterministisch ist. $B(t) = \exp(\int_0^t r(s)ds)$ bezeichnet das Verzugs-freie Sparkonto (default free savings account).

Wir beginnen mit dem Problem der Preisgestaltung eines first-to-default swap. Wir betrachten einen ähnlichen Vertrag wie in Abschnitt 9.6.3. Die Prämien passen zu den Zeiten $0 < t_1 < \dots < t_N = T$, unter der Voraussetzung das bis jetzt kein Ausfall eingetreten ist; Wenn $T_1 < T$ und, außerdem, $\xi_1 = i$ gibt es eine Ausfall-Zahlung, geeignet für die Konstante l_i .

Unter diesen Voraussetzungen gleicht der Wert der Ausfall-Zahlung zur Zeit $t=0$

$$V^{def} = \sum_{i=1}^m l_i E^Q(B(\tau_i)^{-1} I_{\{\tau_i=T_1\}} I_{\{\tau_i \leq T\}}).$$

Wenn wir durch τ_i bedingen, erhalten wir für einen einzelnen Ausdruck dieser Summe

$$E^Q(B(\tau_i)^{-1} I_{\{T_1=\tau_i\}} I_{\{\tau_i \leq T\}}) = \int_0^T B(t)^{-1} Q(\tau_i = T_1 | \tau_i = t) f_i(t) dt$$

und $f_i(t)$ ist die Rand-Dichte von τ_i .

Jetzt ergibt Lemma 9.48

$$Q(\tau_i = T_1 | \tau_i = t) = Q(\tau_j > t \text{ für alle } j \neq i | \tau_i = t) = -\frac{1}{f_i(t)} \frac{\partial \bar{F}}{\partial t_i}(t, \dots, t),$$

und wir erhalten

$$V^{def} = - \sum_{i=1}^m l_i \int_0^T B(t)^{-1} \frac{\partial \bar{F}}{\partial t_i}(t, \dots, t) dt.$$

Wenn \bar{F} , oder äquivalent, die Schrankencopula C in geschlossener Form bekannt ist, kann man dies direkt durch eindimensionale (numerische) Integration berechnen.

Nach Definition war $Q(T_i > t) = \bar{F}(t_n, \dots, t_n)$

Folglich ist der Wert in $t=0$ der Prämienzahlungen (angenommen ein allgemeiner Swap Spread x) gegeben durch

$$V^{prem} = x \sum_{i=1}^N B(t_n)^{-1} (t_n - t_{n-1}) \bar{F}(t_n, \dots, t_n).$$

Als nächstes betrachten wir das Verhältnis zwischen den unmittelbaren Kredit Spreads und Martingal-Intensitäten. Wir bezeichnen mit $p_{1,i}(t, T)$ den Preis von einer Nullkuponanleihe [keine laufenden Zinszahlungen, nur eine einmalige Auszahlung am Ende der Laufzeit] mit Laufzeit T , ausgegeben von Firma i , und nehmen an, dass die Recovery Rate dieses Bond gleich 0 ist.

Folglich ist der Preis dieser bond zur Zeit $t < \tau_i$ gegeben durch

$$p_{1,i}(t, T) = \exp\left(-\int_t^T r(s) ds\right) Q(\tau_i > T | \mathcal{H}_t) \quad (15)$$

so das der Kredit Spread [Der Kredit Spread ist ein Renditezuschlag, den Investoren bei einer Anlage in Ausfallrisiko behaftete Unternehmensanleihen erhalten] gegeben ist durch

$$c_i(t, T) = -1/(T - t) \ln Q(\tau_i > T | \mathcal{H}_t)$$

Da $Q(\tau_i > t | \mathcal{H}_t) = 1$ für $\{t < \tau_i\}$ (nach (13)), ist der unmittelbare Kredit Spread

$$c_i(t) = \lim_{T \rightarrow t} c_i(t, T) \text{ gegeben durch}$$

$$c_i(t, T) = -\frac{\partial}{\partial T} \Big|_{T=t} \ln Q(\tau_i > T | \mathcal{H}_t) = -\frac{\partial}{\partial T} \Big|_{T=t} Q(\tau_i > T | \mathcal{H}_t) = \lambda_{t,i}.$$

D.h. die Martingal Ausfall-Intensität (martingale default intensity) von τ_i unter dem gleichwertigen Martingal Maß Q entspricht dem unmittelbaren Kredit Spread einer zero-recovery bond ausgegeben von Firma i .

In Abschnitt 9.7.1 haben wir gezeigt, dass zur Zeit $t=0$ Formeln zur Preisgestaltung für single-name Produkte in einem Portfolio Modell gültig bleiben. Wir haben ebenfalls erwähnt, dass das zur Zeit $t>0$ nicht mehr wahr ist. Jetzt betrachten wir diese Tatsache genauer.

Betrachten wir eine Firmen Nullcouponanleihe (corporate zero-coupon bond) mit Null Rückgewinn (zero recovery). Nach (15), ist der Preis dieses Wertpapiers zur Zeit $t>0$ gegeben durch die diskontierte bedingte Überlebenswahrscheinlichkeit von der Firma bei gegebener Ausfall-Geschichte von allen Schuldner bis zur Zeit t . In einem Ein-Firmen Modell (single-firm) haben wir andererseits

$$p_{1,i}(t, T) = I_{\{\tau_i > t\}} \exp\left(-\int_t^T r(s) ds\right) Q(\tau_i > T | \tau_i > t)$$

,d.h. der Preis der bond gleicht der diskontierten bedingten Überlebenswahrscheinlichkeit von Firma i wenn nur die eigene Ausfall-Geschichte bekannt ist. Diese zwei bedingten Überlebens-Wahrscheinlichkeiten unterscheiden sich im allgemeinen für $t>0$.

Mathematisch gesehen ist die Formel aus (15) zwar korrekt, entspricht aber nicht dem Weg auf dem von Praktikern ein Copula Modell benutzt wird. Hergeleitet aus (15) fixieren wir in $t_0 = 0$ ein Modell für die gemeinsame Verteilung von (τ_1, \dots, τ_m) , ein Modell mit konstanten Hazard-Raten und einer Clayton Überlebens Copula mit Parameter θ_0 ; Zur Zeit $T_1 > 0$ setzen wir einen Preis für die bond fest indem wir die bedingte Verteilung dieses Modells benutzen bei gegebener Ausfall-Geschichte \mathcal{H}_{t_1}

Praktiker verfahren anders. Zur Zeit t_1 kalibrieren Sie ein neues Modell, in unserem Fall wieder ein Clayton Copula Modell aber mit Parameter θ_1 (der sich von θ_0 unterscheiden kann), zu den in t_1 verfügbaren Marktinformationen und benutzen das neue Modell um einen Preis für die bond festzusetzen. Im Allgemeinen führen beide Methoden zu verschiedenen Verteilungen für die Ausfall-Zeiten von Überlebenden Firmen und folglich zu verschiedenen Preisen.

8.2 Auf Informationen basierende Ausfall-Übertragung

Ausfall-Übertragung in Copula Modellen kann der Tatsache zugeschrieben werden, dass Informationen über die Ausfall-Geschichte die bedingte Verteilung des unbeobachtbaren Faktor-Vektor V ändern. In diesem Abschnitt machen wir die Behauptung präzise und berechnen die bedingte Verteilung von V bei gegebener Ausfall-Geschichte bis einschließlich zur Zeit t . Wir nehmen überall an, dass die bedingte Verteilung von τ_i bei gegebenem V die Dichte

$$f_{\tau_j|V}(t|V) = -\frac{\partial}{\partial t} \bar{F}_{\tau_j|V}(t|V)$$

hat.

Um die Ausführung zu vereinfachen nehmen wir weiter an, dass V die Dichte $g_V(v)$ hat. Mit $g_{V|\mathcal{H}_t}(v)$ bezeichnen wir die bedingte Dichte von V gegeben \mathcal{H}_t .

Berechnung von $g_{V|\mathcal{H}_t}(v)$:

Wir beginnen mit dem Fall $t < T_1$. Wir benutzen die Definition für einfache bedingte Erwartungen (elementary conditional expectation) und erhalten für $A \subseteq \mathbb{R}^p$ das

$$P(V \in A | T_1 > t) = \frac{1}{\bar{F}(t, \dots, t)} \int_A \prod_{j=1}^m \bar{F}_{\tau_j|V}(t|v) g_V(v) dv$$

Für $t < T_1$ ist die bedingte Dichte von V , bekanntem \mathcal{H}_t , gegeben durch

$$g_{V|\mathcal{H}_t}(v) = \frac{\prod_{j=1}^m \bar{F}_{\tau_j|V}(t|v)}{\bar{F}(t, \dots, t)} g_V(v); t < T_1 \quad (16)$$

Jetzt wechseln wir zu dem Fall $t \in [T_1, T_2)$. In einem Zwischenschritt bestimmen wir die bedingte Dichte $g_{V|\tau_j}(v|\tau_j)$. Die Formel für die bedingte Dichte (3.2) ergibt:

$$g_{V|\tau_j}(v|\tau_j) = \frac{f_{\tau_j|V}(\tau_j|v)g_V(v)}{\int_{\mathbb{R}^p} f_j(\tau_j|v)g_V(v)dv} = \frac{f_{\tau_j|V}(\tau_j|v)}{f_j(\tau_j)}g_V(v) \quad (17)$$

und $f_j(t)$ ist die unbedingte Dichte von τ_j . Um die Notation möglichst einfach zu halten nehmen wir wie im vorherigen Abschnitt an das $\xi_1 = 1$. Für $t \in [T_1, T_2)$ bestehen Ausfall-Informationen deshalb aus der Ausfall Zeit τ_1 und aus $B := \{\tau_j > t, 2 \leq j \leq m\}$

Nun erhalten wir für $A \subset \mathbb{R}^p$:

$$P(V \in A|B, \tau_1) = \frac{P(\{V \in A\} \cap B|\tau_1)}{P(B|\tau_1)} = \int_A \frac{\prod_{j=2}^m \bar{F}_{\tau_j|V}(t|v)}{P(B|\tau_1)} g_{V|\tau_1}(v|\tau_1) dv$$

und

$$P(B|\tau_1) = \int_{\mathbb{R}^p} (\prod_{j=2}^m \bar{F}_{\tau_j|V}(t|v)) g_{V|\tau_1}(v|\tau_1) dv$$

Also

$$g_{V|\mathcal{H}_t}(v) = \frac{\prod_{j=2}^m \bar{F}_{\tau_j|V}(t|v)}{P(B|\tau_1)} \frac{f_{\tau_1|V}(\tau_1|v)}{f_1(\tau_1)} g_V(v); \quad t \in [T_1, T_2) \quad (18)$$

Für $T \geq T_2$ kann die bedingte Dichte $g_{V|\tau_j}(v|\tau_j)$ analog bestimmt werden. Wir lassen die Details aus. Für Modelle mit Clayton Schrankencopula können explizite Ausdrücke für $g_{V|\tau_j}(v|\tau_j)$ gegeben werden.

Martingal Ausfall-Intensitäten

In Faktor Copula Modellen können wir eine intuitive Erklärung für die Dynamik von Martingal Ausfall-Intensitäten geben. Wir nehmen für diesen Moment an das der Faktor Vektor V beobachtbar ist, und damit das die für Investoren verfügbare Information gegeben ist durch die künstliche Filtration $\tilde{\mathcal{H}}_t = \mathcal{H}_t \vee \sigma(V)$, $t \geq 0$. Da die τ_i bedingt unabhängig sind, bei gegebenem V , folgt nach Proposition 9.39, das die Martingal-Intensität von τ_i unter Berücksichtigung der Filtration $(\tilde{\mathcal{H}}_t)$ gegeben ist durch

$$\tilde{\lambda}_i(t|V) = f_{\tau_i|V}(t|V) / \bar{F}_{\tau_i|V}(t|V)$$

Außerdem wissen wir das die Martingal-Intensität von τ_i unter Berücksichtigung der inneren Filtration (\mathcal{H}_t) durch Projektion berechnet werden kann, d.h.

$$\lambda_{t,i} = E(\tilde{\lambda}_i(t|V)|\mathcal{H}_t)$$

(betrachte zum Beispiel Theorem 14 in Kapitel 2)

Also erhalten wir

$$\lambda_{t,i} := \int_{\mathbb{R}^p} \frac{f_{\tau_i|V}(t|v)}{\bar{F}_{\tau_i|V}(t|v)} g_{V|\mathcal{H}_t}(v) dv \quad (19)$$

8.3 Interacting Intensities (sich beeinflussende Intensitäten)

In Copula Modellen ist die abhängige Struktur der Ausfall-Zeiten von außen festgelegt (exogenously specified); Die Form der resultierenden Ausfall-Ansteckung kann dann vom Modell einfach berechnet werden.

In Modellen mit sich gegenseitig beeinflussenden Intensitäten ist andererseits die Auswirkung von Ausfällen auf die Ausfall-Intensitäten von Überlebenden Firmen exogen festgelegt; Die gemeinsame Verteilung der Ausfall-Zeiten wird dann endogen hergeleitet. Dies führt zu einer sehr intuitiven Parametrisierung des Ausfallrisikos und der Ausfall Abhängigkeit. Der größte Nachteil von Modellen mit sich beeinflussenden Intensitäten ist die Tatsache, dass die Randverteilung von einzelnen Ausfall Zeiten typischerweise nicht in geschlossener Form vorhanden ist, so ist die Kalibration des Modells zu Ausfall bedrohten Term-Struktur Daten weiter entwickelt als in Copula Modellen.

In Modellen mit sich beeinflussenden Intensitäten ist die Martingal Ausfall-Intensität von Firma i , gehörend zu einem gegebenen Portfolio, gegeben durch eine von außen festgelegte Funktion $\lambda_i(t, Y_t)$, abhängig von der Zeit und dem aktuellen Zustand Y_t des Portfolios. Die Abhängigkeit vom aktuellen Zustand des Portfolios ist die wesentliche Neuheit dieses Modells. Dadurch kann das Ausfallrisiko explizit modelliert werden. Sei beispielsweise angenommen das Firma i eine kommerzielle Bank und Firma j ein Haupt-Kreditnehmer von Bank i ist, dann erwarten wir das sich die bedingte Aus-

fallwahrscheinlichkeit von Firma i erhöht falls Firma j in Verzug (Ausfall) gerät. Das kann man modellieren wenn man $\lambda_i(t, y) = a_{i0}(t) + a_{i1}(t)I_{\{y_j=1\}}(y)$ für nicht-negative und begrenzte Funktionen $a_{i0}, a_{i1} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ nimmt. Das Modell läßt sich einfach erweitern für stochastische Ausfall-Intensitäten der Form $\lambda_i(\Psi_t, Y_t)$ für einige beobachtbare Hintergrund Prozesse (Ψ_t) . Es ist praktisch den Ausfall-Indikator-Prozess (Y_t) in einem Modell mit sich beeinflussenden Intensitäten, wie etwa eine time-inhomogeneous continuous-time Markov Kette zu modellieren. Auf diese Weise können die rechnerischen Werkzeuge der Theorie von Markov-Ketten für die Analyse und Simulation des Modells benutzt werden. Wir sammeln einige wesentliche Fakten über continuous-time Markov Ketten.

Markov Ketten in stetiger Zeit (continuous-time Markov chains)

Eine Zeit-Inhomogene Markov Kette in stetiger Zeit (X_t) auf einem Zustandsraum S ist charakterisiert durch nicht-negative und begrenzte Übergangsfunktionen (transition rate functions)

$\lambda(t, x, y), x, y \in S, x \neq y, t \geq 0$ mit folgender Interpretation. Sei $t \geq 0$ fest und setze $T := \inf\{s : X_s \neq X_t\}$, d.h. T gibt die Zeit des ersten Sprunges auf der Kette nach der Zeit t . Definiere für $x \in S$,

$$\lambda(t, x, x) := - \sum_{y \in S, y \neq x} \lambda(t, x, y), t \geq 0$$

und definiere durch $\mathcal{H}_t := \sigma(\{X_s : s \leq t\})$ die natürliche Filtration der Kette.

Dann gilt

$$P(T > s | \mathcal{H}_t) = P(T > s | X_t) = \exp\left(-\int_t^s \lambda(u, X_t, X_t) du\right), s \geq t \quad (20)$$

In dem speziellen Fall von Zeit-Homogenen Markov-Ketten in denen die Übergangs-Funktionen (transition rate functions) von der Zeit unabhängig sind, bei gegebenem \mathcal{H}_t , bezeichnet $(T-t)$ die Wartezeit bis zum nächsten Sprung nach der Zeit t und diese ist $\exp(-\lambda(X_t, X_t))$ verteilt. Außerdem haben wir für $y \in S$ und T wie zuvor

$$P(X_T = y | \mathcal{H}_t, T) = -\lambda(T, X_t, y) / \lambda(T, X_t, X_t) \quad (21)$$

Falls die Kette einen Sprung zur Zeit t macht, ist die Wahrscheinlichkeit des springens in einen besonderen Zustand y proportional zu der Übergangsrate $\lambda(t, X_{t-}, y)$, in der X_{t-} den Zustand der Kette sofort vor dem Sprung bezeichnet.

Als nächstes führen wir den Generator $G_{[t]}$, $t \geq 0$, der Kette (X_T) ein. Für festes t bildet der Generator $G_{[t]}$ für jede Funktion $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ eine neue Funktion $G_{[t]}f : S \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$G_{[t]}f(x) = \sum_{y \in S, y \neq x} \lambda(t, x, y)(f(y) - f(x)) \quad (22)$$

Aus einer Reihe von Gründen ist der Generator ein sehr nützliches mathematisches Objekt. Einer davon ist der, dass für irgendwelche $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, der Prozess

$$M_t^f := f(X_t) - \int_0^t G_{[s]}f(X_s)ds, t \geq 0 \quad (23)$$

ein (\mathcal{H}_t) -Martingal ist. Ein zweiter Grund ist das, wie weiter unten erklärt, der Generator in den Kolmogorov Gleichungen erscheint, einem System von ODEs, die die Übergangswahrscheinlichkeit der Kette (X_t) charakterisieren.

Konstruktion von (interacting intensities) aufeinander wirkenden Intensitäten durch Markov Ketten

Jetzt wenden wir uns der formalen Konstruktion von Modellen mit interacting intensities zu.

Setze $S := \{0, 1\}^m$ und definiere, für $y \in S$ und $i \in \{1, \dots, m\}$, den Zustand y^i durch $y_j^i = y_j$ für $j \in \{1, \dots, m\}$ und $y_i^i = 1 - y_i$, d.h. y^i wird konstruiert aus y durch flippen der i -ten Koordinate. Es seien gegeben, für $1 \leq i \leq m$, nicht-negative und begrenzte Funktionen $\lambda_i : [0, \infty) \times S \rightarrow \mathbb{R}_+$ (die candidate martingale default intensities), dann definieren wir den Ausfall Indikator-Prozess (Y_t) als eine Zeit-inhomogene Markov-Kette in stetiger Zeit mit Zustandsraum S und Übergangsraten

$$\lambda(t, y, x) = \begin{cases} I_{\{y_i=0\}} \lambda_i(t, y) & \text{falls } x=y^i \text{ für ein } i \in \{1, \dots, m\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (24)$$

(24) impliziert das die Kette nur zu den benachbarten Zuständen Y_t^i springen kann, die sich vom gegenwärtigen Zustand Y_t durch genau einen Ausfall (default) unterscheiden; Insbesondere gibt es keine gemeinsamen Ausfälle (Es fallen keine zwei oder mehr Firmen zur selben Zeit aus). Falls $Y_{t,h} = 0$ ist, ist die Wahrscheinlichkeit das Firma i im kleinen Zeit Intervall $[t, t+h)$ ausfällt, d.h. die Wahrscheinlichkeit des Springens zum benachbarten Zustand Y_t^i in $[t, t+h)$, ungefähr gleich mit $h\lambda_i(t, Y_t)$.

Der Generator von (Y_t) ist gegeben durch

$$G_{[t]}f(y) = \sum_{i=1}^m I_{\{y_i=0\}} \lambda_i(t, y)(f(t, y^i) - f(t, y)), y \in S \quad (25)$$

Die Definition von (Y_t) weist darauf hin das $(\lambda_i(t, Y_t))$ die Martingale Ausfall Intensität (martingale default intensity) von Firma i ist.

Wenn wir (23) verwenden ist ein formaler Beweis einfach.

Sei $f_i(y) = y_i$, dann ist $Y_{t,i} = f_i(Y_t)$ und $G_{[t]}f_i(y) = I_{\{y_i=0\}} \lambda_i(t, y)$

Folglich

$$Y_{t,i} - \int_0^{t \wedge \tau_i} \lambda_i(s, Y_s) ds = Y_{t,i} - \int_0^t G_{[s]}f_i(Y_s) ds$$

ist ein Martingal nach (23).

Übergangsfunktionen und Kolmogorov Gleichungen.

Die Übergangswahrscheinlichkeiten (transition probabilities) der Kette (Y_t) sind gegeben durch

$$p(t, s, x, y) := P(Y_s = y | Y_t = x), \quad x, y \in S, \quad 0 \leq t \leq s \leq \infty \quad (26)$$

Es ist weiterhin bekannt das die Funktion $p(t, s, x, y)$ den Kolmogorov backward and forward equations genügt. Diese Gleichungen sind sehr nützliche numerische Werkzeuge in der Analyse dieses Modells. Die backward equation ist ein System von ODEs (gewöhnliche DGLen) für die Funktion $(t, x) \rightarrow p(t, s, x, y), 0 \leq t \leq s$; s und y werden als Parameter betrachtet.

Die allgemeine Form der Gleichung ist $(\partial/\partial t)p(t, s, x, y) + G_{[t]}p(t, s, x, y) = 0$, mit Endbedingung $p(s, s, x, y) = I_{\{y\}}(x)$. In unserem Modell führt dies zu dem folgenden System von ODE's:

$$\frac{\partial p(t, s, x, y)}{\partial t} + \sum_{i=1}^m (1 - x_i) \lambda_i(t, x) (p(t, s, x^i, y) - p(t, s, x, y)) = 0$$

Die forward equation ist ein System gewöhnlicher DGLen für die Funktion $(s, y) \rightarrow p(t, s, x, y), s \geq t$, welches durch den angrenzenden Operator G_t^* des Generators $G_{[t]}$ geregelt wird. Für kleines m , ist das System gewöhnlicher DGLen, das der Kolmogorov backward (und forward) Gleichung entspricht einfach numerisch zu lösen. Da die Kardinalität vom Zustandsraum $\#S = 2^m$ ist, sind für große m die Kolmogorov Gleichungen nicht nützlich. Ein Modell mit interacting intensities ist einfach zu simulieren wenn man eine Variante von Algorithmus 9.38 benutzt. Alternativ kann man die Größe vom Zustandsraum reduzieren indem man ein Modell mit einer homogenen Gruppen Struktur betrachtet, wie weiter unter erklärt wird.

Modelle für die Ausfall-Intensität

Die Funktionen $\lambda_i(t, y)$ sind ein wesentlicher Bestandteil in einigen Modellen mit sich gegenseitig beeinflussenden Intensitäten. Deshalb diskutieren wir mehrere Spezifikationen die in der Literatur empfohlen werden. Jarrow und Yu (2001) studierten ein Modell mit stochastischem Hintergrund Prozess (Ψ_t) , aber beschränkten sich auf eine spezielle Form von sich gegenseitig beeinflussenden Intensitäten (interacting intensities) genannt primary-secondary framework. In diesem System werden Firmen in zwei Klassen aufgeteilt: Primäre und Sekundäre. Die Ausfall-Intensität von Primären Firmen hängt nur von (Ψ_t) ab; Die Ausfall-Intensität von sekundären Firmen hängt von (Ψ_t) und dem Verzugs-Stand der primären Firmen ab. Diese vereinfachte Annahme erleichtert die mathematische Analyse des Modells. Unten stellen wir ein konkretes Beispiel aus ihrem Paper vor. Wir erlauben $m=2$ und identifizieren (Ψ_t) mit der short rate of interest (r_t) . Die Verzug-Intensitäten sind

dann gegeben durch

$$\lambda_1(r_t, Y_t) = a_{10} + a_{11}r_t \text{ und } \lambda_2(r_t, Y_t) = a_{20} + a_{21}r_t + a_{22}I_{\{Y_{t,1}=1\}}$$

Unternehmen eins ist eine primäre Firma und Unternehmen zwei ist eine sekundäre Firma. Ein typisches Szenario für das primary-secondary framework ist das folgende.

Primäre Firmen stimmen mit großen Gesellschaften (corporations) überein; Sekundäre Firmen stimmen mit kommerziellen Banken überein, welche eine wesentliche Kreditaufnahme zu den primären Firmen haben. Unter dem primary-secondary framework können Modelle in denen der Ausfall von Firma i , die Ausfall-Intensität von Firma i ($i \neq j$) beeinflusst, und umgekehrt, nicht modelliert werden

Yu(2005b) analysierte ein Modell in dem sich das ganze Portfolio an dem "erhöhtem Risiko Zustand (enhanced risk state)" nach dem ersten Ausfall beteiligt. Es werden Ausfall-Intensitäten der Form

$$\lambda_i(t, Y_t) = a_0 + a_1 I_{\{Y_t \neq 0\}}, \quad i \in \{1, \dots, m\}, \quad a_0, a_1 > 0 \quad (27)$$

benutzt. Also springt die Ausfall-Intensität der überlebenden Firmen zur ersten Ausfallzeit T_1 von a_0 auf $a_0 + a_1$. Die Voraussetzung von identischen Ausfall-Intensitäten für alle Firmen impliziert das das Portfolio homogen ist, d.h. das die Ausfall-Zeiten (τ_1, \dots, τ_m) austauschbar sind. Yu legte nahe, das für ein Portfolio von hochwertigen Krediten, $a_0 \approx 1\%$ und $a_1 \approx 0.1\%$ eine angemessene Folge von Größenordnungen für die Modell Parameter ist. Simulationsstudien über die er in seinem Paper berichtet zeigen das das Modell in der Lage sein könnte sichere Eigenschaften von Kredit Spreads im Markt von europäischen Telekom Bonds zu erklären.

Frey und Backhaus (2004) studierten ein Modell in dem die Ausfall-Intensität einer gegebenen Firma, vom gesamten Anteil von Unternehmen die bisher in Verzug geraten sind, abhängt. Die homogene-Portfolio Version von dem

Modell kann folgendermaßen beschrieben werden. Bezeichne das Verhältnis von Ausgefallenen-Unternehmen im Zustand y durch

$$\bar{m}(y) := 1/m \sum_{i=1}^m y_i \text{ für } y \in S$$

Dann gilt:

$$\lambda_i(t, Y_t) = h(t, \bar{m}(Y_t)) \tag{28}$$

für irgendeine begrenzte Funktion $h : \mathbb{R}_+ \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ die in ihrem zweiten Argument steigend ist. Diese Art von Zusammenspiel zwischen Ausfall-Intensitäten macht sofort Sinn: Wenn eine Finanz-Institution eine ungewöhnlich hohe Anzahl von Verlusten in ihrem Darlehen-Portfolio verbuchen mußte, ist es weniger Wahrscheinlich das Kredit zusagen erweitert werden wenn ein anderer Schuldner in finanzielle Bedrängnis gerät. Offensichtlich hebt das die Ausfall-Wahrscheinlichkeit der verbliebenen Schuldner. Eine ungewöhnlich kleine Anzahl von Ausfällen könnte einen negativen Einfluss auf das gesamte Geschäftsklima haben. Vom mathematischen Standpunkt aus sind, wenn wir annehmen das die Ausfall-Zeiten (τ_1, \dots, τ_m) austauschbar sind, die Ausfall-Intensitäten notwendigerweise von der Form (28). Zum Beispiel sind die Ausfall-Intensitäten im homogenen Modell (27) von der Form (28) mit $h(t, l) = a_0 + a_1 I_{\{l>0\}}$.

Literatur

- [1] Dickson, D. C. M. (2005). *Insurance Risk and Ruin*. Cambridge University Press, Cambridge.