Seminar Bewertungsmethoden in der Personenversicherungsmathematik

Zinsratentheorie in der Versicherung II

Vitali Müller

Mathematisches Institut
der
Universität zu Köln

Sommersemester 2010
Betreuung: Prof Hanspeter Schmidli, Dr. Julia Eisenberg

Inhaltsverzeichnis

1 Rendite und Duration

Beim letzten Vortrag haben wir gesehen, dass für den Preis $P(t,T)$ und den Kassazins $R(t,T)$ von Zero-Bonds gilt:

$$P(t,T) = \exp(-R(t,T)(T-t)).$$

Das kann man für andere Anleihen verallgemeinern zu

$$P(t) = \sum_{i:\tau_i > t} e^{-y(t)(\tau_i - t)} c_i =: F(t, y(t)), \tag{1}$$

wobei c_i die Zahlungen zu den Zeitpunkten τ_i sind. $y(t)$ ist die Rendite bis Fälligkeit (yield to maturity). Damit werden die Zahlungen auf den Wert zum Zeitpunkt t diskontiert. Falls $c_i \geq 0$ für alle i und $c_i > 0$ für mindestens ein i mit $\tau_i > t$, dann ist die Abbildung $y(t) \mapsto F(t, y(t))$ streng monoton fallend. D.h. dann existiert eine eindeutige nichtnegative Lösung für $y(t)$.

Nun könnte man daran interessiert sein, zu wissen: wie sensibel reagiert der Preis $P(t)$ auf Änderungen von $y(t)$? (z.B. für Vergleiche unterschiedlicher Anleihen)

Die Antwort darauf hängt zusammen mit der sogenannten Duration der Anleihe. Diese ist definiert durch

$$D(t) := \frac{\sum_{i:\tau_i > t} (\tau_i - t) e^{-y(t)(\tau_i - t)} c_i}{P(t)}.$$

Man kann sie als den Durchschnitt der Zeiten bis zu den Zahlungen, gewichtet mit dem Wert der Zahlungen zum Zeitpunkt t, ansehen.

Betrachtet man $P(t)$ als Funktion von $y(t)$, so kann man Gleichung (1) nach $y(t)$ ableiten:

$$\frac{d}{dy(t)} P(t) = -\sum_{i:\tau_i > t} (\tau_i - t) e^{-y(t)(\tau_i - t)} c_i = -P(t)D(t).$$

2 Schätzung der Terminzinssätze

Oft hat man es mit folgendem Problem zu tun: man hat die Preise mehrerer Anleihen beobachtet und würde gerne etwas über die Zinsstrukturkurve oder die Terminzinssätze aussagen.

Bisher haben wir noch kein Modell für die Entwicklung der Preise eingeführt und sehen diese daher einfach als gegeben an.

2.1 Beobachten der Preise von Zero-Bonds

Angenommen, wir haben es mit n Zero-Bonds mit Fälligkeiten zu den Zeitpunkten τ_i zu tun (mit $\tau_1 < ... < \tau_n$).

Zur Zeit t beobachten wir die Preise $P(t, \tau_i)$ mit $i \in J(t)$, wobei $J(t) = \{j \in \{1, ..., n\} \,|\tau_i > t\}$. $J(t)$ ist also die Menge der Indizes, deren zugehörige Zero-Bonds noch nicht abgelaufen sind.

Wir können nun die Kassazinssätze der Referenzzeiträume $[t, \tau_i]$, $i \in J(t)$ mit Hilfe der Definition 2 des letzten Vortrags berechnen:

$$R(t, \tau_i) = -\frac{1}{\tau_i - t} \log P(t, \tau_i),\ i \in J(t).$$

Daraus ergibt sich mit Definition 4 jeweils der Terminzins des Zeitraums $[t, \tau_i]$:

$$f(t, \tau_{i-1}, \tau_i) = -\frac{\log P(t, \tau_i) - \log P(t, \tau_{i-1})}{\tau_i - \tau_{i-1}}.$$

Wir sind aber auch daran interessiert, die gesamte Zinsstrukturkurve $h \mapsto R(t, t+h)$, sowie die Kurve der sofortigen Terminzinssätze $h \mapsto f(t, t+h)$ zu approximieren.

Mögliche Ansätze sind:

- numerisch eine möglichst gut passende glatte Kurve zu den beobachteten Punkten finden
- parametrisierte Familie möglicher Terminzinssätze $\{h \mapsto f(t, t+h; \theta) | \theta \in \Theta\}$ einführen und die Parameter möglichst gut an die $R(t, \tau_i)$, $i \in J(t)$ anpassen

Wir befassen uns hier mit dem zweiten Ansatz.
Mit einer Gleichung aus der letzten Woche ergibt sich:

$$R(t, \tau_i; \theta) = \frac{1}{\tau_i - t} \int_t^{\tau_i} f(t, u; \theta) du.$$

Wir suchen nun also die Kurve $R(t, t+h; \theta)$, die nach unseren subjektiven Kriterien am besten die beobachteten $R(t, \tau_i)$ abbildet.
Das nächste Kapitel zeigt eine mögliche Parametrisierung.

2.2 Die Nelson-Siegel-Parametrisierung

Von Nelson und Siegel stammt die folgende Parametrisierung für den sofortigen Terminzins:

$$f(0, \tau) = \beta_0 + \beta_1 e^{-\tau/\delta} + \beta_2 \frac{\tau}{\delta} e^{-\tau/\delta}. \tag{2}$$

Dabei ist zur besseren Anschauung $t = 0$ fixiert.
Die Parameter haben die folgende Bedeutung: β_0 betrifft die langfristige, β_1 die kurzfristige und β_2 die mittelfristige Komponente des Terminzinses, während δ bestimmt, wie lang-, kurz- und mittelfristig definiert sind.
Durch Integration der Gleichung (2) erhält man:

$$R(0, \tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} f(0, t) dt = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2)(1 - e^{-\tau/\delta}) \frac{1}{\tau/\delta} - \beta_2 e^{-\tau/\delta}.$$

Nun geht es darum, diese Gleichung möglichst gut an die beobachteten Kassazinssätze der Zeiträume $[0, \tau_1], \dots, [0, \tau_n]$ anzupassen. Dazu verändern wir etwas die Parametrisierung und führen $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3)^T$ ein so, dass sich die Gleichung verändert zu

$$R(0, \tau_i; \vartheta, \delta) = \vartheta_1 + \vartheta_2 (1 - e^{-\tau_i/\delta}) \frac{1}{\tau_i/\delta} + \vartheta_3 e^{-\tau_i/\delta} =: Y^i(\delta)^T \vartheta.$$

D.h. $\vartheta_1 = \beta_0$, $\vartheta_2 = \beta_0 + \beta_1$, $\vartheta_3 = -\beta_2$ und $Y^i(\delta) = (1, (1 - e^{-\tau_i/\delta}) \frac{1}{\tau_i/\delta}, e^{-\tau_i/\delta})^T$.
Für gegebenes δ ist $R(0, \tau_i)$ also linear in ϑ und man kann somit die verallgemeinerte Methode der kleinsten Quadrate anwenden.
Angenommen, man hat die Kassazinssätze $\hat{R}(0, \tau_i)$, $i = 1, \dots, n$ beobachtet. Diese bilden den Vektor $\hat{R} = (\hat{R}(0, \tau_1), \dots, \hat{R}(0, \tau_n))^T$.
Die $Y^i(\delta)$ bilden die $(n \times 3)$-Matrix

$$Y(\delta) = \begin{pmatrix} Y^1(\delta)^T \\ \vdots \\ Y^n(\delta)^T \end{pmatrix}.$$

Minimiere nun die quadratische Gleichung

$$h(\vartheta) = \frac{1}{2} (Y(\delta)\vartheta - \hat{R})^T A (Y(\delta)\vartheta - \hat{R}) \tag{3}$$

mit A symmetrisch und positiv definit. A kann hierbei z.B. die Einheitsmatrix sein (dann ist h einfach die Summe der quadrierten Abweichungen der gesuchten Funktion von den beobachteten Werten), oder aber man gewichtet mit Hilfe der Matrix A einige der beobachteten Werte stärker als andere (z.B. Anleihen mit bestimmten Fälligkeiten oder höherem Handelsvolumen).
Zum Minimieren löse $\frac{\partial}{\partial\vartheta}h(\vartheta) = 0$, also

$$Y(\delta)^T A(Y(\delta)\vartheta - \hat{R}) = 0.$$

Diese Gleichung hat die Lösung

$$\vartheta(\delta) = (Y(\delta)^T AY(\delta))^{-1}Y(\delta)^T A\hat{R}. \tag{4}$$

Diese hängt also von δ ab, welches man noch festlegen muss. Das optimale δ findet man aber, indem man Gleichung (4) in (3) einsetzt und $h(\vartheta(\delta))$ minimiert.

3 Arbitragefreie Preisbildung in diskreter Zeit

Wir betrachten nun einen Markt, auf dem zwei Assets gehandelt werden, deren Preise zum Zeitpunkt t durch $S^0(t)$ und $S^1(t)$ gegeben sind. Das Modell lässt sich auch auf mehr Assets ausdehnen, was jedoch eine anschauliche Darstellung erschwert. Der Handel findet nur zu den diskreten Zeitpunkten $t \in \{0, 1, ..., T\}$ statt.

Wir weichen außerdem von der Annahme ab, die Preise seien deterministisch. D.h. $S^0(t)$ und $S^1(t)$ sind Zufallsvariablen, die erst zum Zeitpunkt t beobachtet werden.

Die Familie der Preise eines Assets i, $S^i = (S^i(t))_{t\in\{0,...T\}}$ ist ein stochastischer Prozess.

Die zur Zeit t gegebene Information ist die σ-Algebra $\mathcal{F}(t)$. Zusammen bilden diese die Filtration $\mathbf{F} = (\mathcal{F}(t))_{t\in\{0,...T\}}$. Es gilt $\mathcal{F}(t) \subseteq \mathcal{F}(u)$ für alle $t < u \leq T$, d.h. es wird keine Information wieder vergessen.

S^i ist adaptiert bzgl. $\mathbf{F}$, d.h. $S^i(t)$ ist $\mathcal{F}(t)$-messbar. Der Preis zur Zeit t ist also Teil der Information in t.

Wir nehmen an, S^0 beschreibt den Wert einer Einheit, die zur Zeit 0 auf ein Sparkonto eingezahlt wurde, das für den Zeitraum $(t-1, t]$ den Zins $i(t)$ erbringt. $(i(t))_{t\in\{1,...T\}}$ ist auch ein stochastischer Prozess.

S^1 kann z.B. der Preis eines Zero-Bonds sein.

Man kann S^0 als Diskontierungsfaktor benutzen und erhält die diskontierten Preisprozesse

$$X(t) = \frac{S^1(t)}{S^0(t)} \quad \text{und} \quad X(t) = \frac{S^0(t)}{S^0(t)} = 1.$$

3.1 Handelsstrategien und der Wertprozess

Eine Handelsstrategie (oder auch einfach Strategie) ist definiert als ein zweidimensionaler Prozess $h = (h^0, h^1)$ mit h^0 adaptiert und h^1 vorhersehbar (d.h. $h^1(t)$ ist $\mathcal{F}(t-1)$-messbar).

h^0 beschreibt hier den Kontostand und h^1 die Anzahl der gehaltenen Zero-Bonds. h^1 ist vorhersehbar, da $h^1(t)$, also die Menge der Zero-Bonds im Portfolio von $t-1$ bis t, bereits zum Zeitpunkt $t-1$ festgelegt wird.

Man nennt $h(t) = (h^0(t), h^1(t))$ das Portfolio zur Zeit t.

Der Wertprozess von h wird definiert durch

$$\begin{aligned} V(t,h) &= S^0(t)^{-1}(h^1(t)S^1(t) + h^0(t)S^0(t)) \\ &= h^1(t)X(t) + h^0(t). \end{aligned}$$

Er gibt also den auf 0 diskontierten Wert des Portfolios zum Zeitpunkt t an.

3.2 Selbstfinanzierende Strategien und Arbitrage

Eine Strategie wird selbstfinanzierend genannt, wenn für den Wertprozess gilt

$$V(t,h) = V(0,h) + \sum_{s=1}^{t} h^1(s)\Delta X(s)$$

mit $\Delta X(s) = X(s) - X(s-1)$, d.h. Veränderungen des Werts des Portfolios werden nur durch Preisänderungen des Zero-Bonds und die damit verbundenen Gewinne und Verluste verursacht. Änderungen an der Zusammensetzung des Portfolios werden jedoch nur auf kostenneutrale Weise durchgeführt (also z.B. Kauf zusätzlicher Zero-Bonds durch Reduzierung des Kontostands).

Eine Arbitrage ist eine selbstfinanzierende Strategie, für die gilt

$$V(0,h) = 0, \quad \mathbb{P}(V(T,h) \geq 0) = 1 \text{ und } \mathbb{P}(V(T,h) > 0) > 0. \tag{5}$$

Dies entspricht also einem kostenlosen Lotterieticket.

Nehmen wir an, der Versicherer investiert auf dem Finanzmarkt, um sich gegen das Risiko aus einer unsicheren zukünftigen Verbindlichkeit H abzusichern. Wenn nun eine selbstfinanzierende Strategie h existiert, für die gilt $V(T,h) = H$ zur Zeit T, dann ist $V(0,h)$ der einzige vernünftige Preis für die Verbindlichkeit H. Er wird der arbitragefreie Preis für H genannt. Natürlich ist es aber oft nicht möglich, H exakt zu replizieren, was die Frage nach der optimalen Handelsstrategie erschwert.

3.3 Äquivalente Martingalmaße und Arbitragefreiheit

Wenn wir beschreiben wollen, wie sich die Preise entwickeln, müssen wir Annahmen treffen über die Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Veränderungen. Das legt die Verteilung der zukünftigen Preise fest und führt zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$.

Nun führen wir aber ein anderes Wahrscheinlichkeitsmaß Q ein. Es soll äquivalent zu $\mathbb{P}$ sein, d.h. für alle $A \in \mathcal{F}$ soll gelten

$$\mathbb{P}(A) = 0 \;\Leftrightarrow\; Q(A) = 0,$$

es kann aber ansonsten andere Wahrscheinlichkeiten für die selben Ereignisse angeben.

Die andere Bedingung an Q ist, dass der diskontierte Preisprozess X unter Q ein Martingal ist, also für alle $t \leq u$ gilt

$$E^Q[X(u)|\mathcal{F}(t)] = X(t).$$

Warum ist das äquivalente Martingalmaß Q wichtig? Man kann zeigen, dass aus seiner Existenz die Arbitragefreiheit des Modells folgt:

Beweis Angenommen es existiert mindestens ein äquivalentes Martingalmaß.

Zu zeigen ist nun, dass keine selbstfinanzierende Strategie existiert, für die die Bedingungen (5) gelten.

Das ist der Fall, wenn für alle selbstfinanzierenden Strategien h gilt

$$E^Q[V(T,h)] = V(0,h) = 0. \tag{6}$$

Denn aus $V(T,h) \geq 0$ und (6) folgt $Q(V(T,h) = 0) = 1$, und da $\mathbb{P}$ und Q äquivalent sind auch $\mathbb{P}(V(T,h) = 0) = 1$.

Da h selbstfinanzierend ist, gilt

$$V(T,h) = V(0,h) + \sum_{s=1}^{T} h^1(s)\Delta X(s).$$

Jetzt nutzen wir die Vorhersehbarkeit von h^1 und die Martingaleigenschaft von X:

$$\begin{aligned} E^Q[h^1(s)\Delta X(s)|\mathcal{F}(s-1)] &= h^1(s)E^Q[\Delta X(s)|\mathcal{F}(s-1)] \\ &= h^1(s)E^Q[X(s)-X(s-1)|\mathcal{F}(s-1)] \\ &= h^1(s)(X(s-1)-X(s-1)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, dass für eine selbstfinanzierende Strategie der Wertprozess ein Q-Martingal ist, also für alle $t \leq u$ gilt

$$E^Q[V(u,h)|\mathcal{F}(t)] = V(t,h).$$

Mit $u = T$ und $t = 0$ folgt daraus die Gleichung (6) und damit die Arbitragefreiheit.$\square$

Betrachte nun eine Verbindlichkeit mit dem Payoff H, die sich durch eine selbstfinanzierende Strategie h replizieren lässt:

$$H = V(T,h) = V(0,h) + \sum_{t=1}^{T} h^1(t)\Delta X(t).$$

Für eine selbstfinanzierende Handelsstrategie ist der Prozess $(V(t,h))_{t\in\{0,\ldots,T\}}$ auch ein Q-Martingal. Daher können wir nun den Erwartungswert dieser Gleichung bestimmen:

$$E^Q[H] = E^Q[V(T,h)] = V(0,h).$$

Der arbitragefreie Preis der Verbindlichkeit lässt sich also als der Erwartungswert der diskontierten Zahlungen unter Q berechnen.

3.4 Beispiel

Wir betrachten ein einfaches Beispiel mit zwei Perioden, d.h. der Handel findet statt zu den Zeitpunkten $t = 0, 1, 2$.

Gegeben ist ein Sparkonto, dessen Zins $i(1) = 5\%$ bereits in $t = 0$ bekannt ist. Der Zins für die zweite Periode wird erst in $t = 1$ bekanntgegeben und kann die Werte $i(2) = 4\%$ oder $i(2) = 6\%$ annehmen. Sei

$$p = \mathbb{P}(i(2) = 0,04) = 1 - \mathbb{P}(i(2) = 0,06)$$

mit $0 < p < 1$.

Was kann man über die Preise von Zero-Bonds sagen? Das Arbitrage-Argument liefert für die beiden möglichen Werte von $i(2)$

$$P(1,2) = \frac{1}{1,06} \approx 0,943 \ \text{ bzw. } \ P(1,2) = \frac{1}{1,04} \approx 0,962.$$

Für $P(0,2)$ bekommt man so aber nur ein Intervall.

Existiert ein äquivalentes Martingalmaß zu $\mathbb{P}$?

Definiere das Wahrscheinlichkeitsmaß Q durch

$$q = Q(i(2) = 0,04) = 1 - Q(i(2) = 0,06)$$

mit $0 \leq q \leq 1$. Die Äquivalenz zu $\mathbb{P}$ ergänzt diese Bedingung zu $0 < q < 1$.

Versuche nun q so zu wählen, dass der Prozess

$$X(t) = \frac{P(t,2)}{S^0(t)}$$

ein Martingal unter Q wird. Es soll also gelten

$$E^Q\left[\frac{P(u,2)}{S^0(u)}\middle|\mathcal{F}(t)\right] = \frac{P(t,2)}{S^0(t)} \tag{7}$$

für $0 \leq t < u \leq 2$.

- Für den Fall $t = 1$ und $u = 2$ ist $P(u,2) = 1$ und $S^0(u) = S^0(t)(1 - i(2))$. Da $i(2)$ in $t = 1$ bekannt ist, impliziert (7)

  $$\frac{1}{1+i(2)} = P(1,2),$$

  was der Bedingung entspricht, die wir vorher schon hergeleitet haben.

- Für $u = 1$ und $t = 0$ ergibt sich

  $$E^Q\left[\frac{P(1,2)}{S^0(1)}\right] = E^Q\left[\frac{P(1,2)}{S^0(1)}\middle|\mathcal{F}(0)\right] = \frac{P(0,2)}{S^0(0)} = P(0,2),$$

  da $\mathcal{F}(0)$ keine nicht-triviale Information enthält. Mit der Definition von Q hat man:

  $$P(0,2) = E^Q\left[\frac{P(1,2)}{S^0(1)}\right] = \frac{1}{1,05}\bigg(0,962q + 0,943(1-q)\bigg).$$

  Die Lösung dieser Gleichung ist

  $$q = \frac{1,05P(0,2) - 0,943}{0,962 - 0,943}.$$

  Q ist also ein äquivalentes Martingalmaß, wenn $0,943 < 1,05P(0,2) < 0,962$ (dann gilt $0 < q < 1$). Dies entspricht auch der Bedingung für Arbitragefreiheit.

Man sieht, dass hier das äquivalente Martingalmaß eindeutig durch die Marktpreise festgelegt wird.

Eine einfache Zinssatzgarantie Angenommen wir wollen uns gegen die Situation absichern, dass der Zinssatz in Periode 2 unter $4,5\%$ fällt. Genauer gesagt planen wir, in $t = 1$ eine Einheit zu investieren und wollen in $t = 2$ die Zahlung $\max(1,045; 1 + i(2))$ erhalten. Was würde ein solcher Vertrag kosten?
Die diskontierte Zahlung ist

$$H = \frac{\max(1,045; 1+i(2))}{S^0(2)} = \frac{1}{1,05(1+i(2))}\bigg(1 + i(2) + (0,045 - i(2))^+\bigg).$$

In (3.3) wurde gezeigt, dass der arbitragefreie Preis zum Zeitpunkt 0 der folgende wäre:

$$E^Q[H] = \frac{1}{1,05} + \frac{1}{1,05}\left(q\frac{0,005}{1,04} + (1-q)0\right) = \frac{1}{1,05} + q\frac{0,005}{1,04 \cdot 1,05}.$$

Der Preis für die Garantie (zweiter Teil des Terms) hängt also nur vom Preis eines Zero-Bonds ab und ist damit unabhängig vom ursprünglichen Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$.

4 Modelle für den Kassazins in stetiger Zeit

Wir wechseln nun von der diskreten zur stetigen Zeit. Der Kassazins kann durch ein Diffusionsmodell beschrieben werden. Dabei lässt sich seine Änderung in einem kleinen Zeitintervall $(t, t + \Delta t]$ approximieren durch

$$r(t+\Delta t) - r(t) = \Delta r(t) \approx \nu(t, r(t))\Delta t + \sigma(t, r(t))\Delta \overline{W}(t).$$

Dabei sind ν und σ bekannte Funktionen, $\Delta\overline{W}(t) = \overline{W}(t+\Delta t) - \overline{W}(t)$ und $\overline{W}$ ist eine Brownsche Bewegung. $\overline{W}$ hat also unabhängige normalverteilte Zuwächse und $\{\overline{W}(t) - \overline{W}(s)\}$ hat den Erwartungswert 0 und die Varianz $t-s$.

Da die Gleichung nur für infinitesimale Intervalle gilt, kann man auch schreiben

$$dr(t) = \nu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))d\overline{W}(t).$$

Das kann man integrieren und erhält

$$r(t) = r(0) + \int_0^t \nu(s, r(s))ds + \int_0^t \sigma(s, r(s))d\overline{W}(s).$$

Das Sparkonto S^0 ist definiert durch $S^0(0) = 1$ und

$$dS^0(t) = r(t)S^0(t)dt,$$

woraus folgt

$$S^0(t) = \exp\left(\int_0^t r(\tau)d\tau\right).$$

$\mathcal{F}(t)$ ist gegeben durch die natürliche Ftiltration der Brownschen Bewegung $\overline{W}$:

$$\mathcal{F}(t) = \sigma\{\overline{W}(u),\ u \leq t\}.$$

Wir beobachten also die Brownsche Bewegung. Das entspricht in der Regel jedoch dem direkten Beobachten von r.

Um auszunutzen, dass Preise von Zero-Bonds als Erwartungswert bezüglich eines äquivalenten Martingalmaßes berechnet werden können, ändern wir die Schreibweise zu

$$dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dW(t),$$

wobei ν durch eine andere Funktion μ ersetzt wurde und W eine Brownsche Bewegung unter einem Martingalmaß Q ist. Dadurch lässt sich der Preis eines Zero-Bonds zur Zeit t mit Fälligkeit in T schreiben als

$$P(t,T) = E^Q\left[\frac{S^0(t)}{S^0(T)}\bigg|\mathcal{F}(t)\right] = E^Q\left[\exp\left(-\int_t^T r(\tau)d\tau\right)\bigg|\mathcal{F}(t)\right].$$

Zwei Beispiele für Parametrisierungen von μ und σ sind das Vasiček-Modell (1977)

$$dr(t) = (b - ar(t))dt + \sigma dW(t)$$

und das Cox-Ingersoll-Ross-Modell (1985)

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t).$$