

Seminar Quantitatives Risikomanagement
Finanzzeitreihen I

Prof. Dr. Hanspeter Schmidli
Betreuung: Julia Eisenberg
Guo, Xiaotong

4.1 Empirische Analyse der Finanzzeitreihen

4.1.1 Stilisierte Fakten

Die stilisierten Fakten der finanziellen Zeitreihen sind eine Sammlung von empirischen Beobachtungen und Inferenzen aus diesen Beobachtungen, die sich täglich von Risiko-Faktoren, wie LOG>Returns von Stammkapital, Indizes, Wechselkursen und Rohstoffpreisen ändern. Eine Version des stilisierten Faktensatzes ist:

- (1) Return Reihen sind nicht iid obwohl sie kaum Korrelation zeigen.
- (2) Absolute- oder quadrierte Returns Reihen zeigen tiefe Korrelation.
- (3) Bedingte erwartete Returns sind nahe bei Null.
- (4) Volatilität ändert sich im Zeitverlauf.
- (5) Return Reihen sind leptokurtisch oder heavy-tailed.
- (6) Extreme Returns erscheinen in Clustern.

Sei $(S_t)_{t=0,1,\dots,n}$ eine Zeitreihe von Preisen, Index oder Wechselkursen, dann sind die zugehörigen Log>Returns

$$X_t = \ln(S_t / S_{t-1}), \quad t = 1, \dots, n.$$

Lang-Intervall Return Reihen

Wenn wir schrittweise das Intervall der Returns von täglichen, wöchentlichen, monatlichen, vierteljährlichen und jährlichen Daten erhöhen, Volatilität Clustering fällt und Returns fangen iid an und weniger heavy-tailed zu sein.

Wir werden eine Stichprobe von n Returns im Zeitintervall (täglich oder wöchentlich) beobachten. Nach der Additivitätseigenschaft definiert man h -Periode Log>Returns zum Zeitpunkt t :

$$X_t^{(h)} = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-h}}\right) = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \dots \frac{S_{t-h+1}}{S_{t-h}}\right) = \sum_{j=0}^{h-1} X_{t-j} \quad (4.1)$$

eine Stichprobe von nicht-überschneidenden h -periodischen Returns ist $\{X_t^{(h)} : t = h, 2h, \dots, \lceil n/h \rceil h\}$, wobei $\lceil \cdot \rceil$

die Ganzzahl bezeichnet. Aufgrund der Summenstruktur der h -periodischen Returns, erfolgt zentraler Grenzwert Effekt, wobei deren Verteilung mit erhöhendem h weniger leptokurtisch wird und mehr normal ist.

Man aggregiert die Daten zu den nicht-Überschneidenden h -periodischen Returns, reduziert die Größe der Stichprobe von n auf n/h , und für längeren Zeitraum Returns (z.B. vierteljährliche oder jährliche Returns), dies kann zu einer

sehr schweren Verringerung der Datenmenge führen. Eine Alternative ist, eine Überschneidung zu formen. Für

$1 \leq k \leq h$, eine allgemeine Rezept für die Bildung aggregierter h -Periode Returns (überschneidende oder nicht-überschneidende) ist

$$\left\{ X_t^{(h)} = \sum_{j=1}^{h-1} X_{t-j} : t = h, h+k, h+2k, \dots, h + \lceil (n-h)/k \rceil k \right\}; \quad (4.2)$$

Es gibt $(1 + \lceil (n-h)/k \rceil)$ Werte, die einen Betrag von $(h-k)$ überlappen.

4.1.2 Multivariate Stilisierte Fakten

Wir beobachten die multivariate Return Daten X_1, \dots, X_n , jede Komponente Reihe $X_{1,j}, \dots, X_{n,j}$ für $j = 1, \dots, d$ ist eine Reihe durch Logarithmische Differenz einer täglichen preis, Index oder Wechselkurs Reihe gebildet. Wir haben die folgenden multivariate Stilisierte Fakten.

(M1) Die multivariate Return Reihen zeigen die wenige Evidenz für kreuz-Korrelation, außer für kontemporäre Returns.

(M2) Die multivariate Reihe von absolute Returns zeigen starke Anzeichen für kreuz-Korrelation.

(M3) Die Korrelationen zwischen Reihen (d.h. zwischen kontemporäre Returns) verändern sich im Zeitverlauf.

(M4) Die extreme Returns in einer Reihe fallen oft mit extremen Returns in mehreren anderen Reihen zusammen.

4.2 Grundlagen von Zeitreihenanalyse

Dieser Paragraph bietet eine kurze Zusammenfassung der wesentlichen klassischen univariaten Zeitreihenanalyse mit Schwerpunkt, die relevant für die Modellierung Risiko-Faktor Return Reihe ist.

4.2.1 Grundlegenden Definitionen

Zeitreihen Modell für einen einzigen Risikofaktor ist ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$, d.h. eine Familie von Zufallsvariablen definiert auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathbb{F}, P) .

Falls Momente einer Zeitreihen existieren, definieren wir die Mittelwert Funktion $\mu(t)$ und Autokovarianz

Funktion $\gamma(t, s)$ von $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ durch

$$\mu(t) = E(X_t), \quad t \in \mathbb{Z},$$

$$\gamma(t, s) = E((X_t - \mu(t))(X_s - \mu(s))), \quad t, s \in \mathbb{Z}.$$

folgt, daß die Autokovarianz Funktion $\gamma(t, s) = \gamma(s, t) \quad \forall t, s$ erfüllt, und $\gamma(t, t) = Var(X_t)$.

Definition 4.1 (Strenge Stationarität). Die Zeitreihe $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ heißt streng stationär, wenn

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \stackrel{d}{=} (X_{t_1+k}, \dots, X_{t_n+k}) \quad \forall t_1, \dots, t_n, k \in \mathbb{Z} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definition 4.2 (Kovarianz Stationarität). Die Zeitreihe $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ heißt Kovarianz stationär (schwach oder zweiter Ordnung stationär), wenn

$$\mu(t) = \mu, \quad t \in \mathbb{Z},$$

$$\gamma(t, s) = \gamma(t+k, s+k), \quad t, s, k \in \mathbb{Z}.$$

Aus der Definition 4.2 haben wir $\gamma(t-s, 0) = \gamma(t, s) = \gamma(s, t) = \gamma(s-t, 0) \quad \forall s, t$, so dass die Kovarianz

zwischen X_t und X_s hängt nur von Zeitdifferenz(Lag) $|s-t|$ ab. Deshalb schreiben wir die Autokovarianz

Funktion für einen kovarianz-stationären Prozess wie eine univariable Funktion $\gamma(h) := \gamma(h, 0) \quad \forall h \in \mathbb{Z}$, und

$$\gamma(0) = \text{Var}(X_t).$$

Definition 4.3 (Autokorrelationsfunktion). Autokorrelationsfunktion (ACF) $\rho(h)$ eines Kovarianz-stationären Prozesses $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ist

$$\rho(h) = \rho(X_h, X_0) = \gamma(h) / \gamma(0) \quad \forall h \in \mathbb{Z}$$

Definition 4.4 (weißes Rauschen). $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit Autokorrelationsfunktion

$$\rho(h) = \begin{cases} 1, & h=0, \\ 0, & h \neq 0. \end{cases}$$

Kovarianz stationär und $E(X_t) = 0$, $\text{Var}(X_t) = \sigma^2 < \infty$ heißt weißes Rauschen, und es wird gekennzeichnet mit $WN(0, \sigma^2)$.

Definition 4.5 (Starkes weißes Rauschen). $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit X_t iid, $E(X_t) = 0$ und $\text{Var}(X_t) = \sigma^2 < \infty$ heißt starkes weißes Rauschen, und es wird gekennzeichnet mit $SWN(0, \sigma^2)$.

Definition 4.6 (Martingal-Differenz). Die Zeitreihe $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ heißt Martingal-Differenzfolge bzgl. der Filtration

$(F_t)_{t \in \mathbb{Z}}$, wenn $E|X_t| < \infty$, X_t F_t -messbar (adaptiert) ist und

$$E(X_t | F_{t-1}) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{Z}.$$

Offensichtlich der unbedingte Erwartungswert eines solches Prozesses ist auch Null:

$$E(X_t) = E(E(X_t | F_{t-1})) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{Z}.$$

Außerdem, wenn $E(X_t^2) < \infty \quad \forall t$, die Autokovarianzen erfüllen

$$\gamma(t, s) = E(X_t X_s)$$

$$E(E(X_t X_s | F_{s-1})) = E(X_t E(X_s | F_{s-1})) = 0 \quad t < s,$$

$$E(E(X_t X_s | F_{t-1})) = E(X_s E(X_t | F_{t-1})) = 0 \quad t > s.$$

Somit hat eine Martingal-Differenzfolge mit endlicher Varianz Mittelwert Null und Kovarianz Null. Wenn die Varianz konstant ist für alle t , es ist ein weißes Rauschen Prozess.

4.2.2 ARMA Prozesse

Die klassischen ARMA (AutoRegressiver Gleitender-Durchschnitt) Prozesse werden in vielen traditionellen Anwendungen von Zeitreihen Analyse genutzt. Sie sind Kovarianz-stationäre Prozesse, die mit weißem Rauschen als Grundbaustein konstruiert werden. In diesem Kapitel sind weißes Rauschen mit $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ und starkes weißes

Rauschen mit $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ gekennzeichnet.

Definition 4.7 (ARMA process). sei $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}} \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$, der Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ist ein Mittelwertfreier ARMA(p, q) Prozeß, wenn ein Kovarianz-stationärer Prozeß die Differenzgleichung erfüllt

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p} = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}, \forall t \in \mathbb{Z}. \quad (4.3)$$

Für den praktischen Zweck beschränken wir unsere Studie von ARMA Prozessen auf kausale ARMA Prozesse, die die Gleichungen (4.3) der Form erfüllen

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i}, \quad (4.4)$$

Für die Koeffizienten ψ_i muss gelten

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\psi_i| < \infty. \quad (4.5)$$

Bemerkung 4.8. Die sogenannte absolute Summationsbedingung (4.5) ist eine technische Bedingung, die gewährleistet, dass $E|X_t| < \infty$. Dies garantiert, dass die unendliche Summe in (4.4) fast sicher absolut konvergiert,

$\sum_{i=0}^{\infty} |\psi_i| |\varepsilon_{t-i}|$ UND $\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i}$ sind endlich mit Wahrscheinlichkeit Eins (siehe Brockwell und Davis 1991,

Proposition 3.1.1).

Proposition 4.9. Jeder (4.4) und (4.5) erfüllende Prozess ist Kovarianz-stationär mit einer Autokorrelationsfunktion

$$\rho(h) = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \psi_{i+|h|}}{\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2} \quad h \in \mathbb{Z}. \quad (4.6)$$

Beweis: klar für alle t $E(X_t) = 0$ und $Var(X_t) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 < \infty$ wegen (4.5). die Autokovarianz sind

$$Cov(X_t, X_{t+h}) = E(X_t X_{t+h}) = E\left(\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i} \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t+h-j}\right).$$

Da (ε_t) weißes Rauschen ist, folgt, dass $E(\varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t+h-j}) \neq 0 \Leftrightarrow j = i + h$, und deshalb

$$\gamma(h) = Cov(X_t, X_{t+h}) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \psi_{i+|h|}, \quad h \in \mathbb{Z}, \quad (4.7)$$

γ hängt nur von Lag h ab und nicht von t .

$$\gamma(0) = Var(X_t) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2$$

Folgt

$$\rho(h) = \gamma(h)/\gamma(0) = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \psi_{i+|h|}}{\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2}, \quad h \in \mathbb{Z}.$$

Beispiel 4.10 (MA(q) Prozeß). Ein Gleitender-Durchschnittsprozess

$$X_t = \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t \quad (4.8)$$

bildet ein einfaches Beispiel von einem kausalen Prozess der Form (4.4). Es ist leicht von (4.6) abzuleiten und die Autokorrelationsfunktion wird durch

$$\rho(h) = \frac{\sum_{i=0}^{q-|h|} \theta_i \theta_{i+|h|}}{\sum_{i=0}^q \theta_i^2}, \quad |h| \in \{0, 1, \dots, q\},$$

präsentiert, wobei $\theta_0 = 1$. Für $|h| > q$ haben wir $\rho(h) = 0$ und die Autokorrelationsfunktion ist von Lag q abgeschnitten.

Beispiel 4.11 (AR(1) Prozeß). Der AR Prozess der ersten Ordnung erfüllt die Differenzgleichungen

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \forall t \quad (4.9)$$

dieser Prozess ist kausal nur wenn $|\phi| < 1$, durch Iterierung der Gleichung (4.9) ist

$$X_t = \phi(\phi X_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_{t-2} = \phi^{k+1} X_{t-k-1} + \sum_{i=0}^k \phi^i \varepsilon_{t-i}.$$

Nach der Bedingung $|\phi| < 1$ verschwindet der erste Term für $k \rightarrow \infty$ und der zweite Term konvergiert. Der Prozess

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \phi^i \varepsilon_{t-i} \quad (4.10)$$

löst die Gleichung (4.9). Dies ist ein Prozess der Form (4.4) und wegen $\sum_{i=0}^{\infty} |\phi|^i = (1-|\phi|)^{-1}$, ist (4.5) erfüllt. Wir

sehen, dass der AR(1) Prozess als MA(∞) Prozess repräsentiert werden kann.

Die Autokovarianz- und Autokorrelationsfunktionen des Prozesses können aus (4.7) und (4.6) berechnet werden.

$$\gamma(h) = \frac{\phi^{|h|} \sigma_{\varepsilon}^2}{1-\phi^2}, \quad \gamma(0) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}, \quad \rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \phi^{|h|}, \quad h \in \mathbb{Z}.$$

Bemerkungen über die allgemeine ARMA Theorie.

Im Fall des allgemeinen ARMA Prozesses, ob dieser Prozeß eine kausale Darstellung in der Form (4.4) hat, ist durch zwei Polynome in der komplexen Ebene gelöst, die Parameter auf dem ARMA Modell wie

$$\tilde{\phi}(z) = 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p,$$

$$\tilde{\theta}(z) = 1 + \theta_1 z + \dots + \theta_q z^q.$$

gegeben. Vorausgesetzt $\tilde{\phi}(z)$ und $\tilde{\theta}(z)$ haben keine gemeinsamen Nullstellen, dann ist ARMA Prozess ein kauçaler Prozess (4.4) und (4.5) dann und nur dann, wenn $\tilde{\phi}(z)$ keine Nullstellen in dem Einheitskreis $|z| \leq 1$ hat. Die Koeffizienten ψ_i in der Darstellung (4.4) sind gegeben durch:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i z^i = \frac{\tilde{\theta}(z)}{\tilde{\phi}(z)}, \quad |z| < 1.$$

Beispiel 4.12 (ARMA(1, 1) Prozeß). Für den Prozess

$$X_t - \phi X_{t-1} = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}, \quad \forall t \in \mathbb{Z},$$

sind $\tilde{\phi}(z) = 1 - \phi z$ und $\tilde{\theta}(z) = 1 + \theta z$ und $\phi + \theta \neq 0$. Die Lösung der Gleichung $\tilde{\phi}(z) = 0$ ist $z = 1/\phi$ und dies ist auÙerhalb des Einheitskreises, Vorausgesetzt $|\phi| < 1$. Dies ist also die Voraussetzung für Kausalität (wie in den AR(1) Modell der Beispiel 4.11) erfüllt.

Die Darstellung (4.4) bekommen wir durch

$$\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i z^i = \frac{1 + \theta z}{1 - \phi z} = (1 + \theta z)(1 + \phi z + \phi^2 z^2 + \dots), \quad |z| < 1,$$

Wir berechnen leicht:

$$X_t = \varepsilon_t + (\phi + \theta) \sum_{i=1}^{\infty} \phi^{i-1} \varepsilon_{t-i}. \quad (4.11)$$

Durch Verwenden von (4.6) für $h \neq 0$ die ACF ist

$$\rho(h) = \frac{\phi^{|h|-1} (\phi + \theta)(1 + \phi\theta)}{1 + \theta^2 + 2\phi\theta}.$$

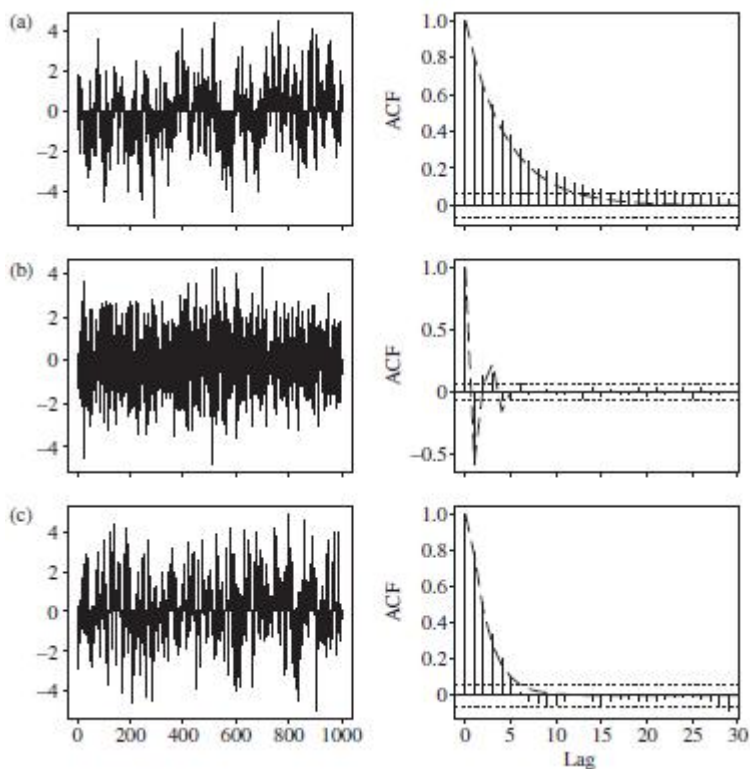


Abbildung 4.1. Eine Reihe von den simulierten ARMA Prozessen mit ihren Autokorrelationsfunktionen (gestrichelt) und Korrelogrammen. Innovationen sind Gauss. a) AR(1), $\phi = 0.8$. b) MA(4), $\phi = -0.8, 0.4, 0.2, -0.3$. (c) ARMA(1, 1), $\phi = 0.6, \theta = 0.5$.

Invertierbarkeit.

Gleichung (4.11) zeigt, dass der ARMA(1, 1) Prozeß als ein $MA(\infty)$ Prozeß gedacht werden kann. Wenn wir die Bedingung $|\theta| < 1$ erzwingen, können wir auch (X_t) als $AR(\infty)$ Prozess

$$X_t = \varepsilon_t + (\phi + \theta) \sum_{i=1}^{\infty} (-\theta)^{i-1} X_{t-i}. \tag{4.12}$$

bekommen. Die Bedingung $|\theta| < 1$ heißt Invertierbarkeitsbedingung, für den allgemeinen ARMA(p,q) Prozess ist die Invertierbarkeitsbedingung $\tilde{\theta}(z)$ keine Wurzeln in den Einheitskreis $|z| \leq 1$.

Modelle für den bedingten Erwartungswert.

Betrachten wir einen allgemeinen invertierbaren ARMA Modell mit Mittelwert größer 0. wir schreiben solches Modell als

$$X_t = \mu_t + \varepsilon_t, \quad \mu_t = \mu + \sum_{i=1}^p \phi_i (X_{t-1} - \mu) + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j}. \tag{4.13}$$

ARIMA Modelle.

∇ ist ein Differenz-Operator. Für eine Zeitreihe $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ haben wir $\nabla Y_t = Y_t - Y_{t-1}$. Wiederholte Differenz wird

mit ∇^d bezeichnet, wo

$$\begin{aligned}\nabla^d Y_t &= \nabla Y_t, & d=1, \\ \nabla^{d-1}(\nabla Y_t) &= \nabla^{d-1}(Y_t - Y_{t-1}), & d > 1.\end{aligned}\quad (4.14)$$

Die Zeitreihe (Y_t) ist ein $ARIMA(p, d, q)$ Prozess, wenn die Differenz-Reihe (X_t) mit $X_t = \nabla^d Y_t$ ein $ARMA(p, q)$ Prozess ist.

4.2.3 Analyse im Zeitbereich

Seien X_1, \dots, X_n eine diskrete Stichprobe aus einer Kovarianz-stationäre Zeitreihen Modell $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$.

Korrelogramm.

Die Stichprobenautokovarianz berechnet nach

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-h} (X_{t+h} - \bar{X})(X_t - \bar{X}), \quad 0 \leq h < n,$$

wobei $\bar{X} = \sum_{t=1}^n X_t / n$ der Mittelwert der Stichprobe ist, welcher μ schätzt, der Erwartungswert der Zeitreihe. Aus

diesen berechnen wir die Stichprobe ACF:

$$\hat{\rho}(h) = \hat{\gamma}(h) / \hat{\gamma}(0), \quad 0 \leq h < n.$$

Das Korrelogramm von den Plot $\{(h, \hat{\rho}(h)) : h = 0, 1, 2, \dots\}$ ist eine graphische Darstellung der Stichprobe ACF.

Satz 4.13. Sei $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ein linearer Prozess

$$X_t - \mu = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i Z_{t-i}, \quad \text{wobei} \quad \sum_{i=0}^{\infty} |\psi_i| < \infty, \quad (Z_t)_{t \in \mathbb{Z}} \sim SWN(0, \sigma_Z^2).$$

Nehmen wir an, entweder $E(Z_t^4) < \infty$ oder $\sum_{i=0}^{\infty} i \psi_i^2 < \infty$, dann gilt für $h \in \{1, 2, \dots\}$,

$$\sqrt{n}(\hat{\rho}(h) - \rho(h)) \xrightarrow{d} N_h(0, W),$$

Wobei

$$\hat{\rho}(h) = (\hat{\rho}(1), \dots, \hat{\rho}(h))', \quad \rho(h) = (\rho(1), \dots, \rho(h))',$$

und W hat Elemente

$$W_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} (\rho(k+i) + \rho(k-i) - 2\rho(i)\rho(k))(\rho(k+j) + \rho(k-j) - 2\rho(j)\rho(k)).$$

4.2.4 Statistische Analyse von Zeitreihen

In der Praxis, die statistische Analyse von Zeitreihen Daten X_1, \dots, X_n hat folgende Phasen.

1. Vorbereitende Analyse.
2. Analyse im Zeitbereich.
3. Modellanpassung.

4. Residuum-Analyse und Modell Vergleich

4.2.5 Prognose

Beispiel 4.14 (Prognose für ARMA(1, 1) Modell). Angenommen, ein ARMA(1, 1) Modell der Form (4.13) und seine Parameter μ, ϕ, θ festgesetzt. Unsere Schritt für Schritt Vorhersage für X_{t+1} ist

$$E(X_{t+1} | F_t) = \mu_{t+1} = \mu + \phi(X_t - \mu) + \theta\varepsilon_t,$$

Da $E(\varepsilon_{t+1} | F_t) = 0$. Für eine Zwei-Schritt Vorhersage wir

$$\begin{aligned} E(X_{t+2} | F_t) &= E(\mu_{t+2} | F_t) = \mu + \phi(E(X_{t+1} | F_t) - \mu) \\ &= \mu + \phi^2(X_t - \mu) + \phi\theta\varepsilon_t, \end{aligned}$$

und wir haben

$$E(X_{t+h} | F_t) = \mu + \phi^h(X_t - \mu) + \phi^{h-1}\theta\varepsilon_t$$

4.3 GARCH Modelle

Die wichtigsten Modelle für tägliche Risiko-Faktor Return Reihe sind in diesem Abschnitt enthalten. Wir definieren ARCH (AutoRegressive bedingte heteroskedastische) und GARCH (allgemeinerte ARCH)-Modelle und diskutieren einige ihrer mathematischen Eigenschaften.

4.3.1 ARCH Prozesse

Definition 4.15. Sei $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}} \sim SWN(0,1)$. Der Prozeß $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ist ein ARCH(p) Prozeß, wenn er streng stationär für alle $t \in \mathbb{Z}$ ist und strikt positiver Prozess $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ die Gleichungen erfüllt

$$X_t = \sigma_t Z_t \tag{4.17}$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2 \tag{4.18}$$

Wobei $\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, p$.

$F_t = \sigma(\{X_s : s \leq t\})$ die σ -Algebra mit $(F_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ die Filtration. Klar, σ_t ist F_{t-1} -messbar. Vorausgesetzt $E(|X_t|) < \infty$, können wir ausrechnen

$$E(X_t | F_{t-1}) = E(\sigma_t Z_t | F_{t-1}) = \sigma_t E(Z_t | F_{t-1}) = \sigma_t E(Z_t) = 0 \tag{4.19}$$

Damit der ARCH Prozeß die Martingal-Differenz Eigenschaft bzgl. $(F_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ hat. Wenn der Prozess Kovarianz-stationär ist, es ist einfach ein weißes Rauschen.

Bemerkung 4.16. Ein ARCH Prozeß muss kausal sein, d.h. die Gleichungen (4.17) und (4.18) haben eine Lösung der Form $X_t = f(Z_t, Z_{t-1}, \dots)$ für eine Funktion f , so dass Z_t unabhängig von den bisherigen Prozesswerten ist.

Insbesondere, Z_t und F_{t-1} sind unabhängig. Dies steht im Gegensatz zum ARMA Modell, wo die Gleichungen

nicht-kausale Lösungen haben können.

Wenn wir annehmen, dass der Prozess ein Kovarianz-stationäres weißes Rauschen ist, dann $E(X_t^2) < \infty$ und

$$\text{Var}(X_t | F_{t-1}) = E(\sigma_t^2 Z_t^2 | F_{t-1}) = \sigma_t^2 \text{Var}(Z_t) = \sigma_t^2$$

Der ARCH Prozeß bezieht sich auf dieser Struktur: Das Modell ist AutoRegressive, da X_t hängt von X_{t-i} ab, und bedingt heteroskedastisch, da die bedingte Varianz ändern sich kontinuierlich.

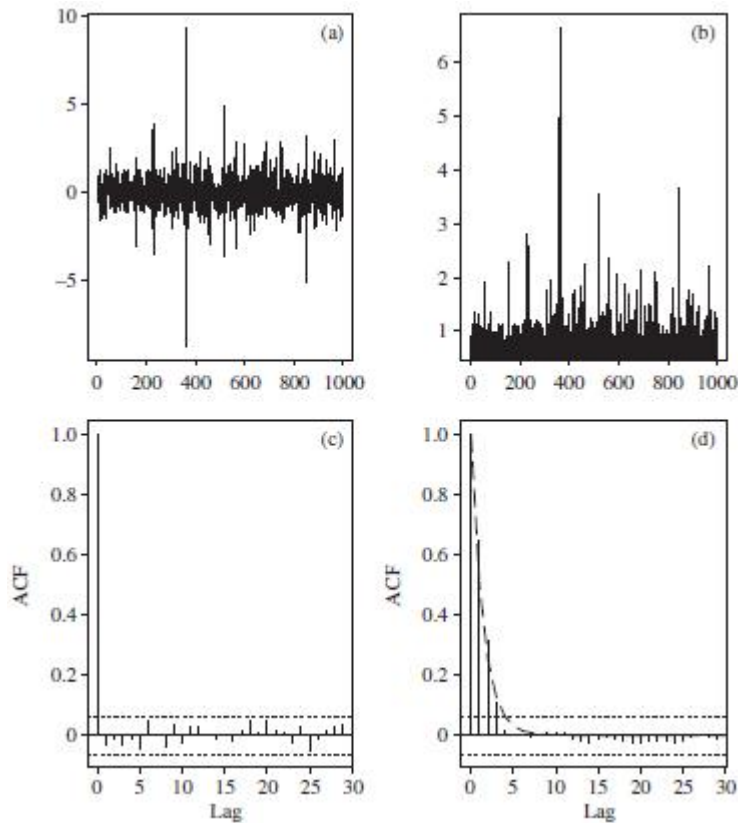


Abbildung 4.2. Einer simulierten ARCH(1) Prozeß mit Gaußsche Innovationen und Parameter $\alpha_0 = \alpha_1 = 0.5$: a) die Realisierung des Prozesses; b) die Realisierung der Volatilität; und Korrelograms c) Primär- und d) die quadrierten Werte. Der Prozess ist Kovarianz-stationär mit Unitvarianz und einem endlichen vierten Moment (da $\alpha_1 < 1/\sqrt{3}$) und die quadrierten Werte folgen aus einem AR(1) Prozess. Die wahre Gestalt der ACF der quadrierten Werte sind repräsentiert als die gestrichelten Linie im Korrelogram.

Das ARCH(1) Modell.

Benutzen $X_t^2 = \sigma_t^2 Z_t^2$ und (4.18) im Fall $p = 1$, der quadrierte ARCH(1) Prozess erfüllt

$$X_t^2 = \alpha_0 Z_t^2 + \alpha_1 Z_t^2 X_{t-1}^2 \quad (4.20)$$

Für ARCH Modelle müssen wir zwischen die Kovarianz stationäre Lösungen und die strenge stationäre Lösungen unterscheiden. Es ist möglich, das ARCH(1) Modell mit unendlicher Varianz, nicht Kovarianz-stationär ist.

Gleichung (4.20) ist ein besonderes Beispiel einer Klasse von stochastischen Rekursionsgleichungen (SRE) der Form

$$Y_t = A_t Y_{t-1} + B_t \quad (4.21)$$

Wobei $(A_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ und $(B_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ Folgen von iid Zufallsvariablen sind. Die ausreichende Bedingungen für eine Lösung

sind

$$E(\max\{0, \ln|B_t|\}) < \infty \text{ und } E(\ln|A_t|) < 0 \quad (4.22)$$

Wobei $\ln^+ x = \max(0, \ln x)$. Eine einzigartige Lösung ist

$$Y_t = B_t + \sum_{i=1}^{\infty} B_{t-i} \prod_{j=0}^{i-1} A_{t-j} \quad (4.23)$$

Wo die Summe konvergiert absolut fast sicher.

durch der Iteration der Gleichung (4.21) k Mals bekommen wir

$$\begin{aligned} Y_t &= A_t(A_{t-1}Y_{t-2} + B_{t-1}) + B_t \\ &= B_t + \sum_{i=1}^k B_{t-i} \prod_{j=0}^{i-1} A_{t-j} + Y_{t-k-1} \prod_{i=0}^k A_{t-i} \end{aligned}$$

Die Bedingungen (4.22) sichern, dass $\sum_{i=1}^k B_{t-i} \prod_{j=0}^{i-1} A_{t-j}$ absolute konvergiert und $Y_{t-k-1} \prod_{i=0}^k A_{t-i}$ verschwinden,

insbesondere gilt

$$\frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k \ln|A_{t-i}| \xrightarrow{a.s.} E(\ln|A_t|) < 0$$

Nach dem starken Gesetz der großen Zahlen. So

$$\prod_{i=0}^k |A_{t-i}| = \exp\left(\sum_{i=0}^k \ln|A_{t-i}|\right) \xrightarrow{a.s.} 0$$

zeigt die Bedingung $E(\ln|A_t|) < 0$. Die Lösung (4.23) zur SRE ist ein streng stationäres Prozess (als Funktion der

iid Variablen $(A_s, B_s)_{s \leq t}$), und die Bedingung $E(\ln|A_t|) < 0$ ist der Schlüssel für die strengen Stationarität von ARCH und GARCH Modelle.

Stationarität von ARCH(1)

Das quadrierte ARCH(1) Modell (4.20) ist ein SRE in der Form (4.21) mit $A_t = \alpha_1 Z_t^2$ und $B_t = \alpha_0 Z_t^2$. Somit gilt

die Bedingungen in (4.22) automatisch für den ARCH(1) Prozeß, wie wir definiert haben, $E(\ln^+ |\alpha_0 Z_t^2|) < \infty$ und

$E(\ln \alpha_1 Z_t^2) < 0$. Dies ist die Voraussetzungen für eine streng stationäre Lösung der ARCH(1) Gleichungen und kann

man zeigen, daß es eine notwendige und ausreichende Bedingung für eine streng Stationarität (siehe Bougerol und Picard 1992) gibt. Aus (4.23) erfolgt die Lösung von der Gleichung (4.20)

$$X_t^2 = \alpha_0 \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_1^i \prod_{j=0}^{i-1} Z_{t-j}^2 \quad (4.24)$$

Proposition 4.17. Der ARCH(1) Prozess ist ein Kovarianz-stationärer weißes Rauschen Prozeß, nur wenn $\alpha_1 < 1$. Die

Varianz des Kovarianz-stationäres Prozeß ist $\alpha_0 / (1 - \alpha_1)$.

Beweis: Kovarianz-Stationarität folgt aus (4.20) und $E(Z_t^2) = 1$ dass

$$\sigma_x^2 = E(X_t^2) = \alpha_0 + \alpha_1 E(X_{t-1}^2) = \alpha_0 + \alpha_1 \sigma_x^2$$

Klar, $\sigma_x^2 = \alpha_0 / (1 - \alpha_1)$ und wir müssen $\alpha_1 < 1$ haben

Umgekehrt, wenn $\alpha_1 < 1$, dann nach der Jensen's Ungleichung,

$$E(\ln \alpha_1 Z_t^2) \leq \ln E(\alpha_1 Z_t^2) = \ln(\alpha_1) < 0$$

und wir nutzen (4.24) zu errechnen

$$E(X_t^2) = \alpha_0 \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_1^i = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}$$

Der Prozeß $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ist eine Martingal-Differenz mit einem endlichen, nicht-Zeit-abhängigen zweiten Moment. Es ist daher ein weißes Rauschen Prozess..

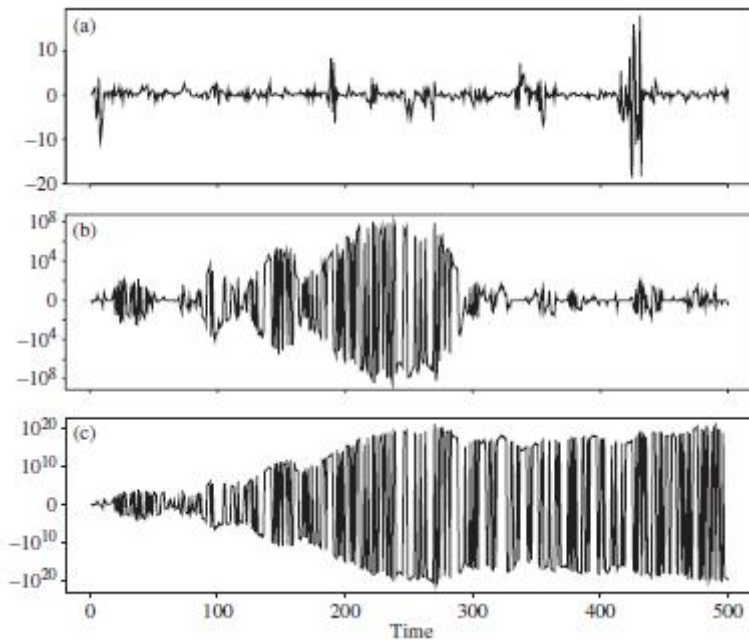


Abbildung 4.3. (a), (b) streng stationäre ARCH(1) Modelle mit Gauss Innovationen, die nicht Kovarianz stationär sind ($\alpha_1 = 1.2$ und $\alpha_1 = 3$). (c) ein nicht-stationäres (explosives) Prozess generiert durch die ARCH(1) Gleichungen

mit $\alpha_1 = 4$. (b) und (c) verwenden eine spezielle doppel-Logarithmische y-Achse, in der alle Werte kleiner als eins von Modulus bei Null geplottet.

Abbildung 4.3 Beispiele (a), (b) von nicht-Kovarianz-stationäre ARCH(1) Modellen sowie Beispiel (c) für eine nicht-stationäres (explosives) Prozess durch die ARCH(1) Gleichungen generiert. Der Prozess in Abbildung 4.2 ist Kovarianz stationär.

Proposition 4.18 . Für $m \geq 1$, der streng stationäres ARCH(1) Prozess hat endlichen Momente der Ordnung $2m$ nur wenn $E(Z_t^{2m}) < \infty$ und $\alpha_1 < (E(Z_t^{2m}))^{-1/m}$.

Beweis: Wir umschreiben (4.24) in der Form $X_t^2 = Z_t^2 \sum_{i=0}^{\infty} Y_{t,i}$ für positive Zufallsvariablen

$Y_{t,i} = \alpha_0 \alpha_1^i \prod_{j=1}^i Z_{t-j}^2, i \geq 1$ und $Y_{t,0} = \alpha_0$. Für $m \geq 1$ erhalten wir die folgende Ungleichungen (wobei Letztere

Minkowski's Ungleichheit):

$$E(Y_{t,1}^m) + E(Y_{t,2}^m) \leq E((Y_{t,1} + Y_{t,2})^m) \leq ((E(Y_{t,1}^m))^{1/m} + (E(Y_{t,2}^m))^{1/m})^m$$

Da

$$E(X_t^{2m}) = E(Z_t^{2m}) E\left(\sum_{i=0}^{\infty} Y_{t,i}^m\right)$$

Daraus folgt, dass

$$E(Z_t^{2m}) \sum_{i=0}^{\infty} E(Y_{t,i}^m) \leq E(X_t^{2m}) \leq E(Z_t^{2m}) \left(\sum_{i=0}^{\infty} (E(Y_{t,i}^m))^{1/m}\right)^m$$

Wegen $E(Y_{t,i}^m) = \alpha_0^m \alpha_1^{im} (E(Z_t^{2m}))^i$, folgt, daß alle drei Mengen endlich sind nur wenn $E(Z_t^{2m}) < \infty$ und $\alpha_1^m E(Z_t^{2m}) < 1$.

Parallelen zu dem AR(1) Prozess.

Wir beobachten die Abhängigkeitsstruktur der quadrierten Reihe im Fall der Kovarianz-Stationarität ($\alpha_1 < 1$). schreiben wir den quadriertes Prozess als

$$X_t^2 = \sigma_t^2 Z_t^2 = \sigma_t^2 + \sigma_t^2 (Z_t^2 - 1) \quad (4.25)$$

Stellen wir $V_t = \sigma_t^2 (Z_t^2 - 1)$ fest, so dass $(V_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ Martingale Differenz Reihe bildet, da $E|V_t| < \infty$ und $E(V_t | F_{t-1}) = \sigma_t^2 E(Z_t^2 - 1) = 0$. Jetzt umschreiben wir (4.25) wie $X_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + V_t$, und dieser sehr ähnlich wie einem AR(1) Prozeß für X_t^2 ist, außer ist V_t nicht unbedingt ein weißes Rauschen Prozess. Wenn wir der Prozess beschränken, bei denen $E(X_t^4)$ ist endlichen, dann hat V_t einen endlichen und konstanten zweiten Moment und ist ein weißes Rauschen Prozess. Unter dieser Annahme, X_t^2 ein AR(1) Nach der Definition 4.7 der Form

$$\left(X_t^2 - \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}\right) = \alpha_1 \left(X_{t-1}^2 - \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}\right) + V_t$$

Es hat Mittelwert $\alpha_0/(1-\alpha_1)$ und wir können Beispiel 4.11 zu schließen, daß die Autokorrelationsfunktion ist $\rho(h) = \alpha_1^{|h|}$, $h \in \mathbb{Z}$, Abbildung 4.2 zeigt ein Beispiel eines ARCH(1) Prozeß mit endlichen vierten Moment, deren quadrierten Werte folgen von einem AR(1) Prozess.

4.3.2 GARCH Prozesse

Definition 4.19 . Sei $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}} \sim SWN(0,1)$. Der Prozeß $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ist ein GARCH(p, q) Prozeß, wenn es streng stationären für alle $t \in \mathbb{Z}$ ist und und strikt positiver Prozess $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ die Gleichungen erfüllt

$$X_t = \sigma_t Z_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2. \quad (4.26)$$

wobei $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, p$, $\beta_j \geq 0 \quad \forall j$

Die GARCH Prozesse sind eine Verallgemeinerung von ARCH Prozesse, so daß die quadrierte Volatilität σ_t^2 von vorherigen quadrierten Volatilitäten abhängt, sowie frühere quadrierte Werte des Prozesses.

Das GARCH(1, 1) Modell.

In der Praxis sind GARCH Modelle niedriger Ordnung am meisten verwendet und wir konzentrieren uns auf den GARCH(1, 1) Modell. Dieses Modell tendiert dazu, persistente Perioden mit der hohen Volatilität zu haben. Eine simulierten Realisierung eines GARCH(1, 1) Prozeßes mit Gaußsche Innovationen und die Volatilität ist in der Abbildung 4.4 gezeigt, im Vergleich zu dem ARCH(1) Modell in der Abbildung 4.2 ist klar, dass die Volatilität mehr persistent auf höheren Ebenen vor verfallende zu einem niedrigeren Ebenen.

Stationarität

Es folgt aus (4.26) für einen GARCH(1, 1) Modell

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 Z_{t-1}^2 + \beta) \sigma_{t-1}^2 \quad (4.27)$$

Das ist wieder eine SRE in der Form $Y_t = A_t Y_{t-1} + B_t$

für $Y_t = \sigma_t^2$ anstatt X_t^2 , die Bedingung $E(\ln(\alpha_1 Z_t^2 + \beta)) < 0$ für (4.27) und die Lösung aus (4.23) ist

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_0 \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^i (\alpha_1 Z_{t-j}^2 + \beta) \quad (4.28)$$

Wenn $(\sigma_t^2)_{t \in \mathbb{Z}}$ ein streng stationäres Prozess ist, dann ist $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ wegen $X_t = \sigma_t Z_t$ und $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ einfach strenge weißes Rauschen. Die Lösung der GARCH(1, 1) ist dann

$$X_t = Z_t \sqrt{\alpha_0 \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^i (\alpha_1 Z_{t-j}^2 + \beta)\right)} \quad (4.29)$$

und wir können dies nutzen, um die Voraussetzung für Kovarianz stationarität herzuleiten.

Proposition 4.20 . Der GARCH(1, 1) Prozeß ist ein Kovarianz-stationäre weißes Rauschen Prozeß nur wenn $\alpha_1 + \beta < 1$. Die Varianz des Kovarianz-stationären Prozeßes ist gegeben durch $\alpha_0 / (1 - \alpha_1 - \beta)$.

Beweis: Wir verwenden ein ähnliches Argument zu proposition 4.18 und zu nutzen (4.29).

Parallelen zu den ARMA(1, 1) Prozess.

Mit der gleichen Darstellung wie in (4.25), der Kovarianz-stationäre GARCH (1, 1) Prozeß können wie

$$X_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 + V_t$$

Geschrieben wird, wobei V_t ein Martingale Differenz ist, und $V_t = \sigma_t^2 (Z_t^2 - 1)$. Weil $\sigma_{t-1}^2 = X_{t-1}^2 - V_{t-1}$ können

wir schreiben

$$X_t^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta)X_{t-1}^2 - \beta V_{t-1} + V_t \quad (4.30)$$

Die Gleichung (4.30) ist ähnlich wie ein ARMA(1, 1) Prozeß für X_t^2 . Wenn wir annehmen, dass $E(X_t^4) < \infty$, dann

nach dem Hinweis $\alpha_1 + \beta < 1$, wir haben

$$\left(X_t^2 - \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \beta}\right) = (\alpha_1 + \beta)\left(X_{t-1}^2 - \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \beta}\right) - \beta V_{t-1} + V_t$$

ist ein ARMA(1, 1) Prozess. Abbildung 4.4 zeigt ein Beispiel für einen GARCH(1, 1) Prozeß mit endlichen vierten Moment, deren quadrierte Werte einem ARMA(1, 1) Prozess folgen.

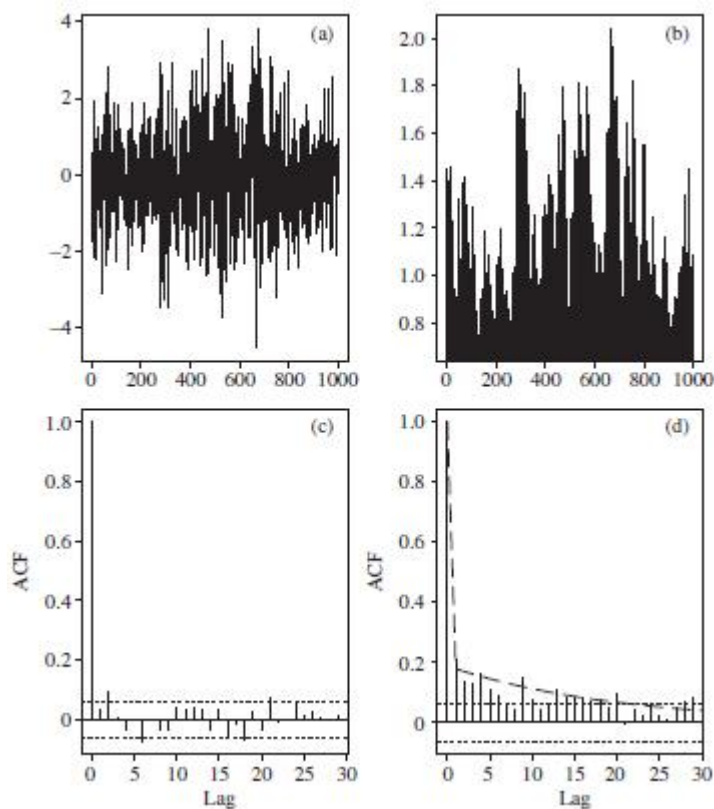


Abbildung 4.4. Ein GARCH(1, 1) Prozeß mit Gaußschen Innovationen und Parameter $\alpha_0 = 0.5$, $\alpha_1 = 0.1$, $\beta = 0.85$:

a) die Realisierung des Prozesses; b) die Realisierung der Volatilität; und Korrelograms c) primär- und d) die quadrierte Werte. Der Prozess ist Kovarianz-stationär mit Einheit Varianz und einen endlichen vierten Moment und die quadrierte Werte folgen von einem ARMA(1, 1) Prozess. Die wahre Gestalt der ACF der quadrierten Werte wird durch eine gestrichelte Linie im Korrelogramm gezeigt.

Das GARCH(p, q) Modell.

Die ARCH und GARCH Modelle höherer Ordnung haben das gleichen Verhalten wie ARCH(1) und GARCH(1, 1), aber deren mathematische Analyse mehr schwierig sind. Die notwendige und ausreichende Bedingung, somit diese

Lösung Kovarianz stationäre ist, ist $\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1$.

Ein quadrierter GARCH(p, q) Prozeß hat die Struktur

$$X_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{\max(p,q)} (\alpha_i + \beta_i) X_{t-i}^2 - \sum_{j=1}^q \beta_j V_{t-j} + V_t$$

Wobei $\alpha_i = 0$ für $i = p+1, \dots, q$ falls $q > p$ oder $\beta_j = 0$ für $j = q+1, \dots, p$ falls $p > q$. Dies ist ähnlich wie das ARMA(max(p, q), q) Prozeß und formal wird ein solcher Prozess mit $EX_t^4 < \infty$ vorgesehen.

Integrierte GARCH.

Betrachten wir die geschätzte Koeffizienten $(\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q)$, die wir durch Anwendungen der GARCH Modellierung der täglichen oder höher-Frequenz Risiko-Faktor Return Reihen bekommen haben. Die Summe von der

Koeffizienten ist knapp zu eins, manchmal größer als eins. Für $\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j \geq 1$ hat der Prozess unendlich Varianz

und ist somit nicht kovarianz- stationär. Der spezielle Fall, wo $\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j = 1$ ist bekannt als IGARCH.

4.3.3 Einfache Erweiterungen der GARCH Modell

ARMA Modelle mit GARCH Fehler.

Definition 4.21 Sei $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}} \sim SWN(0,1)$. Der Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ist ein ARMA(p_1, q_1) Prozeß mit GARCH(p_2, q_2) Fehler, wenn es Kovarianz-stationär ist und die Differenz Gleichungen der Form erfüllt

$$X_t = \mu_t + \sigma_t Z_t$$

$$\mu_t = \mu + \sum_{i=1}^{p_1} \phi_i (X_{t-i} - \mu) + \sum_{j=1}^{q_1} \theta_j (X_{t-j} - \mu_{t-j})$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p_2} \alpha_i (X_{t-i} - \mu_{t-i})^2 + \sum_{j=1}^{q_2} \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

Wobei $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, p_2$, $\beta_j \geq 0$, $j = 1, \dots, q_2$, und $\sum_{i=1}^{p_2} \alpha_i + \sum_{j=1}^{q_2} \beta_j < 1$.

GARCH mit Leverage.

Eine Methode für das Hinzufügen eines Leverage-Effectes zu einem GARCH(1, 1) Modell ist durch die Einführung eines zusätzlichen Parameters in der Volatilität Gleichung (4.26)

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 (X_{t-1} + \delta |X_{t-1}|)^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \quad (4.31)$$

Angenommen $\delta \in [-1, 1]$ und $\alpha_1 \geq 0$ wie im GARCH(1, 1) Modell, so dass (4.31)

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 (1 + \delta)^2 X_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2, \quad X_{t-1} \geq 0,$$

$$\alpha_0 + \alpha_1 (1 - \delta)^2 X_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2, \quad X_{t-1} < 0,$$

und deshalb

$$\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial X_{t-1}^2} = \alpha_1(1+\delta)^2 \sigma_{t-1}^2, \quad X_{t-1} \geq 0,$$

$$\alpha_1(1-\delta)^2 \sigma_{t-1}^2, \quad X_{t-1} < 0.$$

Threshold GARCH.

(4.31) kann leicht umgeschrieben wird

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \tilde{\alpha}_1 X_{t-1}^2 + \tilde{\delta} I_{\{X_{t-1} < 0\}} X_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \quad (4.32)$$

Wobei $\tilde{\alpha}_1 = \alpha_1(1+\delta)^2$ und $\tilde{\delta} = -4\delta\alpha_1$. Die Gleichung (4.32) ist einer allgemeiner Schwelle GARCH(oder TGARCH) Modell.

In einer weniger gebräuchlichen Variante der TGARCH Modell hängen die Koeffizienten von der Zeichen der vorherigen Werte des Prozesses, ein erster Ordnung Prozess ist in der Form

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 + \delta I_{\{X_{t-1} < 0\}} \sigma_{t-1}^2 \quad (4.33)$$

4.3.4 GARCH Modelle zur Datenanpassung

1. Konstruktion mit Likelihood.
2. Abgeleitende Parameter Schätzungen.
3. Modell Prüfung.

Beispiel 4.22 (GARCH Modell für Microsoft Log>Returns). Wir betrachten die Microsoft täglich Log>Returns für den Zeitraum 1997-2000 (1009 Werte) wie in der Abbildung 4.5. Obwohl die Primären Returns keinen Anzeichen von der Korrelation (siehe Abbildung 4.6) zeigen, ihre absolute Werte zeigen Korrelation und sie erreicht keinen Ljung-Box Test (basiert auf den ersten 10 geschätzten Korrelationen) auf den 5% Level.

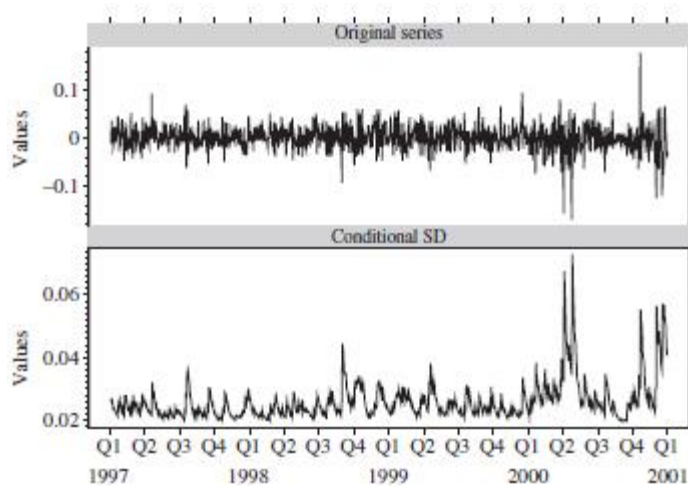


Abbildung 4.5. Microsoft Log>Returns 1997-2000, die Daten und Schätzung der Volatilität aus einem GARCH(1, 1) Modell mit einem Leverage Term.

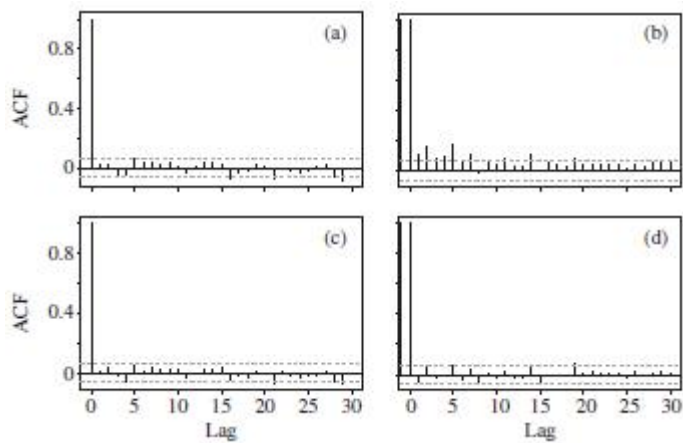


Abbildung 4.6 . Microsoft Log>Returns 1997-2000, Korrelograms von Daten ((a) primäre- und b) absolute Werte) und Residuen ((C) primäre - und d) absolute Werte) von einem GARCH(1, 1) Modell.

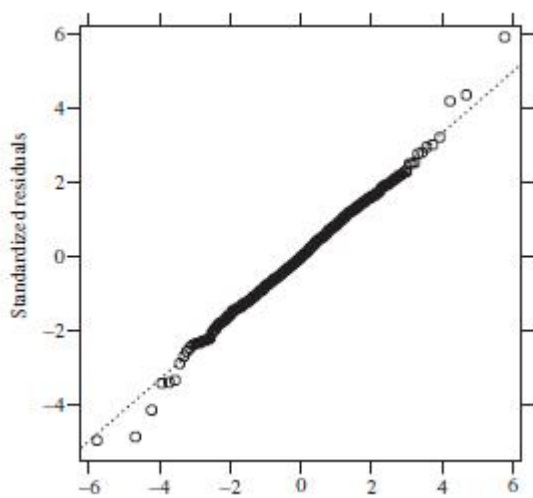


Abbildung 4.7 . Microsoft Log>Returns 1997-2000; QQplot der Residuen aus einem GARCH(1, 1) Modell mit Leverage gegen eine Student t-Verteilung mit Freiheitsgrad gleich 6.30.

Tabelle 4.1. Analyse von Microsoft Log>Returns für den Zeitraum 1997-2000, ML Schätzungen der Parameter und Standardfehlern für einen GARCH(1, 1) Modell mit einem Leverage Term unter der Annahme von t Erneuerungen.

Parameter	Estimate	Standard error	Ratio
μ	9.35×10^{-4}	7.21×10^{-4}	1.30
α_0	7.79×10^{-5}	3.07×10^{-5}	2.54
α_1	0.108	0.0369	2.91
β	0.778	0.0673	11.57
δ	-0.178	0.123	-1.45