

Seminar

Quantitatives Risikomanagement

Operationelles Risiko und Versicherungsanalytik

Caren Cammerer

Mathematisches Institut
der
Universität zu Köln

Wintersemester 2009/2010
Betreuung: Prof. Schmidli, J. Eisenberg

Inhaltsverzeichnis

1	Operationelles Risiko	1
1.1	Eine neue Risikoklasse	1
1.2	Die elementaren Ansätze	3
1.3	Fortgeschrittener Messansatz (Advanced Measurement Approaches - AMA)	4
1.4	Operationelle Verlustdaten	6
2	Versicherungsanalytik	9
2.1	Der Gesamtverlust	9
2.2	Annäherungen und Panjer Rekursion	12
2.3	Poisson Mischungen	17
2.4	Der Endbereich der Gesamtverlustverteilung	18
2.5	Der homogene Poisson Prozess	18
2.6	Verwandte Prozesse des homogenen Poisson Prozesses	20
	Literaturverzeichnis	22

Kapitel 1

Operationelles Risiko

1.1 Eine neue Risikoklasse

Das operationelle Risiko ist seit jeher untrennbar mit dem unternehmerischen Handeln verbunden. Dennoch ist eine separate Betrachtung dieser Risikokategorie zweckmäßig und geboten.

Definition: Operationelles Risiko

Das operationelle Risiko stellt das Risiko von Verlusten infolge unzulänglicher oder versagender interner Verfahren, Mitarbeiter und Systeme oder infolge bankexterner Ereignisse dar. Die Definition beinhaltet das Rechtsrisiko, schließt aber das Strategische- und das Reputationsrisiko aus.

Beispiele für solche Verluste sind interner sowie externer Betrug, Verluste aufgrund von IT-Ausfällen, Verluste aufgrund von Prozessrisiken und Verluste aufgrund externer Ereignisse wie zum Beispiel Flut, Feuer, Erdbeben und Terrorismus. Verluste aufgrund falscher Managemententscheidungen, wie so viele durch Fusionen und Aufkäufe in den 1990er entstanden sind, sind beim operationellen Risiko nicht eingeschlossen.

Ein Fall, der in der Vergangenheit fast alle Bereiche des operationellen Risikos berührte, war der Bankrott der Barings Bank. Eine schlechte Ablauforganisation, die mangelhafte Zusammenarbeit zwischen Frontoffice, Abwicklung(Backoffice) und Finanzrisikocontrolling sowie unzureichende interne Prüfungen, Betrug und das externe Ereignis mit dem Kobe Erdbeben 1995, das den japanischen Nikkei Börsenindex über Nacht um über tausend Punkte fallen ließ, begünstigte den wirtschaftlichen Kollaps dieser einst bekannten

Investmentbank. Neben solchen operationell verursachten Verlustfällen ist es auch die zunehmende Komplexität des Bankgeschäfts, die dem operationellen Risiko den Aufstieg zu einer eigenen Risikokategorie ermöglichte und den Basler Ausschuss veranlasste, die Vorschriften von Basel II aufzustellen. Vor allem durch das Verlassen auf die Segnungen der Informationstechnologie, durch neue und wechselnde Geschäftsfelder, durch die fortschreitende Globalisierung und Automatisierung sowie durch immer komplexer werdende Produkte schoss das Risiko in die Höhe. Basel II bezeichnet die Gesamtheit der Eigenkapitalvorschriften. Das Ziel ist die Sicherung einer angemessenen Eigenkapitalausstattung von Instituten und die Schaffung einheitlicher Wettbewerbsbedingungen für die Kreditvergabe und den Kredithandel. Vor allem sollen die staatlich verlangten regulatorischen Eigenkapitalanforderungen an dem tatsächlichen Risiko der getätigten Geschäfte ausgerichtet werden. Basel II besteht aus drei sich gegenseitig ergänzenden Säulen. Nach Säule I muss eine **Mindesteigenkapitalanforderung** erfüllt sein. Der Ansatz der Säulen II und III des neuen Abkommens beinhaltet den **bankaufsichtlichen Überprüfungsprozess** zur Förderung adäquater Risikomanagementsysteme und eine **verstärkte Marktdisziplin** durch vermehrte Offenlegung von Informationen. Der Markt hat schnell verschiedene Wege zur Milderung der Effekte der neuen Risikoklasse zur Verfügung gestellt. Dies beinhaltet eine Palette, die von IT Lösungen und universellen Datenbanken zur Verbesserung der Bestimmung der Höhe des operationellen Risikos bis hin zu versicherungstypischen Lösungen für Banken führt.

Derzeit ist der Mangel an operationellen Verlustdaten für eine saubere Bewertung ein großes Problem. In der Versicherungswirtschaft besteht ein ähnliches Problem. Allerdings ist die Versicherungsbranche in der Lage das Problem mittels Datenzusammenschluß über Branchenbeteiligte zu lösen. Im Bankenbereich ist ein ähnlicher Ansatz angedacht, wenn einst repräsentative Datenquellen zur Verfügung stehen. Die einzige derzeit in Deutschland existierende Datenquelle ist die Datenbank der Auswirkungsstudien(Quantitative Impact Study - QIS), die durch die Deutsche Bundesbank zur Abschätzung der Auswirkungen von Basel II auf die deutschen Banken erstellt wurde. Darüber hinaus stellen einige Privatunternehmen Daten zur Verfügung. Im Folgenden werden verschiedene Ansätze für die Eigenkapitalanforderungen hinsichtlich der operationellen Risiken diskutiert.

1.2 Die elementaren Ansätze

Die elementaren Ansätze zur Modellierung operationeller Risiken richten sich an kleinere Banken ohne ausgedehnte internationale Aktivitäten, bei denen die Verlustaufteilung nach verschiedenen Risikoklassen und Risikotypen nicht erforderlich ist. Es gibt zwei elementare Ansätze, den **Basisindikatoransatz** und den **Standardansatz**.

Der **Basisindikatoransatz** ist das einfachste Verfahren zur Ermittlung der bankaufsichtlichen Eigenkapitalunterlegung für operationelle Risiken von Kreditinstituten im Rahmen von Basel II. Das Kreditinstitut ist bei der Anwendung des Basisindikatoransatzes verpflichtet, zur Abdeckung des operationellen Risikos, Eigenkapital in Höhe von einem fixen Prozentsatz des Dreijahresdurchschnittes des in der Solvabilitätsverordnung definierten Risikoindicators vorzuhalten. Der Durchschnitt ist über den Bruttoertrag der letzten drei Jahre zu ermitteln, wobei negative Werte und Null bei der Durchschnittsbildung nicht berücksichtigt werden. Basierend auf den verschiedenen Auswirkungsstudien(QIS) hat der Basler Ausschuss den Prozentsatz auf 15% festgesetzt. Das Eigenkapital unter dem Basisindikatoransatz für operationelle Risiken im Jahr t wird wie folgt berechnet:

$$RC_{BI}^t(OR) = \frac{1}{Z_t} \sum_{i=1}^3 \alpha \max\{GI^{t-i}, 0\} \quad (1)$$

wobei $Z_t = \sum_{i=1}^3 I_{\{GI^{t-i} > 0\}}$ und GI^{t-i} für den Bruttoertrag im Jahr $t - i$ steht.

Die Idee des **Standardansatzes** ist, die Geschäftstätigkeit der Bank nach acht in der Solvabilitätsverordnung vorgegebenen Geschäftsfeldern aufzuteilen:

Unternehmensfinanzierung und -beratung, Handel, Privatkundengeschäft, Firmenkundengeschäft, Zahlungsverkehr und Abwicklung, Depot- und Treuhandgeschäft, Vermögensverwaltung und Wertpapierprovisionsgeschäft.

Für jedes der vergangenen drei Jahre wird ein Teilanrechnungsbetrag ermittelt, in dem die positiven Bruttoerträge der einzelnen Geschäftsfelder mit dem jeweiligen in der Solvabilitätsverordnung vorgegebenen sog. Beta-Faktor multipliziert und dann aufaddiert werden. Die Eigenkapitalunterlegung ist dann der Mittelwert dieser drei Teilanrechnungsbeträge und liefert die folgende Formel:

$$RC_S^t(OR) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \max\left\{\sum_{j=1}^8 \beta_j GI_j^{t-i}, 0\right\} \quad (2)$$

Dabei ist zu beachten, dass negative Eigenkapitalunterlegungen in den Geschäftsfeldern durch positive Eigenkapitalunterlegungen anderer Geschäftsfelder auszugleichen sind. Die

Beta - Faktoren für die einzelnen Geschäftsfelder wurden aufgrund der Auswirkungsstudien (QIS) durch den Basler Ausschuss wie folgt festgelegt:

1.	Unternehmensfinanzierung und -beratung	18 Prozent,
2.	Handel	18 Prozent,
3.	Zahlungsverkehr und Abwicklung	18 Prozent,
4.	Depot- und Treuhandgeschäft	15 Prozent,
5.	Firmenkundengeschäft	15 Prozent,
6.	Privatkundengeschäft	12 Prozent,
7.	Vermögensverwaltung	12 Prozent,
8.	Wertpapierprovisionsgeschäft	12 Prozent.

1.3 Fortgeschrittener Messansatz (Advanced Measurement Approaches - AMA)

Der fortgeschrittene Messansatz erlaubt die Analyse von operationellen Verlustdaten. Im Gegensatz zum Basisindikatoransatz und dem Standardansatz gibt es bei dem fortgeschrittenen Messansatz kein festes Verfahren zur Ermittlung des Mindesteigenkapitals. Stattdessen basiert dieser Ansatz auf internen von jedem Kreditinstitut selbst zu wählenden Berechnungsverfahren zur Messung des operationellen Risikos, anlehnend an verschiedene quantitative und qualitative Kriterien festgelegt durch den Basler Ausschuss. Um den fortgeschrittenen Messansatz verwenden zu können, wird die Erlaubnis der Aufsichtsbehörde benötigt. Beim fortgeschrittenen Messansatz wird für die operationellen Verluste eine Matrix aus den vorher aufgeführten acht Geschäftsfelder und den folgenden sieben Ereigniskategorien verwendet:

Interner und externer Betrug; Beschäftigungspraxis und Arbeitsplatzsicherheit; Kunden-, Produkt- und Geschäftsgepflogenheiten; Sachschäden; Geschäftsunterbrechungen und Systemausfälle; Ausführungs-, Lieferungs- und Prozessmanagement.

Gemäß den Anforderungen der Solvabilitätsverordnung müssen Kreditinstitute Daten über Verlustvorfälle aufgrund wiederholender hoch frequentierter operationeller Risiken und von eher seltenen, aber schwerwiegenden Schadensereignissen sammeln und archivieren. Diese Datensammlung dient dabei nicht nur als Datenbasis für eine spätere Berechnung der Eigenkapitalunterlegung nach dem AMA, sondern stellt auch eine der qualitativen Anfor-

derungen an das Management und Controlling operationeller Risiken dar.

Des Weiteren müssen Stressszenarien bzgl. Schadenhöhe und Häufigkeit und der Beziehung zwischen den einzelnen Verlustkategorien aufgenommen werden. Stressszenarien sind spezielle Analysen, anhand derer überprüft wird, wie sich z. B. bestimmte Krisenszenarien auf die Höhe eines operationellen Risikos auswirken.

Beim Mangel von detaillierten Modellen für verschiedene Verlusttypen sollten Risikomesungen für den Gesamtverlust durch Summierung der verschiedenen Verlustkategorien durchgeführt werden. Dabei sollten sowohl erwartete als auch unerwartete Verluste miteinbezogen werden. Hier nun die Grundversion eines typischen fortgeschrittenen Messansatzes für die Kalkulation operationeller Risiken für das Jahr t . Es wird dabei davon ausgegangen, dass historische Verlustdaten aus früheren Jahren in Datenbanken in folgender Form gesammelt wurden:

$$\{X_k^{t-i,b,l} : i = 1, \dots, T; b = 1, \dots, 8; l = 1, \dots, 7; k = 1, \dots, N^{t-i,b,l}\} \quad (3)$$

wobei $X_k^{t-i,b,l}$ für den k -ten Verlust von Typ l für Geschäftsfeld b im Jahr $t - i$ steht, $N^{t-i,b,l}$ die Anzahl solcher Verluste ist und $T \geq 5$ Jahre ist.

Beachte, dass Schwellenwerte für jede (i,b,l) Kategorie festgelegt sind und kleine Verluste unterhalb der Schwellenwerte vernachlässigt werden. Ein Schwellenwert liegt typischerweise bei 10.000€. Der historische Gesamtverlust für Geschäftsfeld b im Jahr $t - i$ wird wie folgt berechnet:

$$L^{t-i,b} = \sum_{l=1}^7 \sum_{k=1}^{N^{t-i,b,l}} X_k^{t-i,b,l} \quad (4)$$

Der Gesamtverlust für Jahr $t - i$ beträgt:

$$L^{t-i} = \sum_{b=1}^8 L^{t-i,b} \quad (5)$$

Das Problem beim fortgeschrittenen Messansatz ist die Nutzbarkeit der Verlustdaten um eine Verteilung von L_t für Jahr t zu schätzen und das Risikomaß wie z.B. VaR oder Expected Shortfall für die geschätzte Verteilung zu kalkulieren. Sei ϱ_α das Risikomaß mit Aussagewahrscheinlichkeit α , so gilt für das Mindesteigenkapital:

$$RC_{AM}^t(OR) = \varrho_\alpha(L^t) \quad (6)$$

wobei α typischerweise einen Wert im Bereich 0,99-0,999 besitzt, der durch die lokalen Behörden eingeführt wird.

Aufgrund der Tatsache, dass die gemeinsame Verteilungsstruktur von Verlusten für (4) und (5) unabhängig vom Jahr unbekannt ist, wird auf einfache Zusammenschlüsse von Risikomaßen der verschiedenen Verlustkategorien zurückgegriffen und es gilt folgende Formel:

$$RC_{AM}^t(OR) = \sum_{b=1}^8 \varrho_{\alpha}(L^{t,b}) \quad (7)$$

Allerdings führt für jegliches kohärentes Risikomaß ϱ_{α} , die rechte Seite in (7) zu einer oberen Schranke für das Gesamtrisiko $\varrho_{\alpha}(L^t)$. Im Fall VaR entspricht die rechte Seite von (7) dem komotonen Szenario (vgl. Vortrag "Gesamtrisiko"). Die Optimierungsergebnisse (vgl. Vortrag "Gesamtrisiko") können hier genutzt werden um Schranken für $\varrho_{\alpha}(L^t)$ unter verschiedenen Abhängigkeitsszenarien der Geschäftsfelder zu berechnen. Reduziert auf die normierte Form $\alpha = VaR$ und $\alpha = 0,999$, so benötigt eine Eigenkapitalanforderung unter dem fortgeschrittenen Messansatz die Kalkulation von einer Größe des Typs:

$$VaR_{0,999}\left(\sum_{k=1}^N X_k\right) \quad (8)$$

wobei (X_k) die Verlustschwere (Schadenssumme pro Schadenfall) darstellt und N eine Zufallsvariable ist, die die Häufigkeit von operationellen Verlusten (Schadenanzahl) beschreibt.

1.4 Operationelle Verlustdaten

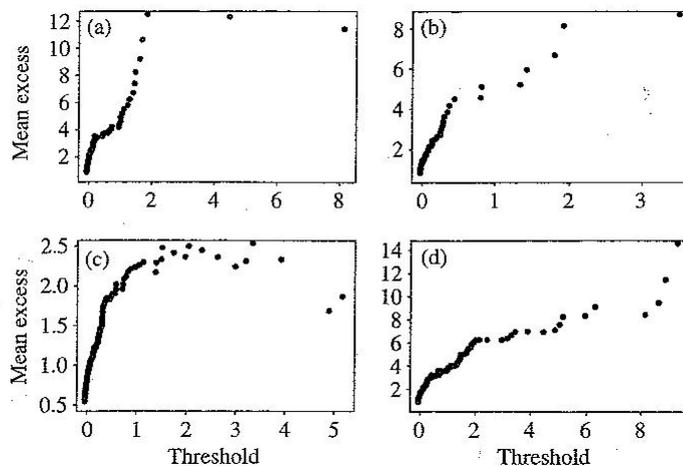
Um die vorigen Ansätze zuverlässig berechnen zu können, benötigen wir umfassende Datenmengen. Die Datensituation operationeller Risiken ist deutlich schlechter als für Kreditrisiken und Marktrisiken, wo große Mengen an Daten öffentlich verfügbar sind. Banken haben erst kürzlich mit der Sammlung von Daten begonnen und Poolinginitiativen befinden sich in der Anfangsphase, so dass bislang keine seriösen öffentlichen Datenquellen für die Bewertung operationeller Risiken existieren. Nach Aussage des Basler Ausschusses sollten Rückschlüsse basierend auf diesen Daten mit Vorsicht geschlossen werden. Die meisten, seit kurzem verfügbaren Datensammlungen stellen lediglich Daten für ein Jahr zur Verfügung. Selbst unter den besten Umständen stellt jedoch eine Einjahressammlung immer ein inkomplettes Bild von der Größe des Potentials der operationellen Risiken, insbesondere auch der bedeutenden großen Risiken dar.

Zur Bestimmung der angemessenen Schadenzahl- bzw. Schadenhöhenverteilungen für die Quantifizierung der operationellen Risiken wurden mittlerweile etliche empirische Studien durchgeführt. Auf der Grundlage dieser Studien ergeben sich die folgenden “stylized facts“:

- Die Schadenhöhe pro Schadenfall hat eine Heavy-tailed Verteilung
- Verluste ereignen sich wahllos
- Die Verlusthäufigkeit variiert stark

Heavy-tailed Verteilungen beinhalten die Möglichkeit, dass sich sehr große (“extreme“) Schadenhöhen mit nicht zu vernachlässigender Wahrscheinlichkeit realisieren könnten. Von Relevanz ist hier somit die Ausprägung des (rechten) Randbereichs der Schadenhöhenverteilung. Daher erfordern heavy-tailed Verteilungen eine höhere Unterlegung mit Risikokapital.

Insbesondere ist nun der 3.Punkt für die weitere Betrachtung operationeller Verlustdaten interessant. Dieser erklärt sich zum Teil aufgrund der Tatsache, dass die Banken, veranlasst durch den Basler Ausschuss, erst kürzlich mit der Sammlung operationeller Risikodaten begonnen haben. Es existiert eine bedeutende Menge an ungesicherten Auswertungen aus zu geringen Fallzahlen. Außerdem haben verschiedene Klassen von Verlusten einen bedeutenden zyklischen Bereich und/oder sind abhängig von wechselnden wirtschaftlichen Covariablen. Zum Beispiel könnten Abwicklungsfehler (backoffice) vom Handelsvolumen abhängen und Betrug könnte die komplette Wirtschaft durchziehen. Diese Ungleichmäßigkeit in der Verlusthäufigkeit macht eine Anwendung von statistischen Methoden schwierig. Allerdings könnte angenommen werden, dass die Verlustgröße eine Schadengradverteilung hat, welche zum Beispiel die Anwendung der Methoden der Extremwerttheorie erlauben würde.



In der vorigen Grafik ist die erwartete Excessfunktion (vgl. Vortrag "Extremwerttheorie") für operationelle Verlustdaten (QIS Datenbank, Industriedaten) dargestellt. Diese Grafik zeigt den ersten oberen Beobachtungspunkt - eine extreme Schadenhöhe. Die Excesspunkte in a) und b) nähern sich an eine lineare Funktion an und deuten auf einen Paretotyp hin. Dies steht im Gegensatz zu c), wo sich die Punkte bei einem Grenzwert einpendeln. Dies deutet auf eine Verlustverteilung mit einer endlichen oberen Grenze hin. Diese Aussage ist allerdings nur dann fundiert, wenn detailliertere Informationen über den Verlusttyp bekannt sind. Die zusammengefassten Daten in d) verbergen die verschiedenen Verhaltensweisen der Funktionen und illustrieren die Gefahr von naiven statistischen Analysen, die den Datengenerierungsmechanismus nicht beachten.

Moscadelli führte eine detaillierte Extremwerttheorie-Analyse von dem kompletten QIS Datenset aus mehr als 47000 operationellen Verlusten durch und folgte dass die Verlustverteilungsfunktionen im oberen Randbereich einer Paretoverteilung entsprechen. Die geschätzten Randparameter für die verschiedenen Geschäftsfelder reichen von 0,85 für die Vermögensverwaltung bis zu 1,39 für Firmenkundengeschäft. Sechs von den Geschäftsfeldern haben einen geschätzten Wert von $\xi > 1$. Basierend auf diesen QIS Daten, reichen die geschätzten RC/GI Kennziffern von 8,3% für Privatkundengeschäft bis zu 33,3% für Zahlungsverkehr und Abwicklung, mit einem Alpha-Wert von 13,3%. Dieser ist damit nur unwesentlich geringer als der vorgegebene Basel II Wert in Höhe von 15% beim Basisindikatoransatz. Zu beachten sind die viel weitläufigeren Grenzen des Wertes β , die aus den Analysen der QIS Daten entstanden sind, verglichen mit dem Bereich von 12%-18% des β Wertes aus dem Standardansatz. Die allgemeine Paretoverteilung (vgl. Vortrag "Extremwerttheorie") ist eine der meist genutzten statistischen Tools und stellt eine bessere Verteilung als andere Verlustverteilungen im oberen Randbereich dar. Aufgrund der extremen Daten und der Erforderlichkeit der Kalkulierung von Mindesteigenkapital ist daher die Extremwerttheorie sehr nützlich.

Kapitel 2

Versicherungsanalytik

Versicherungsmathematische Methoden zur Modellierung und Kalkulation von Versicherungsprodukten der traditionellen Bereiche Leben, Nicht-Leben und Rückversicherung haben eine lange Geschichte. In jüngerer Zeit verschwindet die Grenze zwischen Finanz- und Versicherungsprodukten mehr und mehr. So gibt es zum Beispiel aktiengebundene Lebensversicherungsprodukte. Während einige von den kombinierten Bank-Versicherungsprodukten noch nicht den erwarteten Erfolg erfahren haben, bleibt es weiterhin notwendig die Lücken zwischen den beiden Feldern zu schließen. Im Folgenden werden einige relevante versicherungsmathematische Methoden diskutiert, die einfach auf das quantitative Risikomanagement im Finanzbereich übertragbar sind.

2.1 Der Gesamtverlust

Betrachten wir erneut (8), in der N Zufallsvariablen summiert werden für Zufallsverluste oder Schadenfälle (X_k), die sich in einer bestimmten Zeitspanne ereignen. Um ein Risikomaß wie z.B. VaR anzuwenden, ist es nötig Annahmen über (X_k) und N zu treffen. Dies führt uns zu einer der fundamentalsten Konzepte der Versicherungsmathematik.

Definition 1: Gesamtverlust

$N(t)$ bezeichnet die Anzahl der Verluste über ein festes Zeitintervall $[0, t]$ und X_1, X_2, \dots die einzelnen Verluste. Der Gesamtverlust wird dann definiert als

$$S_{N(t)} = \sum_{k=1}^{N(t)} X_k \tag{9}$$

mit Verteilungsfunktion $F_{S_{N(t)}}(x) = P(S_{N(t)} \leq x)$. Sei t fest gewählt, mit fester Notation für $t = 1$: S_N und F_{S_N} .

Bemerkung 2: Der in Definition 1 definierte Gesamtverlust ist als Zufallsvariable zu verstehen: $S_{N(t)}(\omega) = \sum_{k=1}^{N(t)(\omega)} X_k(\omega)$, $\omega \in \Omega$ und wird als Zufallssumme bezeichnet. Die analytische und numerische Kalkulation von F_{S_N} benötigt weitere Annahmen über (X_k) und N .

Annahme 3: Unabhängigkeit

Wenn die Zufallsvariablen (X_k) unabhängig und gleichverteilt sind mit einer gemeinsamen Verteilungsfunktion G , $G(0)=0$ und die Zufallsvariablen N und (X_k) unabhängig sind, wird **(9)** als zusammengesetzte Summe bezeichnet. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion von N wird zu $p_N(k) = P(N = k)$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

Proposition 4: Zusammengesetzte Verteilung

Wenn S eine zusammengesetzte Summe ist und die Annahme 3 gilt, dann gilt für alle $x \geq 0$:

$$F_{S_N}(x) = P(S_N \leq x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_N(k) G^{(k)}(x) \quad (10)$$

wobei $G^{(k)}(x) = P(S_k \leq x)$, die k -te Faltung von G ist. Dabei gilt, dass $G^{(0)}(x) = 1$ für $x \geq 0$ und $G^{(0)}(x) = 0$ für $x < 0$.

Obwohl **(10)** in expliziter Form gegeben ist, ist die versicherungsmathematische Kalkulation in speziellen Fällen schwierig, weil die Faltungspotenz $G^{(k)}$ einer Verteilungsfunktion G generell in geschlossener Form nicht verfügbar ist. Deswegen greift man zu numerischen Annäherungsmethoden. Dabei nutzt man die Tatsache, dass die Laplace-Stieltjes Umformung einer Faltung, das Produkt der Laplace-Stieltjes Umformung ist. Unter Verwendung der gewöhnlichen Notation $\hat{F}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dF(x)$, wobei $s \geq 0$ für die Laplace-Stieltjes Umformung steht, ergibt sich $\widehat{G^{(k)}}(s) = ((\hat{G}(s))^k)$. Aus Proposition 4 folgt:

$$\hat{F}_{S_N}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_N(k) \hat{G}^k(s) = M_N(\hat{G}(s)), s \geq 0 \quad (11)$$

wobei M_N die Momenterzeugende Funktion von N bezeichnet.

Beispiel 5: Die zusammengesetzte Poisson Verteilungsfunktion

Angenommen N sei Poisson-verteilt mit Intensitätsparameter $\lambda > 0$; geschrieben $N \sim Poi(\lambda)$. In diesem Fall ist $p_N(k) = e^{-\lambda} \lambda^k / k!$ mit $k \geq 0$ und für $s \in R$ gilt:

$$M_N(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} s^k = \exp(-\lambda(1-s))$$

Aus (11) folgt, dass für $s \geq 0$:

$$\hat{F}_{S_N}(s) = \exp(-\lambda(1 - \hat{G}(s)))$$

In diesem Fall wird die Verteilungsfunktion von S_N als zusammengesetzte Poisson Verteilungsfunktion bezeichnet und wird geschrieben als $S_N \sim CPoi(\lambda, G)$. Formel (11) erleichtert die Kalkulation von Momenten von S_N und verleiht die Eigenschaft der Fast Fourier Transformation. Bei der Kalkulation von Momenten ist zu beachten, dass unter der Annahme, dass genügend hohe Momente existieren und damit die Differenzierbarkeit von \hat{G} und M_N , gilt:

$$\frac{d^k}{ds^k} M_N(s) |_{s=1} = E(N(N-1) \cdots (N-k+1))$$

und

$$(-1)^k \frac{d^k}{ds^k} \hat{G}(s) |_{s=0} = E(X_1^k) = \mu_k$$

Beispiel 6: Weiterführung von Beispiel 5

Im Fall der gemischten Poisson Verteilungsfunktion erhält man :

$$E(S_N) = (-1) \frac{d}{ds} \hat{F}_{S_N}(s) |_{s=0} = \exp(-\lambda(1 - \hat{G}(0))) \lambda (-\hat{G}'(0)) = \lambda \mu_1 = (E(N)E(X_1))$$

Ähnliche Kalkulationen ergeben:

$$var(S_N) = E(S_N^2) - (E(S_N))^2 = \lambda \mu_2$$

Proposition 7: Momente von zusammengesetzten Verteilungsfunktionen

Unter Verwendung der Annahme 3 und der Annahme, dass $E(N) < \infty, \mu_2 < \infty$, ergibt sich:

$$E(S_N) = E(N)E(X_1)$$

und

$$var(S_N) = var(N)(E(X_1))^2 + E(N)var(X_1) \quad (12)$$

Bemerkung 8: Im zusammengesetzten Poisson Fall reduziert sich Formel (12) zu der Formel $\text{var}(S_N) = \lambda E(X_1^2) = \lambda \mu_2$. Im Fall der deterministischen Summe, wenn $P(N = n) = 1$, entsteht das Ergebnis $E(S_N) = n\mu_1$ und $\text{var}(S_N) = n \text{var}(X_1)$; tatsächlich folgt in diesem Fall $\text{var}(N) = 0$.

Das zusammengesetzte Poisson Modell ist ein Basismodell für Gesamtverluste von Finanz- oder Versicherungsrisiken. Dabei kann die Poissonverteilung wie folgt verstanden werden: Betrachte ein Zeitintervall $[0, 1]$ und sei N die Anzahl der Verluste in diesem Intervall. Dann kann angenommen werden, dass etliche potentielle Verlustgeneratoren mit Wahrscheinlichkeit p_n oder $1 - p_n$ existieren. Diese können Verluste in kleinen Teilintervallen $(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ für $k = 1, 2, \dots, n$ nicht erzeugen. Nehme außerdem an, dass die Existenz eines Verlustes irgendeines speziellen Teilintervalls nicht durch die Existenz von Verlusten anderer Intervalle beeinflusst wird. Die Anzahl N_n der Verluste ist binomialverteilt mit Parametern n und p_n :

$$P(N_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Kombiniert mit der Verteilung der Schadenhöhe pro Schadenfall führt diese Häufigkeitsverteilung in (10) zum so genannten binomialen Verlustmodell. Als nächstes nehme an, dass $n \rightarrow \infty$, so dass $\lim_{n \rightarrow \infty} n p_n = \lambda > 0$.

Aus dem Poisson Theorem (vgl. Vortrag "Extremwerttheorie") folgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(N_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Proposition 9: Summen von zusammengesetzten Poisson Zufallsvariablen

Sei die zusammengesetzte Summe $S_{N_i} \sim CPoi(\lambda_i, G_i)$, $i = 1, \dots, d$ und die Zufallsvariablen unabhängig, dann gilt:

$$S_N = \sum_{i=1}^d S_{N_i} \sim CPoi(\lambda, G)$$

wobei $\lambda = \sum_{i=1}^d \lambda_i$ und $G = \sum_{i=1}^d (\lambda_i / \lambda) G_i$

2.2 Annäherungen und Panjer Rekursion

Die Kalkulation von F_{S_N} ist für die Mehrheit der Modelle verschiedener numerischer Annäherungen nicht möglich. Im Folgenden wird die Nutzbarkeit einiger dieser Annäherungen beleuchtet und verschiedene Möglichkeiten der Verteilungsfunktion G dargestellt. Als

grundlegendes Beispiel wird der zusammengesetzte Poisson Fall $S_N \sim CPoi(\lambda, G)$ betrachtet. λ und G sind gegeben. Dann lässt sich F_{S_N} simulieren und durch mehrfaches Wiederholen ergibt sich eine empirische Schätzung, die nahe an der wahren Verteilung liegt.

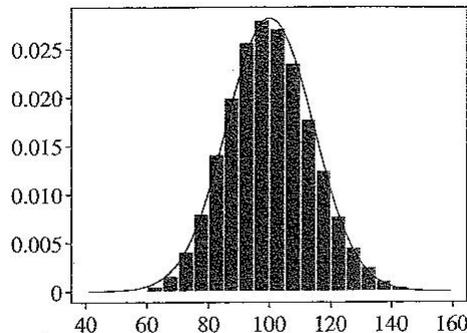


Figure 10.3. Histogram of simulated compound loss data ($n = 100\,000$) for $S_N \sim CPoi(100, Exp(1))$ together with normal approximation (10.14).

Bild 10.3 stellt eine Simulation von $n=100.000$ Realisationen von $S_N \sim CPoi(100, Exp(1))$ dar. Obwohl das Histogramm eine leichte Schräge aufweist, wird ein zentraler Grenzeffekt sichtbar. Dies wird in der nächsten Annäherung genutzt.

Annäherung an die Normalverteilung Da die Verlust Zufallsvariablen X_i unabhängig und gleichverteilt sind und S_N die Summe der Zufallsvariablen X_i ist, wird Proposition 7 angewandt, um die folgende Annäherung für generelle N zu erhalten:

$$F_{S_N}(x) \approx \phi\left(\frac{x - E(N)E(X_1)}{\sqrt{\text{var}(N)(E(X_1))^2 + E(N)\text{var}(X_1)}}\right) \quad (13)$$

In dieser und der folgenden Annäherung hat " \approx " keine spezifische mathematische Bedeutung. Es existiert ein Grenzwert, der rechtfertigt, dass die rechte Seite als Annäherung für die linke Seite genutzt wird. Insbesondere für den gemischten Poisson Fall, reduziert sich (13) zu

$$F_{S_N}(x) \approx \phi\left(\frac{x - 100}{\sqrt{200}}\right) \quad (14)$$

wobei ϕ die Standard-Normalverteilung darstellt. In Bild 10.3 wird eine Annäherung an die Normalverteilung dargestellt. Offensichtlich existieren Gegebenheiten, die der Annäherung zugrunde liegen: z.B. Schadenfälle sollten nicht zu endlastig sein. Für $CPoi(\lambda, G)$ ist einfach zu zeigen, dass die schiefen Parameter

$$\frac{E((S_N - E(S_N))^3)}{(\text{var}(S_N))^{3/2}} = \frac{E(X_1^3)}{\sqrt{\lambda(E(X_1^2))^3}} > 0 \quad (15)$$

genügen, so dass eine Annäherung an eine Verteilungsfunktion mit positiver Schräge die Annäherung in (14) verbessern würde, insbesondere im Endbereich der Verteilung. Dies führt zur nächsten Annäherung.

Verschobene Gamma Annäherung S_N lässt sich durch $k+Y$ annähern, wobei k ein Verschiebungsparameter ist und $Y \sim Ga(\alpha, \beta)$ gammaverteilt ist. Die Parameter (k, α, β) finden sich durch Paarung des Durchschnitts, der Varianz und der Schiefe von $k+Y$ und S_N . Damit ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$k + \frac{\alpha}{\beta} = \lambda E(X_1), \quad \frac{\alpha}{\beta^2} = \lambda E(X_1^2), \quad \frac{2}{\sqrt{\alpha}} = \frac{E(X_1^3)}{\sqrt{\lambda(E(X_1^2))^3}}$$

In dem Fall $\lambda = 100$ und X_1 exponentialverteilt, ergibt dies $k + \alpha/\beta = 100$, $\alpha/\beta^2 = 200$ und $2/\sqrt{\alpha} = 0,2121$ mit Lösung $\alpha = 88,89$, $\beta = 0,67$, $k = -32,72$.

Kommentar zu diesen Annäherungen Beide Annäherungen liefern in den überwiegenden Fällen ausreichend brauchbare Ergebnisse. Allerdings sind für das Risikomanagement hauptsächlich Risiken im oberen Endbereich interessant, wie in Bild 10.4.

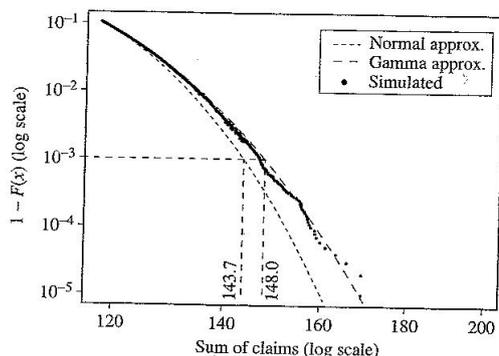


Figure 10.4. Simulated CPoi(100, Exp(1)) data together with normal- and translated-gamma approximations (log-log scale). The 99.9% quantile estimates are also given.

Dort sind beide Annäherungen für $x \geq 120$ auf einer logarithmischen Skala dargestellt. Diese entsprechen dem Endbereich jenseits des 90% Quantils von F_{S_N} . Es wird klar, dass die Gamma Annäherung besser im oberen Endbereich arbeitet. Hingegen die bloße Annäherung an die Normalverteilung würde das Verlustpotential unterschätzen. Für Verlustdaten, die endlastiger sind als exponentielle Verlustdaten, liefert auch die Vershobene-Gamma-Approximation ungenügende Ergebnisse. Ein weiterer Ansatz ist die Modellierung des Endbereichs von simulierten zusammengesetzten Verlusten S_N mittels der Pareto Verteilung. Dies zeigen Bilder 10.5 und 10.6, wo wir verschiedene Annäherungen für $CPoi(100, LN(1, 1))$ und für $CPoi(100, Pa(4, 1))$ gezeichnet haben.

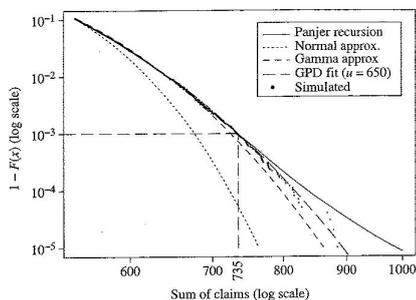


Figure 10.5. Simulated CPoi(100, LN(1, 1)) data ($n = 100\,000$) with normal-, translated-gamma, GPD and Panjer recursion (see Example 10.17) approximations (on log-log scale).

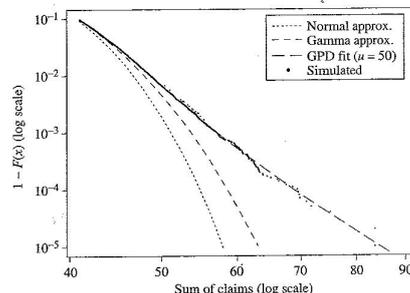


Figure 10.6. Simulated CPoi(100, Pa(4, 1)) data ($n = 100\,000$) with normal-, translated-gamma, and GPD approximations (on log-log scale).

Das Erstere entspricht einem Industriemodell für operationelle Risiken. Das Letztere entspricht einer Klasse von operationellen Risikomodellen. Wenn die Daten die zusammengesetzte Poisson Annahme erfüllen, dann wirkt die Pareto Verteilung überdurchschnittlich gut für hohe Quantile.

Wir wenden uns nun einer wichtigen Klasse von Annäherungen zu, die auf rekursiven Methoden basieren. In dem Fall, wo die Verlustgrößen (X_i) diskret sind und die Verteilungsfunktion von N einer spezifischen Kondition (siehe Def.10) entspricht, existiert eine sichere rekursive Methode. Angenommen X_1 ist diskret verteilt, so dass gilt: $P(X_1 \in \mathbb{N}) = 1$ mit $g_k = P(X_1 = k)$, $p_k = P(N = k)$ und $s_k = P(S_N = k)$. Zur Vereinfachung wird angenommen, dass $g_0 = 0$ und $g_k^{(n)} = P(X_1 + \dots + X_n = k)$, die diskrete Faltung von der Wahrscheinlichkeitsmaßfunktion g_k ist. Dabei gilt $g_k^{(n+1)} = \sum_{i=1}^{k-1} g_i^{(n)} g_{k-i}$. Daraus ergeben sich die folgenden Identitäten:

$$s_0 = P(S_N = 0) = P(N = 0) = p_0$$

$$s_n = P(S_N = n) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k g_n^{(k)}, \quad n \geq 1 \quad (16)$$

wobei die letztere Formel der Proposition 4 dem diskreten Fall entspricht. Wie in Proposition 4 ist festzustellen, dass (16) wegen der Faltung $g_n^{(k)}$ schwierig zu kalkulieren ist. Allerdings kann für eine bestimmte Klasse von Zählvariablen N , (16) auf eine einfache Rekursion zurückgeführt werden. Hierzu dient die Panjer Klasse.

Definition 10: Panjer Klasse

Die Wahrscheinlichkeitsmaßfunktion (p_k) von N gehört zu der Panjer(a,b) Klasse für $a, b \in \mathbb{R}$ wenn die folgenden Beziehungen für $r \geq 1$ gelten: $p_r = (a + (b/r))p_{r-1}$

Beispiel 11: Binomialverteilung

Wenn $N \sim B(n, p)$ binomial verteilt ist, dann ist die Wahrscheinlichkeitsmaßfunktion $p_r = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}$ für $0 \leq r \leq n$ und daraus folgt, dass

$$\frac{p_r}{p_{r-1}} = -\frac{p}{1-p} + \frac{(n+1)p}{r(1-p)}$$

und damit gehört N zu einer Panjer(a,b) Klasse mit $a = -p/(1-p)$ und $b = (n+1)p/(1-p)$

Beispiel 12: Poissonverteilung

Wenn $N \sim Poi(\lambda)$ poisson verteilt ist, dann erfüllt die Wahrscheinlichkeitsmaßfunktion $p_r = e^{-\lambda} \lambda^r / r!$ die Gleichung $\frac{p_r}{p_{r-1}} = \lambda/r$, so dass N zu der Panjer(a,b) Klasse mit $a = 0$ und $b = \lambda$ gehört.

Beispiel 13: Negative Binomialverteilung

Wenn N eine negative Binomialverteilung besitzt, d.h. $N \sim NB(\alpha, p)$, dann ist die Wahrscheinlichkeitsmaßfunktion

$$p_r = \binom{\alpha + r - 1}{r} p^\alpha (1-p)^r, \quad r \geq 0, \quad \alpha > 0, \quad 0 < p < 1$$

Daraus folgt, dass

$$\frac{p_r}{p_{r-1}} = 1 - p + \frac{(\alpha - 1)(1-p)}{r}$$

Daher gehört N zu der Panjer(a,b) Klasse mit $a = 1 - p$ und $b = (\alpha - 1)(1 - p)$.

In Proposition 19 ist erkennbar, dass das negative Binomial Modell dem Poisson Modell folgt, wenn die Intensitätsparameter aus der letzteren Gleichung mittels Gammaverteilung umgerechnet werden.

Theorem 14: Panjer Rekursion

Erfüllt N die Panjer(a,b) Klassenbedingung und sei $g_0 = P(X_1 = 0) = 0$, dann ist $s_0 = p_0$ und für $r \geq 1$ gilt:

$$s_r = \sum_{i=1}^r (a + (bi/r)) g_i s_{r-i}$$

Bemerkung 15: Im Fall der Panjer Rekursion ist eine Initialdiskretisierung von der Verlustverteilungsfunktion G zu erstellen. Damit wird ein Annäherungsfehler eingeführt. Eine Verbesserung von Theorem 14 erhalten wir, wenn $g_0 = P(X_1 = 0) > 0$. Man erhält $s_0 = \sum_{k=0}^{\infty} p_k g_0^k$ und für $r \geq 1$, $s_r = (1 - ag_0)^{-1} \sum_{i=1}^r (a + bi/r) g_i s_{r-i}$

Beispiel 16: Panjer Rekursion

In Bild 10.5 wird die Panjer Annäherung für das Poisson Modell $CPoi(100, LN(1, 1))$ mit einbezogen. Damit Theorem 14 anwendbar wird, ist als erstes die log Normalverteilungsfunktion zu diskretisieren. Eine abstandsgleiche Diskretisierung von ungefähr 0,5 führt zu der Panjer Annäherung in Bild 10.5, die für die relevanten Quantilwerte um 0,999 exzellent ist. Die 99,9% Quantil Abschätzung basierend auf der Panjer Rekursion beträgt 735. Dies ist sehr nahe der allgemeinen Pareto Verteilung. Im äußersten Endstück, jenseits der 0,999, werden Rundungsfehler interessant und daher ist Vorsicht geboten.

2.3 Poisson Mischungen

Das Modell der Poissonmischung wird sowohl bei der Modellierung von Kreditrisiko als auch von operationellem Risiko genutzt. In Beispiel 10.5 wurde das zusammengesetzte Poisson Modell $CPoi(\lambda, G)$ eingeführt, wo $N \sim Poi(\lambda)$ die Anzahl der Verluste zählt und G die Verteilungsfunktion der Verluststärke ist. Ein Nachteil der Poissonverteilung ist, dass $var(N) = \lambda = E(N)$, während die Zählraten oft eine Überdispersion aufweisen. Dies bedeutet, dass $var(N) > E(N)$. Dies wird durch das Mischen der Intensität λ der Verteilungsfunktion $F_\Lambda(\lambda)$ erreicht. Angenommen $\lambda > 0$ ist die Realisation einer positiven Zufallsvariable Λ dieser Verteilungsfunktion, so dass per Definition gilt:

$$p_N(k) = P(N = k) = \int_0^\infty P(N = k \mid \Lambda = \lambda) dF_\Lambda(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} dF_\Lambda(\lambda) \quad (17)$$

Definition 17: Die gemischte Poisson Verteilung

Die Zufallsvariable N mit Verteilungsfunktion (17) wird gemischte Poisson Zufallsvariable mit Mischverteilung F_Λ genannt.

Proposition 18: Angenommen N ist eine gemischt Poisson verteilt mit Verteilung F_Λ . Dann gilt: $E(N) = E(\Lambda)$ und $var(N) = E(\Lambda) + var(\Lambda)$. Für nicht ausgeartete Λ ist N überdispersiert.

Proposition 19: Negative Binomialverteilung als Poisson Mischung

Angenommen N ist gemischt Poisson verteilt mit einer gemischten Gamma verteilten Variable $\Lambda \sim Ga(\alpha, \beta)$. Dann ist N negativ binomialverteilt $N \sim NB(\alpha, \beta/(\beta + 1))$. Bei Zufallsvariablen, die gemischt Poisson verteilt sind, führt das Zusammensetzen dieser zur so genannten zusammengesetzten gemischten Poisson Verteilung.

2.4 Der Endbereich der Gesamtverlustverteilung

Wenn die Verteilungsfunktion G mit Index $\alpha > 0$ regulär variierend ist, dann existiert eine langsam variierende Funktion L so, dass $\bar{G}(x) = 1 - G(x) = x^{-\alpha}L(x)$ gilt. Das nächste Ergebnis zeigt, dass die Verteilungsfunktion der zusammengesetzten Summe S_N , F_{S_N} für etliche Zählverteilungsfunktionen $(p_N(k))$, das Potenz - ähnliche Verhalten von G übernimmt.

Theorem 20: Potenz-ähnliches Verhalten von Verteilungen zusammengesetzter Summen
Angenommen S_N ist eine zusammengesetzte Summe und es existiert ein $\epsilon > 0$, so dass $\sum_{k=0}^{\infty} (1 + \epsilon)^k p_N(k) < \infty$ gilt. Wenn $\bar{G}(x) = x^{-\alpha}L(x)$ mit $\alpha \geq 0$ und L langsam variierend ist, dann gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}_{S_N}(x)}{\bar{G}(x)} = \lambda$$

Daraus folgt, dass \bar{F}_{S_N} das potenz-ähnliche Verhalten von \bar{G} übernimmt.

2.5 Der homogene Poisson Prozess

Bislang betrachteten wir Zufallsvariablen N eines festen Zeitintervalls $[0,1]$. $N(t)$ erhielten wir durch Zählen der Ereignisse in $[0,t]$ für $t \geq 0$. Im Folgenden werden Zufallsvariablen $N(t)$ mit $t \geq 0$ in einen stochastischen Prozess eingebunden.

Definition 21: Zählprozesse

Ein stochastischer Prozess $N = (N(t))_{t \geq 0}$ ist ein Zählprozess, wenn die Pfade der Stichproben rechtsstetig mit linken Grenzen sind und dort eine aufsteigende Folge von Zufallsvariablen $T_0 = 0, T_1, T_2, \dots$ existiert, die fast sicher gegen unendlich strebt, so dass $N(t) = \sum_{k=1}^{\infty} I_{\{T_k \leq t\}}$.

Definition 22: Homogener Poisson Prozess

Ein stochastischer Prozess $N = (N(t))_{t \geq 0}$ ist ein homogener Poisson Prozess mit Intensitätsrate $\lambda > 0$ wenn die folgenden Eigenschaften gelten:

1. N ist ein Zählprozess
2. $N(0) = 0$ fast sicher
3. N hat stationäre und unabhängige Inkremente

4. Für alle $t > 0$: $N(t) \sim Poi(\lambda t)$

Bemerkung 23: Die Eigenschaften **(3)** und **(4)** bedeuten für $0 < u < v < t$, dass die Zufallsvariablen $N(v) - N(u)$ und $N(t) - N(v)$ unabhängig sind und dass für $k \geq 0$:

$$P(N(v) - N(u) = k) = P(N(v - u) = k) = e^{-\lambda(v-u)} \frac{(\lambda(v-u))^k}{k!}$$

Die Zufallsvariable $N(v) - N(u)$ stellt die Anzahl der Ereignisse (Schäden, Verluste) in einem Intervall $(u, v]$ dar; bei Stationarität ist diese verteilt wie $N(v - u)$.

Theorem 24: Charakterisierung des homogenen Poisson Prozesses

Angenommen N ist ein Zählprozess. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. N ist ein homogener Poisson Prozess mit Rate $\lambda > 0$
2. N hat stationäre und unabhängige Inkremente und es gilt:

$$P(N(t) = 1) = \lambda t + o(t), \quad t \downarrow 0$$

$$P(N(t) \geq 2) = o(t), \quad t \downarrow 0$$

3. Die Zwischenankunftszeiten zwischen den Ereignissen $(\Delta_k = T_k - T_{k-1})_{k \geq 1}$ sind unabhängig und identisch verteilt mit der Verteilungsfunktion $Exp(\lambda)$
4. Für alle $t > 0$: $N(t) \sim Poi(\lambda t)$ und für gegebene $(N(t) = k)$ haben die Ereigniszeiten T_1, T_2, \dots, T_k die gleiche Verteilung wie k unabhängige Zufallsvariablen, die gleich auf $[0, t]$ verteilt sind. Daraus folgt die bedingte gemeinsame Dichte:

$$f_{T_1, \dots, T_k | N(t)=k}(t_1, \dots, t_k) = \frac{k!}{t^k} I_{\{0 < t_1 < \dots < t_k < t\}}$$

Multivariate Poisson Prozesse: In vielen Anwendungen wird die Konstruktion zusammengesetzter Poisson Prozesse, unter Beachtung möglicher Abhängigkeiten von Verlusthäufigkeiten verschiedener Verlusttypen, gewünscht. Ein einfacher Ansatz zur Modellierung dieser Abhängigkeiten, ist die Annahme, dass alle Verluste in Beziehung zu einer Serie von grundlegenden und unabhängigen Poisson Schock Prozessen stehen. Bei Versicherungen sind diese Schocks natürliche Katastrophen; bei der Modellierung von Kreditrisiken wirtschaftliche Ereignisse, zum Beispiel lokale oder globale Rezessionen, und bei der Modellierung von operationellem Risiko sind es die Ausfälle von verschiedenen IT Systemen. Wenn ein Schock auftritt, werden Verluste von verschiedenen Typen verursacht.

2.6 Verwandte Prozesse des homogenen Poisson Prozesses

Definition 25: Inhomogener Poisson Prozess

Ein Zählprozess N ist ein inhomogener Poisson Prozess, wenn für eine deterministische Funktion $\lambda(s) \geq 0$ die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1. $N(0)=0$ fast sicher
2. N hat unabhängige Inkremente
3. Für alle $t \geq 0$:

$$P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h), \quad h \downarrow 0$$

$$P(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h), \quad h \downarrow 0$$

Die Funktion $\lambda(\cdot)$ stellt die Intensität oder Maßfunktion dar und das Integral $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)ds$ das Intensitätsmaß.

Proposition 26: Angenommen N ist ein inhomogener Poisson Prozess mit Λ streng wachsend. Definiere für $t \geq 0$, $\tilde{N}(t) := N(\Lambda^{-1}(t))$. Dann ist \tilde{N} ein homogener Poisson Prozess mit Intensität 1.

Bemerkung 27: Zufallsstichproben sind eine Standardmethode um einen homogenen Poisson Prozess in einen inhomogenen Poisson Prozess umzuwandeln. Angenommen eine Intensitätsfunktion λ erfüllt $\lambda(s) \leq c < \infty$ für $s \geq 0$. Starte mit einem homogenen Poisson Prozess mit Rate $c > 0$ und bezeichne seine Ankunftszeit mit $T_0 = 0, T_1, T_2, \dots$. Konstruiere nun einen neuen Prozess \tilde{N} aus $(T_i)_{i \geq 0}$ durch Löschen der einzelnen T_i , die unabhängig von den anderen T_j sind mit Wahrscheinlichkeit $1 - (\lambda(T_i)/c)$. Der vereinfachte Zählprozess \tilde{N} besteht aus den verbleibenden ungelöschten Punkten. Es kann gezeigt werden, dass dieser Prozess inhomogen Poisson verteilt ist mit Intensitätsfunktion $\lambda(\cdot)$

Gemischter Poisson Prozess: Die gemischten Poisson Zufallsvariablen können in den gemischten Poisson Prozess eingebettet werden. Die Realisation eines solchen Prozesses kann mittels statistischer Hilfsmittel nicht erzielt werden. Um tatsächlich einen Pfad simulieren zu können, zeichnet man zuerst eine Realisation der Zufallsintensität $\lambda = \Lambda(\omega)$ und dann einen Pfad vom homogenen Poisson Prozess mit Rate λ . Erst beim Wiederholen dieser Simulation ist die unterschiedliche Wahrscheinlichkeitsnatur des gemischten

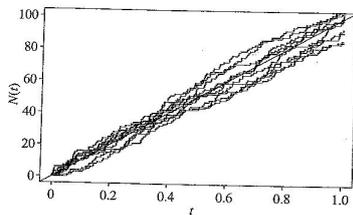


Figure 10.8. Ten realizations of a homogeneous Poisson process with $\lambda = 100$.

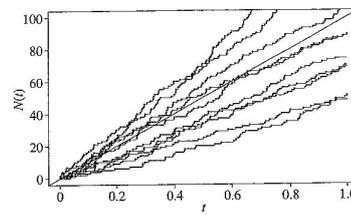


Figure 10.9. Ten realizations of a mixed Poisson process with $A \sim Ga(100, 1)$.

Poisson Prozess erkennbar (vergleiche Bild 10.9 und 10.8). Im Ersteren sind 10 Pfade eines gemischten Poisson Prozesses mit gemischten Variablen $\Lambda \sim Ga(100, 1)$ simuliert, so dass $E(\Lambda) = 100$. Auffallend sind hier die viel größeren Schwankungen der Pfade.

Beispiel 28: Wenn Zählprozesse in der Kreditrisikomodellierung genutzt werden, entsprechen die Zeiten T_k typischerweise den Kreditereignissen, z.B. Verzug oder Herabsetzung. Die Verteilungsfunktion der Zeit eines Kreditereignisses ist $P(T_1 > t) = P(N(t) = 0)$. Diese Wahrscheinlichkeit kann für homogene Poisson Prozesse mit Intensität λ direkt kalkuliert werden. Dabei erhält man: $P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}$

Wenn N ein gemischter Poisson Prozess mit gemischter Verteilungsfunktion F_Λ ist, erhält man:

$$P(T_1 > t) = P(N(t) = 0) = \int_0^\infty e^{-t\lambda} dF_\Lambda(\lambda) = \hat{F}_\Lambda(t)$$

Dies ist die Laplace - Stieltjes Transformation von F_Λ in t . Im Fall der negativen Binomialverteilung $\Lambda \sim Ga(\alpha, \beta)$ gilt:

$$\begin{aligned} P(T_1 > t) &= \int_0^\infty e^{-t\lambda} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda} d\lambda \\ \Leftrightarrow P(T_1 > t) &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} (t + \beta)^{-\alpha} \int_0^\infty e^{-s} s^{\alpha-1} ds \\ \Leftrightarrow P(T_1 > t) &= \beta^\alpha (t + \beta)^{-\alpha}, t \geq 0 \end{aligned}$$

so dass T_1 pareto verteilt $T_1 \sim Pa(\alpha, \beta)$ ist.

Literaturverzeichnis

- [1] McNeil, A.J., Frey, R. und Embrechts, P. (2005). *Quantitative Risk Management*. Princeton University Press, Princeton.