Minimierung der diskontierten Kapitalzuführung durch Rückversicherung im klassischen Modell

Julia Eisenberg
(gemeinsame Arbeit mit Hanspeter Schmidli)

Universität zu Köln

Einführung

Einführung

Wert der Kapitalzuführungen ohne Rückversicherung

- Darstellung als Gerber-Shiu-Funktionen
- $Z_i \sim \mathrm{Exp}(\frac{1}{\mu})$

Eigenschaften der Wertefunktion

- Differenzierbarkeit und Eindeutigkeit der Wertefunktion
- Wann ist es optimal auf die Rückversicherung zu verzichten?

Einführung

Wert der Kapitalzuführungen ohne Rückversicherung

- Darstellung als Gerber-Shiu-Funktionen
- $Z_i \sim$Exp$(\frac{1}{\mu})$

Eigenschaften der Wertefunktion

- Differenzierbarkeit und Eindeutigkeit der Wertefunktion
- Wann ist es optimal auf die Rückversicherung zu verzichten?

Numerisches Beispiel

- Exponentialverteilte Einzelschäden

Spezialfall $\delta = 0$

- Existenz und Eindeutigkeit
- Exponentialverteilte Einzelschäden

Das Klassische Modell

Wir betrachten einen Überschussprozess X_t auf $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ der Form

$$X_t = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Z_i \,.$$

Das Klassische Modell

Wir betrachten einen Überschussprozess X_t auf $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ der Form

$$X_t = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Z_i \,.$$

- $\mathscr{F} = (\mathscr{F}_t)_{t \geq 0}$: natürliche Filtration von X.

Das Klassische Modell

Wir betrachten einen Überschussprozess X_t auf $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ der Form

$$X_t = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Z_i \,.$$

- $\mathscr{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$: natürliche Filtration von X.
- x: Anfangskapital

Das Klassische Modell

Wir betrachten einen Überschussprozess X_t auf $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ der Form

$$X_t = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Z_i \,.$$

- $\mathscr{F} = (\mathscr{F}_t)_{t \geq 0}$: natürliche Filtration von X.
- x: Anfangskapital
- c: Prämiumrate

Das Klassische Modell

Wir betrachten einen Überschussprozess X_t auf $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ der Form

$$X_t = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Z_i \,.$$

- $\mathscr{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$: natürliche Filtration von X.
- x: Anfangskapital
- c: Prämiumrate
- Z_i: iid Einzelschadenhöhen

Das Klassische Modell

Wir betrachten einen Überschussprozess X_t auf $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ der Form

$$X_t = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Z_i \, .$$

- $\mathscr{F} = (\mathscr{F}_t)_{t \geq 0}$: natürliche Filtration von X.
- x: Anfangskapital
- c: Prämiumrate
- Z_i: iid Einzelschadenhöhen
- N_t: Poisson-Prozess mit Intensität λ, unabhängig von Z_i.

Rückversicherung

Schließt der Versicherer einen **Rückversicherungsvertrag** ab, so hat der Überschussprozess die Form

$$X_t^B = x + \int_0^t c(b_s)\,\mathrm{d}s - \sum_{i=1}^{N_t} r(Z_i, b_{T_i -})$$

Rückversicherung

Schließt der Versicherer einen **Rückversicherungsvertrag** ab, so hat der Überschussprozess die Form

$$X_t^B = x + \int_0^t c(b_s)\,\mathrm{d}s - \sum_{i=1}^{N_t} r(Z_i, b_{T_i-})$$

- B: $B = (b_t)_{t \geq 0}$, $b_t \in [0, \tilde{b}]$ zugelassene Rückversicherungsstrategie

Rückversicherung

Schließt der Versicherer einen **Rückversicherungsvertrag** ab, so hat der Überschussprozess die Form

$$X_t^B = x + \int_0^t c(b_s)\,\mathrm{d}s - \sum_{i=1}^{N_t} r(Z_i, b_{T_i-})$$

- B: $B = (b_t)_{t\geq 0}$, $b_t \in [0, \tilde{b}]$ zugelassene Rückversicherungsstrategie
- T_i: i-ter Schadenszeitpunkt

Rückversicherung

Schließt der Versicherer einen **Rückversicherungsvertrag** ab, so hat der Überschussprozess die Form

$$X_t^B = x + \int_0^t c(b_s)\,\mathrm{d}s - \sum_{i=1}^{N_t} r(Z_i, b_{T_i-})$$

- B: $B = (b_t)_{t\geq 0}$, $b_t \in [0, \tilde{b}]$ zugelassene Rückversicherungsstrategie
- T_i: i-ter Schadenszeitpunkt
- $c(b_s)$: Prämiumrate,

Rückversicherung

Schließt der Versicherer einen **Rückversicherungsvertrag** ab, so hat der Überschussprozess die Form

$$X_t^B = x + \int_0^t c(b_s)\,\mathrm{d}s - \sum_{i=1}^{N_t} r(Z_i, b_{T_i-})$$

- B: $B = (b_t)_{t \geq 0}$, $b_t \in [0, \tilde{b}]$ zugelassene Rückversicherungsstrategie
- T_i: i-ter Schadenszeitpunkt
- $c(b_s)$: Prämiumrate, $c(0) < 0$

Rückversicherung

Schließt der Versicherer einen **Rückversicherungsvertrag** ab, so hat der Überschussprozess die Form

$$X_t^B = x + \int_0^t c(b_s)\,\mathrm{d}s - \sum_{i=1}^{N_t} r(Z_i, b_{T_i-})$$

- B: $B = (b_t)_{t\geq 0}$, $b_t \in [0, \tilde{b}]$ zugelassene Rückversicherungsstrategie
- T_i: i-ter Schadenszeitpunkt
- $c(b_s)$: Prämiumrate, $c(0) < 0$
- $r(z, b)$: Selbstbehaltfunktion, stetig und monoton steigend sowohl in z als auch in b

Überschussprozess mit Kapitalzuführungen

Um zu verhindern, dass der Übeschussprozess X_t^B negativ wird, muss der Versicherer zusätzliches Kapital zuführen:

$$X_t^B \quad = x + \int_0^t c(b_s)\,\mathrm{d}s - \sum_{i=1}^{N_t} r(Z_i, b_{T_i-})$$

Überschussprozess mit Kapitalzuführungen

Um zu verhindern, dass der Übeschussprozess X_t^B negativ wird, muss der Versicherer zusätzliches Kapital zuführen:

$$X_t^{B,Y} = x + \int_0^t c(b_s)\,\mathrm{d}s - \sum_{i=1}^{N_t} r(Z_i, b_{T_i-}) + Y_t^B$$

Überschussprozess mit Kapitalzuführungen

Um zu verhindern, dass der Übeschussprozess X_t^B negativ wird, muss der Versicherer zusätzliches Kapital zuführen:

$$X_t^{B,Y} = x + \int_0^t c(b_s)\,\mathrm{d}s - \sum_{i=1}^{N_t} r(Z_i, b_{T_i-}) + Y_t^B$$

wo $\{Y_t^B\}$ die kumulierten Kapitalzuführungen bis zum Zeitpunkt t bezeichnet.

Überschussprozess mit Kapitalzuführungen

Um zu verhindern, dass der Übeschussprozess X_t^B negativ wird, muss der Versicherer zusätzliches Kapital zuführen:

$$X_t^{B,Y} = x + \int_0^t c(b_s)\,\mathrm{d}s - \sum_{i=1}^{N_t} r(Z_i, b_{T_i-}) + Y_t^B$$

wo $\{Y_t^B\}$ die kumulierten Kapitalzuführungen bis zum Zeitpunkt t bezeichnet.
Wir interessieren uns für die erwarteten mit einem Diskontfaktor $\delta \geq 0$ diskontierten Kapitalzuführungen bei einer gegebenen Rückversicherungsstrategie B:

Überschussprozess mit Kapitalzuführungen

Um zu verhindern, dass der Übeschussprozess X_t^B negativ wird, muss der Versicherer zusätzliches Kapital zuführen:

$$X_t^{B,Y} = x + \int_0^t c(b_s)\,\mathrm{d}s - \sum_{i=1}^{N_t} r(Z_i, b_{T_i-}) + Y_t^B$$

wo $\{Y_t^B\}$ die kumulierten Kapitalzuführungen bis zum Zeitpunkt t bezeichnet.
Wir interessieren uns für die erwarteten mit einem Diskontfaktor $\delta \geq 0$ diskontierten Kapitalzuführungen bei einer gegebenen Rückversicherungsstrategie B:

$$V^B(x) = \mathbb{E}_x\Big[\int_0^\infty e^{-\delta t}\,\mathrm{d}Y_t^B\Big]\,.$$

Wertefunktion

Unser Ziel ist den Wert $V^B(x)$ über alle zugelassenen Rückversicherungsstrategien zu minimieren:

$$V(x) = \inf_B V^B(x)\,,$$

und die optimale Strategie $B^* = (b_t^*)_{t \geq 0}$, vorausgesetzt, dass diese existiert, zu finden.

Wertefunktion

Unser Ziel ist den Wert $V^B(x)$ über alle zugelassenen Rückversicherungsstrategien zu minimieren:

$$V(x) = \inf_B V^B(x)\,,$$

und die optimale Strategie $B^* = (b_t^*)_{t\geq 0}$, vorausgesetzt, dass diese existiert, zu finden.

Wegen $\delta \geq 0$ es ist klar, dass es für ein beliebiges B optimal ist:

Wertefunktion

Unser Ziel ist den Wert $V^B(x)$ über alle zugelassenen Rückversicherungsstrategien zu minimieren:

$$V(x) = \inf_B V^B(x)\,,$$

und die optimale Strategie $B^* = (b_t^*)_{t\geq 0}$, vorausgesetzt, dass diese existiert, zu finden.

Wegen $\delta \geq 0$ es ist klar, dass es für ein beliebiges B optimal ist:

- die Kapitalzuführungen nur dann zu betätigen, wenn der Überschussprozess unter Null fällt

Wertefunktion

Unser Ziel ist den Wert $V^B(x)$ über alle zugelassenen Rückversicherungsstrategien zu minimieren:

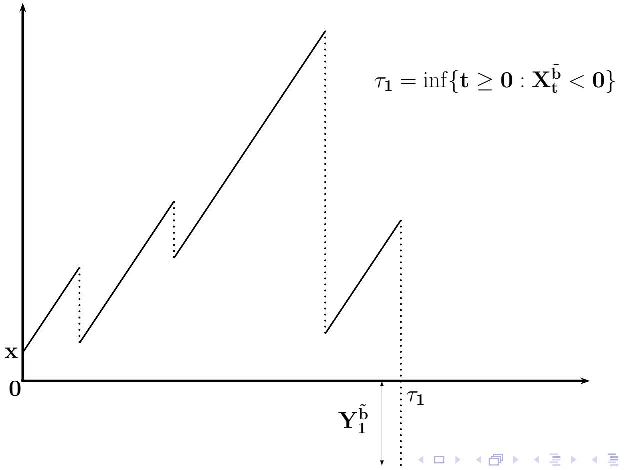
$$V(x) = \inf_B V^B(x)\,,$$

und die optimale Strategie $B^* = (b_t^*)_{t\geq 0}$, vorausgesetzt, dass diese existiert, zu finden.

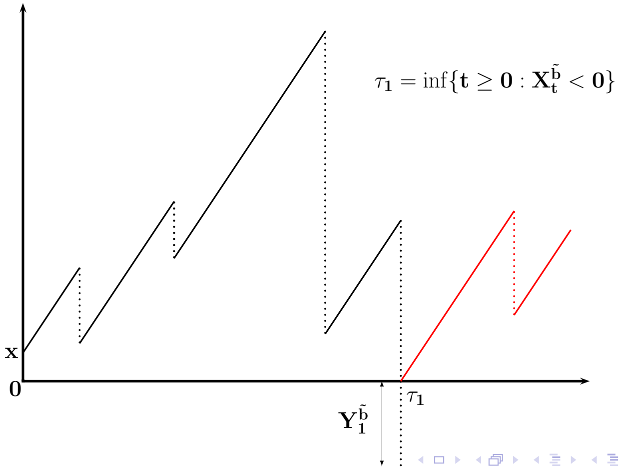
Wegen $\delta \geq 0$ es ist klar, dass es für ein beliebiges B optimal ist:

- die Kapitalzuführungen nur dann zu betätigen, wenn der Überschussprozess unter Null fällt
- nur so viel Kapital zuzuführen, dass der Überschussprozess wieder in Null landet.

Der Überschussprozess ist $X_t^{\tilde{b},Y} = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Z_i + Y_t^{\tilde{b}}$.



Der Überschussprozess ist $X_t^{\tilde{b},Y} = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Z_i + Y_t^{\tilde{b}}$.



Darstellung als Gerber-Shiu-Funktionen

Der Wert der Strategie $Y^{\tilde{b}}$ ist dann gegeben durch

$$V^{\tilde{b}}(x) = \underbrace{\mathbb{E}_x[Y_1^{\tilde{b}} \cdot e^{-\delta\tau_1}; \tau_1 < \infty]}_{=:\phi(x)} + V^{\tilde{b}}(0)\underbrace{\mathbb{E}_x[e^{-\delta\tau_1}; \tau_1 < \infty]}_{=:\psi(x)},$$

Darstellung als Gerber-Shiu-Funktionen

Der Wert der Strategie $Y^{\tilde{b}}$ ist dann gegeben durch

$$V^{\tilde{b}}(x) = \underbrace{\mathbb{E}_x[Y_1^{\tilde{b}} \cdot e^{-\delta\tau_1}; \tau_1 < \infty]}_{=:\phi(x)} + V^{\tilde{b}}(0) \underbrace{\mathbb{E}_x[e^{-\delta\tau_1}; \tau_1 < \infty]}_{=:\psi(x)},$$

$Y_1^{\tilde{b}}$ kann man als Geldstrafe im Falle des Ruins interpretieren.

Darstellung als Gerber-Shiu-Funktionen

Der Wert der Strategie $Y^{\tilde{b}}$ ist dann gegeben durch

$$V^{\tilde{b}}(x) = \underbrace{\mathbb{E}_x[Y_1^{\tilde{b}} \cdot e^{-\delta\tau_1}; \tau_1 < \infty]}_{=:\phi(x)} + V^{\tilde{b}}(0) \underbrace{\mathbb{E}_x[e^{-\delta\tau_1}; \tau_1 < \infty]}_{=:\psi(x)},$$

$Y_1^{\tilde{b}}$ kann man als Geldstrafe im Falle des Ruins interpretieren. Dann ist $\phi(x)$ erwartete diskontierte Geldstrafe und $\psi(x)$ - erwartete diskontierte Geldstrafe $= 1$.

Darstellung als Gerber-Shiu-Funktionen

Der Wert der Strategie $Y^{\tilde{b}}$ ist dann gegeben durch

$$V^{\tilde{b}}(x) = \underbrace{\mathbb{E}_x[Y_1^{\tilde{b}} \cdot e^{-\delta\tau_1}; \tau_1 < \infty]}_{=:\phi(x)} + V^{\tilde{b}}(0)\underbrace{\mathbb{E}_x[e^{-\delta\tau_1}; \tau_1 < \infty]}_{=:\psi(x)},$$

$Y_1^{\tilde{b}}$ kann man als Geldstrafe im Falle des Ruins interpretieren. Dann ist $\phi(x)$ erwartete diskontierte Geldstrafe und $\psi(x)$ - erwartete diskontierte Geldstrafe $= 1$.

Somit können $\phi(x)$und $\psi(x)$ als Gerber-Shiu-Funktionen aufgefasst und bei bekannter Einzelschadenverteilung $G(x)$ problemlos ausgerechnet werden.

$Z_i \sim \mathrm{Exp}(\frac{1}{\mu})$

Nimmt man $Z_i \sim \mathrm{Exp}(\frac{1}{\mu})$ an, so erhält man mit Gerber und Shiu Methode:

$$V^{\tilde{b}}(x) = \begin{cases} \frac{1+\mu R}{-R} e^{R \cdot x} & : \ x \geq 0 \\ \frac{1+\mu R}{-R} - x & : \ x < 0 \end{cases},$$

$Z_i \sim \text{Exp}(\frac{1}{\mu})$

Nimmt man $Z_i \sim \text{Exp}(\frac{1}{\mu})$ an, so erhält man mit Gerber und Shiu Methode:

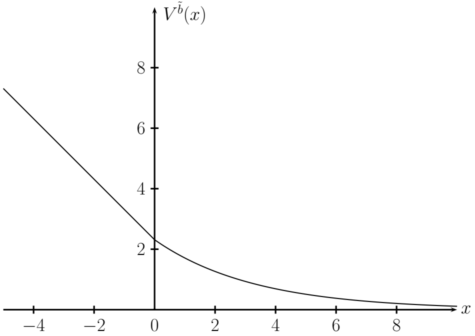
$$V^{\tilde{b}}(x) = \begin{cases} \frac{1+\mu R}{-R} e^{R \cdot x} & : \ x \geq 0 \\ \frac{1+\mu R}{-R} - x & : \ x < 0 \end{cases},$$

wobei $R = \frac{\delta\mu + \lambda\mu - c - \sqrt{(\delta\mu+\lambda\mu-c)^2 + 4c\delta\mu}}{2c\mu}$ die negative Lösung der Gleichung

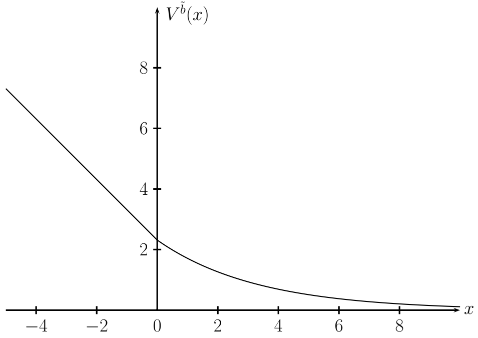
$$\lambda + \delta - c\rho = \frac{\lambda}{\mu} \int_0^\infty e^{-\rho y} e^{-\frac{y}{\mu}} \, \mathrm{d}y$$

ist.

Parameter $\mu = 1$, $\lambda = 1$, $\delta = 0.04$, $\theta = 0.5$ und $\eta = 0.3$



Parameter $\mu = 1$, $\lambda = 1$, $\delta = 0.04$, $\theta = 0.5$ und $\eta = 0.3$



Die obigen Berechnungen können für jedes beliebige $b \in (b_0, \tilde{b}]$, $c(b_0) = 0$, durchgeführt werden.

Eigenschaften der Wertefunktion

Die Wertefunktion $V(x)$ erfüllt $\lim_{x \to \infty} V(x) = 0$ und ist Lipschitz-stetig.

Eigenschaften der Wertefunktion

Die Wertefunktion $V(x)$ erfüllt $\lim_{x \to \infty} V(x) = 0$ und ist Lipschitz-stetig.

Beweis:

Es ist klar, dass $V(x)$ fallend ist.

Eigenschaften der Wertefunktion

Die Wertefunktion $V(x)$ erfüllt $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} V(x) = 0$ und ist Lipschitz-stetig.

Beweis:

Es ist klar, dass $V(x)$ fallend ist.

Außerdem gilt nach Definition von $V(x)$: $V(x) \leq V^{\tilde{b}}(x)$, woraus $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} V(x) = 0$ folgt.

Eigenschaften der Wertefunktion

Die Wertefunktion $V(x)$ erfüllt $\lim_{x\to\infty} V(x) = 0$ und ist Lipschitz-stetig.

Beweis:

Es ist klar, dass $V(x)$ fallend ist.

Außerdem gilt nach Definition von $V(x)$: $V(x) \le V^{\tilde{b}}(x)$, woraus $\lim_{x\to\infty} V(x) = 0$ folgt.

Für $z > x$ betrachte eine Strategie B, so dass $V^B(z) \le V(z) + \epsilon$ für ein beliebiges $\epsilon > 0$. Dann gilt

$$0 \le V(x) - V(z) \le V^B(z) + z - x - V^B(z) + \epsilon \le z - x + \epsilon\,.$$

Eigenschaften der Wertefunktion

Die Wertefunktion $V(x)$ erfüllt $\lim\limits_{x \to \infty} V(x) = 0$ und ist Lipschitz-stetig.

Beweis:

Es ist klar, dass $V(x)$ fallend ist.

Außerdem gilt nach Definition von $V(x)$: $V(x) \le V^{\tilde{b}}(x)$, woraus $\lim\limits_{x \to \infty} V(x) = 0$ folgt.

Für $z > x$ betrachte eine Strategie B, so dass $V^B(z) \le V(z) + \epsilon$ für ein beliebiges $\epsilon > 0$. Dann gilt

$$0 \le V(x) - V(z) \le V^B(z) + z - x - V^B(z) + \epsilon \le z - x + \epsilon\,.$$

$\square$

Theorem

Die Wertefunktion $V(x)$ ist stetig differenzierbar in allen Punkten, wo die optimale Strategie nicht durch b_0, $c(b_0) = 0$, gegeben ist. Die Ableitungen $V'(x)$ lösen die Hamilton–Jacobi–Bellman Gleichung

$$\inf_{b \in [0, \tilde{b}]} \lambda \int_0^\infty V(x - r(z,b))\, \mathrm{d}G(z) + c(b)V'(x) - (\delta + \lambda)V(x) = 0\,.$$

Falls es ein b mit $c(b) \geq \lambda \mathbb{E}[r(Z,b)]$ gibt, dann ist $V(x)$ eindeutig.

Optimale Strategie für $x = 0$

- Erwartungswertprinzip liefert
  $c(b) = \lambda\mu(\eta - \theta) + \lambda\mathbb{E}[r(Z, b)](1 + \theta)$.

Optimale Strategie für $x = 0$

- Erwartungswertprinzip liefert
$c(b) = \lambda\mu(\eta - \theta) + \lambda\mathbb{E}[r(Z, b)](1 + \theta)$.
- Für $b \in [0, b_0]$ gilt

$$V^b(0) = \frac{-\lambda\theta\mathbb{E}[r(Z, b)] + \lambda\mu(\theta - \eta)}{\delta} \geq V^{b_0}(0) \geq V(0)\,.$$

Optimale Strategie für $x = 0$

- Erwartungswertprinzip liefert
  $c(b) = \lambda\mu(\eta - \theta) + \lambda\mathbb{E}[r(Z, b)](1 + \theta)$.
- Für $b \in [0, b_0]$ gilt

$$V^b(0) = \frac{-\lambda\theta\mathbb{E}[r(Z,b)] + \lambda\mu(\theta - \eta)}{\delta} \geq V^{b_0}(0) \geq V(0)\,.$$

- Die HJB Gleichung für $x = 0$ ist dann

$$\inf_{b \in [b_0, \tilde{b}]} -\lambda\mathbb{E}[r(Z,b)] + c(b)V'(0) - \delta V'(0) = 0\,.$$

Optimale Strategie für $x = 0$

- Erwartungswertprinzip liefert $c(b) = \lambda\mu(\eta - \theta) + \lambda\mathbb{E}[r(Z, b)](1 + \theta)$.
- Für $b \in [0, b_0]$ gilt

$$V^b(0) = \frac{-\lambda\theta\mathbb{E}[r(Z, b)] + \lambda\mu(\theta - \eta)}{\delta} \geq V^{b_0}(0) \geq V(0)\,.$$

- Die HJB Gleichung für $x = 0$ ist dann

$$\inf_{b\in[b_0,\tilde{b}]} -\lambda\mathbb{E}[r(Z, b)] + c(b)V'(0) - \delta V'(0) = 0\,.$$

- Da $V'(0) \leq 0$ und $c(b) \geq 0$ ist $b = \tilde{b}$ optimal für $x = 0$.

Proportionale Rückversicherung und $Z_i \sim \mathrm{Exp}(\frac{1}{\mu})$

Wir haben $r(Z, b) = bZ$, $b \in [0, 1]$ und wissen bereits, dass für $x \geq 0$ gilt $V^1(x) = \frac{1+R\mu}{-R} e^{Rx}$.

Proportionale Rückversicherung und $Z_i \sim \mathrm{Exp}(\frac{1}{\mu})$

Wir haben $r(Z,b) = bZ$, $b \in [0,1]$ und wissen bereits, dass für $x \geq 0$ gilt $V^1(x) = \frac{1+R\mu}{-R} e^{Rx}$.

Einsetzen in die HJB Gleichung ergibt

$$\inf_{b\in[0,1]} \frac{\lambda}{Rb\mu + 1} + [\lambda\mu(\eta - \theta) + \lambda\mu b(1+\theta)]R - (\lambda + \delta) = 0\,.$$

Proportionale Rückversicherung und $Z_i \sim \mathrm{Exp}(\frac{1}{\mu})$

Wir haben $r(Z,b) = bZ$, $b \in [0,1]$ und wissen bereits, dass für $x \geq 0$ gilt $V^1(x) = \frac{1+R\mu}{-R} e^{Rx}$.

Einsetzen in die HJB Gleichung ergibt

$$\inf_{b \in [0,1]} \frac{\lambda}{Rb\mu + 1} + [\lambda\mu(\eta - \theta) + \lambda\mu b(1+\theta)]R - (\lambda + \delta) = 0\,.$$

Leicht rechnet man nach, dass $b = 1$ genau dann optimal ist, wenn $\theta \geq \frac{\delta - cR - \lambda\mu R}{\lambda(1+R\mu)}$.

Damit $\theta \leq 1$ muss zusätzlich $\eta \leq \max(\frac{-\lambda - 2\delta \pm \sqrt{2}(\lambda - \delta)}{\lambda}, 0)$ gelten.

Parameter $\delta = 0.04$, $\mu = 1$ und $\lambda = 1$

Als Grenze für η erhalten wir 0.278.

Wähle z.B. $\eta = 0.1$, dann hat man $1 \geq \theta \geq 0.643$. Für $\theta = 0.65$ erhalten wir als Wertefunktion

$$V(x) = \begin{cases} 3.55 \exp(-0.22x) & : \; x \geq 0 \\ -x + 3.55 & : \; x < 0 \end{cases}.$$

Parameter $\delta = 0.04$, $\mu = 1$ und $\lambda = 1$

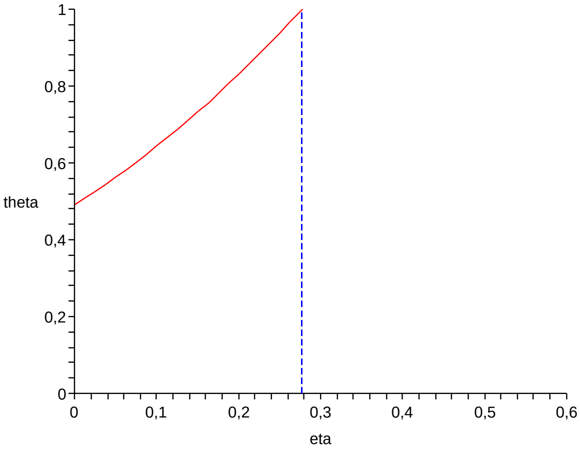
Als Grenze für η erhalten wir 0.278.

Wähle z.B. $\eta = 0.1$, dann hat man $1 \geq \theta \geq 0.643$. Für $\theta = 0.65$ erhalten wir als Wertefunktion

$$V(x) = \begin{cases} 3.55\exp(-0.22x) & : \ x \geq 0 \\ -x + 3.55 & : \ x < 0 \end{cases}.$$

Allerdings kann man die Wertefunktion für den Fall $\theta < \frac{\delta - cR - \lambda\mu R}{\lambda(1+R\mu)}$ nicht explizit angeben.

Abhängigkeit von θ und η für $\delta = 0.04$, $\mu = 1$ und $\lambda = 1$



Excess of Loss Rückversicherung und $Z_i \sim \mathrm{Exp}(\frac{1}{\mu})$

Wir haben $r(Z,b) = \min(Z,b)$, $b \in [0,\infty]$ und HJB Gleichung hat die Form

$$\inf_{b\in[0,\infty]} \lambda V(x-b)e^{-\frac{b}{\mu}} + \lambda \int_0^b V(x-z)e^{-\frac{z}{\mu}}\,\mathrm{d}z + c(b)V'(x) - (\lambda+\delta)V(x) = 0\,.$$

Excess of Loss Rückversicherung und $Z_i \sim \mathrm{Exp}(\frac{1}{\mu})$

Wir haben $r(Z,b) = \min(Z,b)$, $b \in [0,\infty]$ und HJB Gleichung hat die Form

$$\inf_{b\in[0,\infty]} \lambda V(x-b)e^{-\frac{b}{\mu}} + \lambda \int_0^b V(x-z)e^{-\frac{z}{\mu}}\,\mathrm{d}z + c(b)V'(x) \\ -(\lambda+\delta)V(x) = 0\,.$$

Setzt man die Funktion $\frac{1+R\mu}{-R}e^{Rx}$ in die Gleichung ein und leitet nach b ab, so erhält man als notwendige Bedingung für das Minimum:

$$e^{-Rb} = (1+\theta)\,.$$

Excess of Loss Rückversicherung und $Z_i \sim \mathrm{Exp}(\frac{1}{\mu})$

Wir haben $r(Z,b) = \min(Z,b)$, $b \in [0,\infty]$ und HJB Gleichung hat die Form

$$\inf_{b\in[0,\infty]} \lambda V(x-b)e^{-\frac{b}{\mu}} + \lambda \int_0^b V(x-z)e^{-\frac{z}{\mu}}\,\mathrm{d}z + c(b)V'(x) - (\lambda+\delta)V(x) = 0\,.$$

Setzt man die Funktion $\frac{1+R\mu}{-R}e^{Rx}$ in die Gleichung ein und leitet nach b ab, so erhält man als notwendige Bedingung für das Minimum:

$$e^{-Rb} = (1+\theta)\,.$$

Für alle $\theta < \infty$ gilt dann $b < \infty$.

Proportionale Rückversicherung und $Z_i \sim \mathrm{Exp}(\frac{1}{\mu})$

Betrachte die proportionale Rückversicherung, d.h. $r(Z, b) = bZ$, $b \in [0, 1]$.

Proportionale Rückversicherung und $Z_i \sim \text{Exp}(\frac{1}{\mu})$

Betrachte die proportionale Rückversicherung, d.h. $r(Z, b) = bZ$, $b \in [0, 1]$.

Wir setzen wieder $\lambda = \mu = 1$, $\theta = 0.5$, $\eta = 0.3$, $\delta = 0.04$ und $b_0 = 1 - \frac{\eta}{\theta}$.

Die HJB Gleichung hat nun die Form

$$\inf_{b \in [0,\infty]} \int_0^b V(x-z)e^{-z}\,\mathrm{d}z + (1.5b - 0.2)V'(x) - 1.04V(x) = 0\,.$$

Proportionale Rückversicherung und $Z_i \sim \text{Exp}(\frac{1}{\mu})$

Betrachte die proportionale Rückversicherung, d.h. $r(Z,b) = bZ$, $b \in [0,1]$.

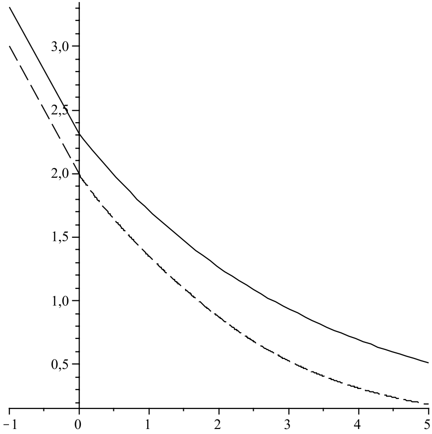
Wir setzen wieder $\lambda = \mu = 1$, $\theta = 0.5$, $\eta = 0.3$, $\delta = 0.04$ und $b_0 = 1 - \frac{\eta}{\theta}$.

Die HJB Gleichung hat nun die Form

$$\inf_{b \in [0,\infty]} \int_0^b V(x-z)e^{-z}\,\mathrm{d}z + (1.5b - 0.2)V'(x) - 1.04V(x) = 0\,.$$

Mittels Diskretisierung und Approximation des Integrals durch eine Summe erhält man folgende Werte:

Exponentialverteilte Einzelschäden



HJB Gleichung

Die HJB Gleichung hat in diesem Fall die Form

$$\inf_{b\in[0,\tilde{b}]} \lambda \int_0^\infty V(x - r(z,b))\,\mathrm{d}G(z) + c(b)V'(x) - \lambda V(x) = 0\,.$$

HJB Gleichung

Die HJB Gleichung hat in diesem Fall die Form

$$\inf_{b\in[0,\tilde{b}]} \lambda \int_0^\infty V(x - r(z,b))\,\mathrm{d}G(z) + c(b)V'(x) - \lambda V(x) = 0\,.$$

Es ist klar, dass nur b mit $c(b) > 0$ betrachtet werden sollen. Wäre nämlich ein b mit $c(b) \leq 0$ optimal, so würde folgen $V(0) = \infty$.

Transformation der HJB Gleichung

Definiere $s(y, b) = \inf\{z : r(z, b) > y\}$, dann kann man die HJB Gleichung wie folgt transformieren:

Transformation der HJB Gleichung

Definiere $s(y,b) = \inf\{z : r(z,b) > y\}$, dann kann man die HJB Gleichung wie folgt transformieren:

$$
\begin{aligned}
V'(x) \quad = \quad & \sup_{b \in (b_0, \tilde{b}]} \frac{\lambda}{c(b)} \Big[\int_0^x \big(1 - G(s(y,b))\big) V'(x-y) \,\mathrm{d}y \\
& - \int_x^\infty 1 - G(s(y,b)) \,\mathrm{d}y \Big] .
\end{aligned}
$$

Transformation der HJB Gleichung

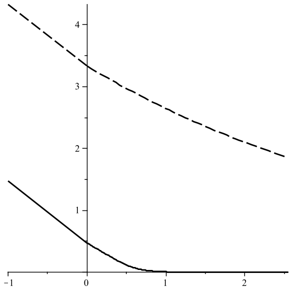
Definiere $s(y,b) = \inf\{z : r(z,b) > y\}$, dann kann man die HJB Gleichung wie folgt transformieren:

$$\begin{aligned} V'(x) &= \sup_{b \in (b_0, \tilde{b}]} \frac{\lambda}{c(b)} \Big[\int_0^x \big(1 - G(s(y,b))\big) V'(x-y)\,\mathrm{d}y \\ &\quad - \int_x^\infty 1 - G(s(y,b))\,\mathrm{d}y \Big] . \end{aligned}$$

Theorem:
Es gibt genau eine Funktion, die HJB Gleichung löst und $f(\infty) = 0$ erfüllt.

Proportionale Rückversicherung, $\lambda = \mu = 1$, $\theta = 0.5$, $\eta = 0.3$, $\delta = 0.04$

Funktionen $V^1(x)$ (gestrichelt) und $V(x)$ numerisch ausgerechnet.



References

- Gerber, H.U. and Shiu, E.S.W. (1998). On the time value of ruin. *North American Actuarial Journal*. **Vol. 2**(1), 48–78
- Schmidli, H. (2008). On the Gerber–Shiu Function and Change of Measure. Preprint, University of Cologne.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit