Bewertungsmethoden in der Versicherungsmathematik

Technische Reserven und Marktwerte II

Johannes Paschetag

Mathematisches Institut
der
Universität zu Köln

Sommersemester 2010
Betreuung: Prof. Schmidli, Dr. Eisenberg

Inhaltsverzeichnis

1 Leistungspflicht und Zahlungsströme

In diesem Kapitel führen wir die Idee der Zahlungsvorgänge ein und untersuchen, wie der marktwirtschaftliche Aufbau durch garantierte Zahlungen und nicht-garantierte, also zufällige Zahlungen, beeinflusst wird.
Die Zahlungsvorgänge sind die Elemente der Gesamtzahlungsströme in einem Versicherungsvertrag. In unserem Beispiel also folgende: $b^{\mathrm{ad}}\ \mathrm{d}N(s)$, $b^{\mathrm{a}}(t)I(n)$, $-\pi I(s)\mathrm{d}s$ und $(b^{\mathrm{a}}(n) - b^{\mathrm{a}}(t))I(n)$.
Die erste Aufgabe in Verbindung mit einer präzisen Beschreibung der Zahlungsströme ist, die stochastischen Phänomene, wovon die Schadenanforderung abhängt, zu identifizieren. Für bestimmte elementare Versicherungen spielt der Todeszeitpunkt eine wichtige Rolle. Es erweist sich als nützlich, einen stochastischen Prozess Z einzuführen, der auf dem stochastischen Todeszeitpunkt basiert. Der Todeszeitpunkt wird durch die Wahrscheinlichkeitsverteilung eines Zählprozesses N modelliert, beispielsweise über die Einführung einer deterministischen Intensität μ.
Um Schadenforderungen zu formalisieren führen wir einen Zahlungsprozess B ein, sodass $B(t)$ die kumulierten Zahlungen des Versicherers an den Versicherten in der Zeitspanne $[0,t]$ widerspiegelt. D.h. dass Zahlungen vom Versicherten an das Unternehmen als negative Zahlungen auftreten. Wir geben die Zahlungen in stetiger Zeit an, obwohl sie praktisch gesehen diskret sind, z.B. jeweils zu Beginn eines Monats. Wir setzen n als Zeithorizont des Versicherungsvertrags fest und können dann die Schadenforderungen durch den Zahlungsprozess ausdrücken:

$$B(t) = \int_0^t \mathrm{d}B(s) \tag{1}$$

wobei

$$\mathrm{d}B(t) = b^{\mathrm{ad}}\ \mathrm{d}N(t) + b^{\mathrm{a}}(t)I(t)\mathrm{d}\epsilon(t,n) - \pi I(t)\ \mathrm{d}t. \tag{2}$$

Hier ist $\epsilon(t,n)$ ein Indikatorprozess für $t \geq n$. Durch die Integration in der ersten Gleichung werden die infinitesimalen Änderungen $\mathrm{d}B$ aufsummiert, wobei anschließend die Elemente dieser Änderungen aufgelistet sind.
Der Prozess Z dient dazu, eine Anzahl elementarer Schadenforderungen in der Lebens- und Pensionsversicherung genau zu beschreiben. Allerdings gibt

es viele Fälle die durch solch einen Prozess nicht beschrieben werden können. Ein Beispiel ist die Prämienbefreiung. Diese und andere Formen von Berufsunfähigkeitsversicherungen können beschrieben werden durch die Erweiterung des Zustandsraums von Z mit einem dritten Zustand, nämlich "unfähig".
Nach dem Zusammenfassen der Schadenforderungen in einen Zahlungsprozess suchen wir nach dem aktuellen Wert und dem Marktwert des Zahlungsprozesses. Durch das No-Arbitrage-Prinzip erhalten wir, dass der aktuelle Wert die Summe der aktuellen Werte der Einzelelemente ist. Der aktuelle Wert eines Zahlungsprozesses $B(t)$ zur Zeit t über das Zeitintervall $(t, n]$ ist also $\int_t^n e^{-\int_t^s r}\, \mathrm{d}B(s)$.
Bezieht man nun noch das Prinzip der Risikostreuung (=Diversifikation, siehe Seite 24) mit ein, so erhalten wir folgendes Ergebnis für den Marktwert zur Zeit t eines Zahlungsprozesses:

$$\mathbb{E}_t\Big[\int_t^n e^{-\int_t^s r}\, \mathrm{d}B(s)\Big].$$

1.1 Die marktwirtschaftliche Leistungspflicht

In diesem Abschnitt betrachten wir den Zahlungsprozess in seiner marktwirtschaftlichen Zusammensetzung der Verbindlichkeiten. Wir bezeichnen mit $B(t, \cdot)$ den zur Zeit t garantierten Zahlungsstrom. Für $s \geq t$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathrm{d}B(t,s) &= -\pi I(s)\, \mathrm{d}s + b^{\mathrm{ad}}\, \mathrm{d}N(s) + b^{\mathrm{a}}(t) I(s)\, \mathrm{d}\epsilon(s,n), && (3)\\ V^{\mathrm{g}}(t) &= \mathbb{E}_t\Big[\int_t^n e^{-\int_t^s r}\, \mathrm{d}B(t,s)\Big]. && (4) \end{aligned}$$

Dementsprechend bezeichnet $B^{\mathrm{b}}(t, \cdot)$ den nicht garantierten Zahlungsstrom zur Zeit t und es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{d}B^{\mathrm{b}}(t,s) &= (b^{\mathrm{a}}(s) - b^{\mathrm{a}}(t)) I(s)\, \mathrm{d}\epsilon(s,n), && (5)\\ V^{\mathrm{b}}(t) &= \mathbb{E}_t\Big[\int_t^n e^{-\int_t^s r}\, \mathrm{d}B^{\mathrm{b}}(t,s)\Big]. && (6) \end{aligned}$$

Die Differenz $V^*(t) - V^{\mathrm{g}}(t)$ hat ihre Ursache in den kumulierten Sicherheitsmargen in den garantierten Zahlungen, bezeichnet mit $C(t, \cdot)$, so dass für

$s \geq t$ gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{d}C(t,s) &= I(s)c(t,s)\,\mathrm{d}s, \qquad (7) \\ V^*(t) - V^{\mathrm{g}}(t) &= \mathbb{E}_t\Big[\int_t^n e^{-\int_t^s r}\,\mathrm{d}C(t,s)\Big]. \qquad (8) \end{aligned}$$

Wir erinnern daran, dass dadurch das individuelle Prämienpotential erzeugt wird, sofern $U(t) \geq V^*(t) \geq V(t)$.
Wir beenden dieses Kapitel, indem wir uns nochmal die vorgeschlagene Definition des individuellen Bonuspotentials angucken (für $U(t) \geq V^*(t)$). Natürlich gelten folgende Ungleichungen:

$$\begin{aligned} V^{\mathrm{ib}}(t) &= \Big(\mathbb{E}_t\Big[\int_t^n e^{-\int_t^s r}\,\mathrm{d}C(t,s)\Big]\Big)^+ \\ &\leq \mathbb{E}_t\Big[\Big(\int_t^n e^{-\int_t^s r}\,\mathrm{d}C(t,s)\Big)^+\Big] \\ &\leq \mathbb{E}_t\Big[\int_t^n e^{-\int_t^s r}\,\mathrm{d}C^+(t,s)\Big] \end{aligned}$$

Hierbei können die letzten beiden Gleichungen als alternative Definitionen der ersten angesehen werden. Die Definitionen stimmen überein, sofern $c(t,s)$ für alle s entweder positiv oder negativ ist. Die Definitionen des individuellen Bonuspotentials könnten durch genauere Beschreibung der Verwendung der Sicherheitsmargen präzisiert werden.

2 Die Rückkauf-Option

2.1 Intensitätsbasierte Bewertung von Rückkauf-Optionen

Wir benutzen erneut ein Markov-Modell mit drei Zuständen (d.h. der Prozess ist durch die Übergangswahrscheinlichkeiten von einem Zustand i in einen anderen Zustand j gekennzeichnet). Der Zustand "Rückkauf" wird zur Zeit t erreicht mit der Rückkauf-Intensität ν und führt zur Zahlung einer Rückkaufprämie $G(t)$. Dies führt zur folgenden Differentialgleichung, wobei V^{sur} die gesamten Rückstellungen beinhaltet:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V^{\mathrm{sur}}(t) &= r(t)V^{\mathrm{sur}}(t) + \pi - \mu(t)(b^{\mathrm{ad}} - V^{\mathrm{sur}}(t)) - \nu(t)(G(t) - V^{\mathrm{sur}}(t)) \\ V^{\mathrm{sur}}(n) &= b^{\mathrm{a}}(n) \end{aligned}$$

Wir fordern einen expliziten Ausdruck für die Rückkauf-Option, z.B. $V^{\mathrm{sur}} - V$. Dann kann gezeigt werden, dass die zusätzliche Reserve geschrieben werden kann als

$$V^{\mathrm{sur}}(t) - V(t) = \int_t^n e^{-\int_t^s r+\mu+\nu} \nu(s)(G(s) - V(s))\,\mathrm{d}s \tag{9}$$

Die Berechnung beinhaltet die zukünftigen Werte von G und V nach Rechnungsgrundlagen zweiter Ordnung. Wir betrachten den Fall, dass der Rückkaufwert der technischen Reserve gleicht. Sei zunächst $V(t) < V^*(t)$, d.h. $X(t) < 0$. Dann können wir zeigen, dass

$$V^{\mathrm{sur}}(t) - V(t) \leq (V^*(t) - V(t))p(t) \tag{10}$$

gilt, wobei

$$p(t) = \int_t^n e^{-\int_t^s \nu} \nu(s)\,\mathrm{d}s. \tag{11}$$

Falls jedoch $V(t) \geq V^*(t)$, d.h. $X(t) \geq 0$ so gilt

$$V^{\mathrm{sur}}(t) - V(t) \leq 0 \tag{12}$$

Zusammengenommen erhalten wir also folgende Ungleichung:

$$V^{\mathrm{sur}}(t) - V(t) = \int_t^n e^{-\int_t^s r+\mu+\nu} \nu(s)(V^*(s) - V(s))\,\mathrm{d}s \leq 0.$$

Daraus folgern wir mit den Rechnungsgrundlagen 2. Ordnung

$$V^{\mathrm{sur}}(t) - V(t) \leq \max\Big\{p(t)(G(t) - V(t)), 0\Big\}.$$

2.2 Interventions-basierte Bewertung von Rückkauf-Optionen

Wir berücksichtigen nun, dass der Versicherte von seiner Rückkauf-Option Gebrauch macht, sofern es sich für ihn lohnt. Ein Problem bei dieser Sichtweise ist, dass es historisch nur sehr selten optimal war, eine Versicherung zurück zu kaufen. Andererseits liegt dies auch gar nicht im Interesse der Versicherungsunternehmen, weshalb sich diese vor systematischem Rückkauf schützen. Der Versicherte soll nun sofort zurückkaufen, sobald er daraus einen Vorteil ziehen kann.

Betrachte einen allgemeinen Zahlungsprozess B. Mit Rückkauf-Option liefert uns das No-Arbitrage-Prinzip den Marktwert als

$$V^{\mathrm{sur}}(t) = \max_{t \leq \tau \leq n} \mathbb{E}_t \Big[\int_t^\tau e^{-\int_t^s r} \, \mathrm{d}B(s) + e^{-\int_t^\tau r} I(\tau) G(\tau) \Big], \tag{13}$$

wobei wir $G(n) = 0$ setzen. Hier ist τ der Zeitpunkt des Rückkaufs. Offensichtlich muss der Versicherte den Rückkauf zur Zeit t entscheiden aufgrund der bis dahin verfügbaren Informationen. Man könnte sich die Information zur Zeit t als σ -Algebra $\mathcal{A}_t$ denken. Demnach gilt $\forall s \leq t$ also $\mathcal{A}_s \subset \mathcal{A}_t$. Der Informationsfluss wird also durch eine Filtration beschrieben. Man spricht bei τ deshalb auch von einer Stoppzeit.
Wir definieren den Prozess $Y^{\mathrm{sur}}(t, u)$ durch

$$Y^{\mathrm{sur}}(t, u) = \int_t^u e^{-\int_t^s r} \, \mathrm{d}B(s) + e^{-\int_t^u r} I(u) G(u). \tag{14}$$

Also ist $Y^{\mathrm{sur}}(t, u)$ der aktuelle Wert der Zahlungen an den Versicherten inklusive Rückkaufprämie gegeben dem Rückkauf zum Zeitpunkt u.

Korollar 2.1

1. *Sofern $V(t) \geq G(t)$ für alle t ist es optimal, nicht zurückzukaufen und es gilt $V^{\mathrm{sur}}(t) = V(t)$.*

2. *Falls $Y^{\mathrm{sur}}(t, u)$ ein Submartingal ist, ist es nie optimal zurückzukaufen. Es gilt $V^{\mathrm{sur}}(t) = V(t)$.*

3. *Falls $Y^{\mathrm{sur}}(t, u)$ ein Supermartingal ist, ist es optimal sofort zurückzukaufen und wir haben $V^{\mathrm{sur}}(t) = G(t)$.*

Die Aufgabe ist nun, gegeben einen Wert des Gesamtzahlungsprozesses, diese gesamten Rückstellungen in Rückstellungen für garantierte Zahlungen $V^{\mathrm{g,sur}}$ und für nicht-garantierte Zahlungen $V^{b,sur}$ zu unterteilen. Eine Möglichkeit ist folgende:

$$V^{\mathrm{g,sur}}(t) = \max_{t \leq \tau \leq n} \mathbb{E}_t \Big[\int_t^\tau e^{-\int_t^s r} \, \mathrm{d}B(t, s) + e^{-\int_t^\tau r} I(\tau) G(t, \tau) \Big] .$$

Hierbei wird dann $V^{\mathrm{b,sur}}$ als Differenz $V^{\mathrm{sur}} - V^{\mathrm{g,sur}}$ betrachtet. $G(t, \tau)$ ist der Rückkaufwert zur Zeit τ gegeben dass keine Dividenden in $(t, \tau]$ ausgeschüttet werden. Wir führen den Prozess $Y^{\mathrm{g,sur}}(t, u)$ wie folgt ein:

$$Y^{\mathrm{g,sur}}(t,u) = \int_t^\tau e^{-\int_t^s r} \,\mathrm{d}B(t,s) + e^{-\int_t^\tau r} I(\tau) G(t,\tau) \tag{15}$$

Damit ist $Y^{\mathrm{g,sur}}(t,u)$ genau der aktuelle Wert der garantierten Zahlungen gegeben dass der Vertrag zum Zeitpunkt u zurückgekauft wird.

Lemma 2.2
Nehme an, dass $G(t,u) = V^*(t,u)$. Dann kann $Y^{\mathrm{g,sur}}(t,u)$ folgendermaßen umgeschrieben werden:

$$Y^{\mathrm{g,sur}}(t,u) = V^*(t) - \int_t^u e^{-\int_t^s r} I(s) c(t,s) \,\mathrm{d}s + M^{\mathrm{sur}}(t,u), \tag{16}$$

wobei $M^{\mathrm{sur}}(t,s)$ ein Martingal ist.

Korollar 2.3
1. *Für $c(t,s) \geq 0$ gilt $V^{\mathrm{g,sur}}(t) = V^*(t)$.*
2. *Falls $c(t,s) \leq 0$, so folgt $Y^{\mathrm{g,sur}}(t,u) = V^{\mathrm{g}}(t)$.*

Beweis. Im ersten Fall büßt der Versicherte die zukünftigen positiven Sicherheitsmargen ein, wenn er den Vertrag beibehält. Dies wird durch sofortigen Rückkauf verhindert, sodass die garantierten Zahlungen den Rückkaufwert annehmen. Im zweiten Fall macht der Versicherungsnehmer maximalen Gewinn, wenn er die Police bis zum Schluss behält, also nehmen die garantierten Zahlungen denselben Wert an wie ohne Rückkaufoption. ■

2.3 Marktwirtschaftliche Verbindlichkeiten

Es gelten folgende Beziehungen für das individuelle Bonuspotential:

$$V^{\mathrm{ib}} = \max(V^*, V^g) - V^g \leq V^{\mathrm{g,sur}} - V^g, \tag{17}$$

mit $G(t,u) = V^*(t,u)$. Nach Korollar 2.3 haben wir Gleichheit mit der alten Definition, sofern $c(t,s)$ entweder positiv oder negativ für alle s ist. In der letzten Ungleichung wird eine alternative Definition vorgeschlagen, die nicht von der Dividendenverteilung abhängt.

3 Prämienfreie Versicherungsoptionen

3.1 Eine einfache prämienfreie Policenbewertung

Ausgangspunkt zur Bewertung von beitragsfreien Vertragsoptionen ist wieder ein Modell mit drei Zuständen, und zwar „lebend mit Prämienzahlung“, „beitragsfreie Police“ und der Zustand „tot“. Wir führen jedoch keine Intensität zur beitragsfreien Police ein wie im vorangegangen Kapitel zur Rückkaufoption. Dort galt

$$V^*(t) - V^g(t) = \int_t^n e^{-\int_t^s r+\mu} c(t,s)\,\mathrm{d}s. \tag{18}$$

Ein Teil der Sicherheitsmargen in den garantierten Zahlungen wird gedeckt durch zukünftige Prämien. Jedoch sollten wir dann bei der beitragsfreien Police auch eine Reserve anlegen für die auf diesen Prämien basierende Dividende.
Die Leistungspflicht bzgl. Dividenden aus den zukünftigen Prämien ist gegeben durch das Bonuspotential eines Vertrags mit Prämien π und Anzahlung Null zur Zeit t. Wir berechnen nun dieses Bonuspotential, indem wir die Leistungen des ausgegebenen Vertrags untersuchen. Wir halten uns an folgende Notation:

$$V^{*+}(t) = b^{\mathrm{ad}} A^{1*}_{x+t\overline{n-t}|} + b^{\mathrm{a}}(t)_{n-t}E^*_{x+t} \tag{19}$$

$$V^{g+}(t) = b^{\mathrm{ad}} A^{1}_{x+t\overline{n-t}|} + b^{\mathrm{a}}(t)_{n-t}E_{x+t}. \tag{20}$$

Der obere Index + kennzeichnet, dass hier nur Leistungen einbezogen wurden. Damit können wir die Lebensrenten $a^*_{x+t\overline{n-t}|}$ und $a_{x+t\overline{n-t}|}$ wie folgt umschreiben:

$$a^*_{x+t\overline{n-t}|} = \frac{V^{*+}(t) - V^*(t)}{\pi} \tag{21}$$

$$a_{x+t\overline{n-t}|} = \frac{V^{g+}(t) - V^{\mathrm{g}}(t)}{\pi}. \tag{22}$$

Die Anzahl Einheiten von garantierten Leistungen, $\beta(t)$, die zur Zeit t aus den zukünftigen Prämien erbracht werden können, werden durch das Äquivalenzprinzip festgelegt:

$$\beta(t)\big(b^{\mathrm{ad}}A^{1*}_{x+t\overline{n-t|}}+b^{\mathrm{a}}(t)_{n-t}E^{*}_{x+t}\big)=\pi a^{*}_{x+t\overline{n-t|}}\ , \tag{23}$$

wodurch sich für $\beta(t)$ ergibt

$$\beta(t)=\frac{V^{*+}(t)-V^{*}(t)}{V^{*+}(t)}. \tag{24}$$

Zuvor hatten wir schon gesehen, dass das Bonuspotential eines Versicherungsvertrags zur Zeit der Emission dem negativen Marktwert der garantierten Leistungen gleicht, die im Vertrag vereinbart wurden. Das Bonuspotential der neuen Versicherung ist gegeben durch

$$-\beta(t)\big(b^{\mathrm{ad}}A^{1}_{x+t\overline{n-t|}}+b^{\mathrm{a}}(t)_{n-t}E_{x+t}\big)+\pi a_{x+t\overline{n-t|}},$$

das wir umschreiben können zu

$$\frac{V^{*}(t)\cdot V^{g+}(t)}{V^{*+}(t)}-V^{\mathrm{g}}(t). \tag{25}$$

Dies soll nun unser Wert für eine prämienfreie Option werden.
Dieser Wert muss zum Marktwert der garantierten Leistungen addiert werden, um schließlich den Wert der garantierten Zahlungen inklusive Option zur prämienfreien Police zu erhalten. Damit haben wir erreicht:

$$\Big(\frac{V^{*}(t)\cdot V^{g+}(t)}{V^{*+}(t)}-V^{\mathrm{g}}(t)\Big)+V^{\mathrm{g}}(t)=\frac{V^{*}(t)\cdot V^{g+}(t)}{V^{*+}(t)}=:V^{\mathrm{f}}(t). \tag{26}$$

Wir wollen das individuelle Bonuspotential zerlegen in ein Potential V^{bp} basierend auf den Prämien und V^{bf} der prämienfreien Police. Wir betrachten die Situation

$$V\geq V^{*}\geq V^{\mathrm{f}}\geq V^{\mathrm{g}}.$$

Dann kann $V^{\mathrm{ib}}=V^{*}-V^{\mathrm{g}}$ zerlegt werden in

$$\begin{aligned}V^{\mathrm{ib}} &= V^{\mathrm{bf}}+V^{\mathrm{bp}}\\ &= \big(V^{*}-V^{\mathrm{f}}\big)+\big(V^{\mathrm{f}}-V^{\mathrm{g}}\big).\end{aligned}$$

Der Marktwert von garantierten Zahlungen eines Vertrags, ausgestellt zur Zeit t, kann auch ausgedrückt werden durch die Marktwerte der Sicherheitsmargen. Allerdings kann eine Situation entstehen, wo diese negativ sind. Da diese dann nicht als Dividenden verteilt werden können, wird das Bonuspotential auf Null gesetzt. Damit gilt also:

$$V^{\mathrm{bp}} = \max(V^{\mathrm{f}}, V^{\mathrm{g}}) - V^{\mathrm{g}}. \tag{27}$$

Wir können zu jeder Zeit unter Berücksichtigung aller möglichen Beziehungen zwischen V, V^*, V^{f} und V^{g} die Bonuspotentiale folgendermaßen ausdrücken:

$$\begin{aligned} V^{\mathrm{bf}} &= \Big(V - V^{\mathrm{g}} - \big(V^{\mathrm{f}} - V^{\mathrm{g}}\big)^+\Big)^+ - \Big(V - V^{\mathrm{g}} - \big(V^* - V^{\mathrm{g}}\big)^+\Big)^+ \\ V^{\mathrm{bp}} &= V - V^{\mathrm{g}} - \Big(V - V^{\mathrm{g}} - \big(V^{\mathrm{f}} - V^{\mathrm{g}}\big)^+\Big)^+. \end{aligned}$$

3.2 Interventionsbasierte Bewertung der prämienfreien Vertragsoption

Wir behandeln nun die prämienfreie Vertragsoption genau so wie zuvor schon die Rückkaufoption im vorangegangenen Kapitel. Der Versicherte wechselt auch hier in die prämienfreie Police, wenn es sich für ihn lohnt. Unser Ansatz ist nicht frei von Kritik. So gibt es keinerlei historische Beweise für eine Situation, wo die Umwandlung in eine prämienfreie Police optimal war. Und auch hier würde das Versicherungsunternehmen durch z.B. zusätzliche Kosten die systematische Umwandlung unattraktiv machen (können). Wir nehmen an, dass der Versicherte sofort umwandelt, sobald es für ihn einen Vorteil darstellt.

Wir betrachten einen allgemeinen Zahlungsprozess B. Bei der Einführung der prämienfreien Vertragsoption liefert ein Arbitrageargument den Marktwert inklusive unserer Option:

$$V^{\mathrm{free}}(t) = \max_{t \le \tau \le n} \mathbb{E}_t\Big[\int_t^\tau e^{-\int_t^s r}\, \mathrm{d}B(s) + e^{-\int_t^\tau r} I(\tau)(V^{\mathrm{f}}(\tau) + X^{\mathrm{f}}(\tau))\Big].$$

Hier entspricht V^{free} genau unserem V^{sur} wenn man die Rückkaufprämie $G(t)$ durch die Reserve $V^{\mathrm{f}}(\tau)+X^{\mathrm{f}}(\tau)$ ersetzt. τ ist der Zeitpunkt der Umwandlung

bzw. das Vertragsende, je nachdem was zuerst auftritt. Der Versicherte muss offensichtlich über eine Umwandlung mit der ihm bis dahin zur Verfügung stehenden Information entscheiden. Damit ist τ Stoppzeit. Der Wert $X^f(\tau)$ ist die unverteilte Reserve bei Umwandlung.
Wir wollen $V^{\text{free}}(t)$ genauer untersuchen und führen deshalb den Prozess

$$Y^{\text{free}}(t,u) = \int_t^u e^{-\int_t^s r}\, \mathrm{d}B(s) + e^{-\int_t^u r} I(u)(V^{\mathrm{f}}(u) + X^{\mathrm{f}}(u)) \tag{28}$$

ein, wobei

$$V^f(t) = \frac{V^*(t) \cdot V^{g+}(t)}{V^{*+}(t)}. \tag{29}$$

Hier ist $Y^{\text{free}}(t,u)$ eine Funktion von u, nämlich der Wert aller Zahlungen an den Versicherten, inklusive Leistungspflicht und nicht garantierte Leistungen ab Umwandlung gegeben dass die Umwandlung zum Zeitpunkt u passiert.

Korollar 3.1

1. *Falls $V(t) \geq V^{\mathrm{f}}(t) + X^{\mathrm{f}}(t)$ für alle t, so ist es optimal nie umzuwandeln und es gilt $V^{\text{free}}(t) = V(t)$.*

2. *Falls $Y^{\text{free}}(t,u)$ ein Submartingal ist, so ist es niemals optimal umzuwandeln und es gilt ebenfalls $V^{\text{free}}(t) = V(t)$.*

3. *Falls $Y^{\text{free}}(t,u)$ ein Supermartingal ist, so ist es optimal, sofort umzuwandeln und es gilt $V^{\text{free}}(t) = V^{\mathrm{f}}(t) + X^{\mathrm{f}}(t)$.*

Gegeben einen Wert des gesamten Zahlungsprozesses wollen wir diesen nun unterteilen in eine Reserve für die garantierten Zahlungen, $V^{\mathrm{g,free}}$, und eine Reserve für die nicht garantierten, $V^{\mathrm{b,free}}$. Wir machen folgende Definition:

$$V^{\mathrm{g,free}}(t) = \max_{t \leq \tau \leq n} E_t\Big[\int_t^\tau e^{-\int_t^s r}\, \mathrm{d}B(t,s) + e^{-\int_t^\tau r} I(\tau) V^{\mathrm{f}}(t,\tau)\Big],$$

wobei

$$V^{\mathrm{f}}(t,\tau) = \frac{V^*(t,\tau) \cdot V^{g+}(t,\tau)}{V^{*+}(t,\tau)}.$$

Dann können wir $V^{\mathrm{b,free}}$ als Differenz $V^{\text{free}} - V^{\mathrm{g,free}}$ ansetzen.
Bei der prämienfreien Police haben wir außerdem ganz analog zur Rückkauf-Option folgendes Resultat:

Korollar 3.2 *1. Sofern $V(t) \geq V^{\mathrm{f}}(t) + X^{\mathrm{f}}(t)$ für alle t ist es optimal, niemals umzuwandeln und es gilt $V^{free}(t) = V(t)$.*

2. Falls $Y^{\mathrm{free}}(t,u)$ ein Submartingal ist, ist es nie optimal umzuwandeln. Es gilt $V^{\mathrm{free}}(t) = V(t)$.

3. Falls $Y^{\mathrm{free}}(t,u)$ ein Supermartingal ist, ist es optimal sofort umzuwandeln und wir haben $V^{\mathrm{free}}(t) = V^{\mathrm{f}}(t) + X^{\mathrm{f}}(t)$.

Für nähere Informationen sei u.a. auf das Buch „On Valuation and Control in Life and Pension Insurance“ von Mogens Steffensen, 2002, verwiesen.