Seminar Bewertungsmethoden in der Personenversicherungsmathematik

Bonus, das Binomial- und das Black-Scholes-Modell I

Carolin Wilms

18.05.2010

Mathematisches Institut
der
Universität zu Köln
Sommersemester 2010

Prof. Schmidli, Dr. Eisenberg

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In diesem Kapitel wollen wir einen deterministischen Zinssatz betrachten und die Möglichkeit der Investition in Aktien einführen. Dabei betrachten wir die Gesamtreserven einschließlich der Reserven für garantierte Zahlungen.

Die Gesamtreserve in Verbindung mit einem Lebensversicherungsvertrag kann unter bestimmten Bedingungen einfach rückwirkend berechnet werden. Die Bedingung ist, dass die aufgezinste Gesamtreserve, am Ende der Laufzeit, gleich der gesamten Auszahlungsrente ist. Wir betrachten die Arten von Versicherungen, bei denen der Überschuss in der technischen Reserve angesammelt ist. Die Bedingung ist hier, dass die nicht ausgeschüttete Reserve (Gesamtreserve minus technische Reserve) am Ende der Laufzeit Null ist.

Wir werden nun Investitionsmöglichkeiten in so genanntes risikobehaftetes Vermögen (Aktien) einführen und die daraus resultierenden Konsequenzen für die Gesamtreserve untersuchen.

Das kollektive Bonuspotential ist dabei die Differenz aus der Gesamtreserve und dem Maximum der technischen Reserve und der Marktreserve für garantierte Zahlungen. Daher ist das kollektive Bonuspotential indirekt festgelegt durch die Berechnung der technischen Reserve.

Der Zweck dieses Kapitels ist eine theoretisch begründete Methode zur Bewertung von Bonusverpflichtungen unter Investitionen in Aktien zu entwickeln. Hierzu gibt es zwei klassische Aktienpreismodelle, das Binomial- und das Black-Scholes-Modell.
Das Binomialmodell ist das einfachste nicht-triviale Aktienmodell. Die Preissetzung im Binomialmodell ist nicht mehr als die Lösung zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten. Dies liefert einen einfachen Rahmen für die Diskussion von verschiedenen Problemen, die bei der Marktbewertung von Versicherungsverbindlichkeiten entstehen.

2 Das zeitdiskrete Versicherungsmodell

Wir wollen nun zeitdiskrete Versicherungsmodelle und die verschiedenen Bedingungen an die Bewertung dieser Modelle betrachten.
Dieses Modell ist sehr einfach aber nicht sehr realistisch, dennoch zeigt es viele Probleme auf, die auftreten wenn man Versicherungsansprüche mit sogenannten Arbitragemöglichkeiten bewerten will.
Eine Arbitragemöglichkeit ist gegeben, wenn eine Möglichkeit existiert durch taktische Investitionen risikolose Erträge zu erwirtschaften.

2.1 Das n-Perioden-Modell

Wir wollen jetzt mit einem relativ komplizierten Beispiel des Binomialmodells beginnen. Der Versicherungsvertrag, den wir betrachten wollen, tritt auf als ein reines Finanzprodukt in diskreter Zeit. Er kann auch auftreten im sogenannten Binomialmarkt, der später noch näher beschrieben wird.
Die Auszahlungssumme zum Zeitpunkt n wird jährlich bezahlt mit einer Prämienzahlung π. Eine Periode entspricht hier einem Jahr. Es können aber auch andere Intervalle gewählt werden.
Die technische Reserve V^* und die Rechnungsgrundlage 2. Ordnung, bestehend aus dem Zinssatz 2. Ordnung r^δ, wird dargestellt durch:

$$\begin{aligned} V^*(t) &= (1 + r^\delta(t))V^*(t-1) + \pi \mathbb{1}_{(t<n)}, \\ V^*(0) &= \pi. \end{aligned}$$

Wir sprechen bei dem Zinssatz 2. Ordnung von einem Bonuszinssatz und der Prozess des Bonuszinssatzes $(r^\delta(t))_{t=1,\dots,n}$ wird als Bonusstrategie bezeichnet.

Die technische Reserve und die Rechnungsgrundlage 1. Ordnung, bestehend aus dem Zinssatz 1. Ordnung r^*, wird dargestellt durch:

$$\begin{aligned} V^*(t) &= (1 + r^*)V^*(t-1) + \pi \mathbb{1}_{(t<n)} + \delta(t), \\ V^*(0) &= \pi, \end{aligned}$$

mit Dividendenauszahlung $\delta(t)$:

$$\delta(t) = (r^\delta(t) - r^*)V^*(t-1),$$

so dass die Einlagen aus den beiden oberen Gleichungen übereinstimmen.

Die garantierte Summe $b(t)$ im Zeitpunkt t ist für eine gegebene technische Reserve V^*(t) festgelegt durch die Gleichung:

$$V^*(t) \quad = \quad b(t)(v^*)^{n-t} - \pi a^*_{\overline{n-t|}}.$$

Die Gesamtreserve U ist definiert als:

$$\begin{aligned} U(t) &= (1+r)U(t-1) + \pi \mathbb{1}_{(t<n)}, \\ U(0) &= \pi. \end{aligned}$$

Wir lassen r konstant als bekannte Größe zum Zeitpunkt $t-1$. Zu diesem Zeitpunkt wissen wir welche Investitionsgewinne uns im kommenden Jahr bevorstehen können. Wir setzten voraus, dass $r \geq r^*$.

Die Idee ist jetzt eine Investitition zu tätigen, indem wir einen Teil des Geldes in eine risikobehaftete Anlage investieren. Die einfachste risikobehaftete Anlage ist die, dass wir zum Zeitpunkt $t-1$ investieren und zum Zeitpunkt t zwei Werte erreichen können, die bis zum Zeitpunkt t noch nicht bekannt sind. Wir bezeichnen mit $S(t)$ den Preis der risikobehafteten Anlage zum Zeitpunkt t, gegeben durch:

$$S(t) \quad = \quad (1 + Z(t))S(t-1)$$

Dabei ist $Z(t)$ eine stochastische Variable, die den Wert u (up) annimmt mit Wahrscheinlichkeit $p(u)$ und den Wert d (down) annimmt mit Wahrscheinlichkeit $p(d)$.

Wir kaufen nun $\eta(t)$ dieser Anlagen zum Zeitpunkt $t-1$ und können nicht warten bis zum Zeitpunkt t, um den neuen Anlagepreis zu erfahren. Die Kaufentscheidung muss zum Zeitpunkt $t-1$ fallen. Dies ist die Eigenschaft *vorhersehbar*, die wir von unserer Investition verlangen.

Die Gesamtreserve U zum Zeitpunkt t ist der Wert U zum Zeitpunkt $t-1$ plus Prämien plus Kapitalgewinne. Die Kapitalgewinne beruhen auf dem Teil von U, der nicht investiert wird in die risikobehaftete Anlage zum Zeitpunkt $t-1$ $(U(t-1) - \eta(t)S(t-1))$, und dem Preisunterschied des Portfolios der risikobehafteten Anlage, der sich aus der Preisveränderung der Anlage ergibt. Daher ergibt sich folgende Gleichung

$$\begin{aligned} U(t) &= U(t-1) + r(U(t-1) - \eta(t)S(t-1)) + \eta(t)(S(t) - S(t-1)) + \pi \mathbb{1}_{(t<n)} \\ &= (1+r)U(t-1) + \eta(t)S(t-1)(Z(t) - r) + \pi \mathbb{1}_{(t<n)}, \\ U(0) &= \pi \end{aligned}$$

Die nicht entnommene Reserve X ist gegeben durch:

$$X(t) \quad = \quad U(t) - V^*(t).$$

Damit erhalten wir:

$$X(t) \quad = \quad (1+r)X(t-1) + \eta(t)S(t-1)(Z(t)-r) + c(t) - \delta(t),$$

mit

$$c(t) \quad = \quad (r(t) - r^*(t))V^*(t-1).$$

Daher ist der Wert von X zur Zeit t gleich dem Wert von X zur Zeit $t-1$ plus Kapitalgewinne plus Überschussbeitrag $c(t)$ minus Dividendenzahlung δ(t).

Wir betrachten die prospektive Größe der Gesamtreserve und der unverteilten Reserve:

$$V(t) \quad = \quad b(n)v^{n-t}\pi a_{\overline{n-t|}}.$$

Dies spiegelt die Tatsache wieder, dass die Reserve zur Seite gelegt wird, um zukünftige Verpflichtungen zu begleichen.
Sehr geeignet um die Bonusstrategie zu planen, so dass $X(n) = 0$, ist $V(t) = U(t)$. Um $X(n) = 0$ zu erfüllen kann man die rückblickenden Mengen und die Bonusstrategie vernachlässigen.
Die Einführung der risikobehafteten Investitionen machen die Situation schwieriger. Ist die Bonusstrategie verbunden mit den Gewinnen aus den risikobehafteten Investitionen, so ist $b(n)$ zum Zeitpunkt t nicht immer bekannt.

Die Wahrscheinlichkeit, dass sich eine Anlage nach oben (up) oder unten (down) entwickeln wird, ist beschrieben durch:

$$q(u) \quad = \quad \frac{r-d}{u-d}$$
$$q(d) \quad = \quad \frac{u-r}{u-d}$$

Zum Schluss werden wir noch den Marktwert für garantierte Zahlungen definieren zum Zeitpunkt t:

$$V^g(t) = b(t)v^{n-t} - \pi a_{\overline{n-t|}}.$$

Der Marktwert der ungarantierten Zahlungen ist gegeben durch:

$$V^b(t) = (\mathbb{E}_t^Q[b(n)] - b(t))v^{n-t}$$

Die Bonusstrategie muss $V(0) = \pi$ erfüllen.

2.2 Das Zwei-Perioden-Modell

Nun wollen wir Verträge über zwei Perioden betrachten und diskutieren Bonuszinsen und Investitionen.
Betrachten wir also:

$$\begin{bmatrix} S(0) \\ V^*(0) \\ U(0) \\ b(0) \\ V^g(0) \\ V^b(0) \\ V(0) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} S(1) \\ V^*(1) \\ U(1) \\ b(1) \\ V^g(1) \\ V^b(1) \\ V(1) \end{bmatrix} \rightarrow [V^*(2)] = [b(2)]$$

Wir unterstellen, dass das Unternehmen sich im Zeitpunkt 0 für einen Bonuszinssatz für das erste Jahr entscheidet, der nicht von den Kapitalgewinnen im ersten Jahr abhängt. Hier ist $r^\delta(1)$ unabhängig von $Z(1)$. Dementsprechend lassen wir den Bonuszinssatz im zweiten Jahr unabhängig von den Kapitalgewinnen im zweiten Jahr aber abhängig von den Kapitalgewinnen im ersten Jahr. Dann können wir $r^\delta(2)$ in Abhängigkeit von $Z(1)$ aber unabhängig von $Z(2)$ schreiben. Die Kosequenz daraus ist, dass $V^*(1)$ und $b(1)$ unabhängig von $Z(1)$ sind, wobei $b(2)$ unabhängig von $Z(2)$ ist.
Dies stimmt mit der Vorstellung überein, dass der Bonuszinssatz ein Zinssatz ist, der im folgenden Jahr festgesetzt wird und unabhängig von den Kapitalgewinnen in diesem Jahr aber abhängig von den Kapitalgewinnen im vorherigen Jahr ist. Daher ist der Bonuszinssatz immer „ein Jahr hinter" den Kapitalgewinnen. Aus diesem Grund brauchen wir zwei Perioden für unsere Darstellung: eine Periode um Kapitalgewinne zu erwirtschaften und eine Periode für die Umverteilung.
Wir stellen den Bonuszinssatz im zweiten Jahr in Abhängigkeit der Kapitalgewinne im ersten Jahr wie folgt dar:

$$r^\delta(2) = r^*(2) + \frac{(\beta + \alpha X(1))^+}{V^*(1)},$$

und erhalten die folgende Darstellung für die technische Reserve nach dem zweiten Jahr:

$$V^*(2) = (2 + r^\delta(1))(1 + r^\delta(2))\pi,$$

die nur von den Kapitalgewinnen des ersten Jahres abhängen.

Als einen Sonderfall können wir den Marktwert der ungarantierten Zahlungen des ersten Jahres, das sogenannte Bonuspotential, wie folgt ableiten:

$$\begin{aligned}
V^b(1) &= \frac{\mathbb{E}_1^Q[V^*(2)] - b(1)}{1+r} \\
&= \frac{(2+r^\delta(1))(1+r^\delta(2))\pi - b(1)}{1+r} \\
&= \frac{(2+r^\delta(1))(1+r^\delta(2))\pi - V^*(1)(1+r^*(2))}{1+r} \\
&= \frac{(2+r^\delta(1))(1+r^\delta(2))\pi - (2+r^\delta(1))\pi(1+r^*(2))}{1+r} \\
&= \frac{(2+r^\delta(1))(r^\delta(2) - r^*(2))}{1+r}\pi \\
&= \frac{(\beta+\alpha X(1))^+}{1+r}.
\end{aligned}$$

Wir sehen, dass diese einfache Vorstellung des Bonuszinssatzes mit dem Fall übereinstimmt, dass der Martkwert der ungarantierten Zahlungen nach dem ersten Jahr ein Teil der unverteilten Reserve ist.

Daher sind wir an einer Verbindung zwischen einer fairen Investition η und einem fairen Paar von Parametern (α, β) interessiert. Wir legen dies fest durch:

$$V(0) = \pi,$$

was ergibt, dass

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1+r)^2}\mathbb{E}^Q[V^*(2)] - \frac{\pi}{1+r} &= \pi \\
\Leftrightarrow (2+r^\delta(1))(1+E^Q[r^\delta(2)]) &= 1+r+(1+r)^2 \\
\Leftrightarrow (2+r^\delta(1))(1+q(u)r^\delta(2,u)+q(d)r^\delta(2,d)) &= (1+r)(2+r).
\end{aligned}$$

Hierbei ist $r^\delta(2,u)$ und $r^\delta(2,d)$ der Bonuszinssatz im zweiten Jahr entsprechend der Aktienwerte die im ersten Jahr rauf oder runter gegangen sind.

Wenn

$$\beta+\alpha X(1,d) \ < \ 0 \ < \ \beta+\alpha X(1,u), \tag{1}$$

dann haben wir $r^\delta(2,u) > r^* = r^\delta(2,d)$, so dass es eine Bonusauszahlung im zweiten Jahr genau dann gibt, wenn die risikobehaftete Anlage im ersten Jahr nach oben geht und weiter haben wir

$$\begin{aligned}
(2+r^\delta(1))\left(1+r^*+q(u)\left(\frac{\beta+\alpha X(1,u)}{V^*(1)}\right)\right) &= (1+r)(2+r) \\
\Leftrightarrow (2+r^\delta(1))\left(1+r^*+q(u)\frac{\beta+\alpha(r-r^\delta(1)+(\eta s/\pi)(u-r))}{(2+r^\delta(1))}\right) &= (1+r)(2+r),
\end{aligned}$$

was impliziert, dass

$$q(u)\left(\beta+\alpha\left(r-r^{\delta}(1)+\frac{\eta s}{\pi}(u-r)\right)\right)=(1+r)(2+r)-(2+r^{\delta}(1))(1+r^{*}). \qquad (2)$$

Gleichung (2) kann faire Kombinationen von drei Parametern (α, β, η) festlegen und damit lässt sich Gleichung (1) überprüfen.

Beispiel

Wir betrachten nun ein Beispiel mit $s = 1$ und $\pi = 1$. Wir setzen $\beta = 0$, so dass der Bonuszinssatz ausschließlich durch den Parameter α festgelegt ist. Der Zinssatz r ist 5%, der Bonuszinssatz im ersten Jahr ist ebenfalls 5%, während der garantierte Zinssatz 3% ist. Die risikobehaftete Anleihe kann um 20% steigen (u = 20%) oder um 10% fallen (d = -10%). Mit diesen Werten bekommt man $q(u) = q(d) = 1/2$, d.h. wir bestimmen den Marktwert unter einem Wahrscheinlichkeitsmaß wo die risikobehaftete Anlage mit Wahrscheilichkeit $1/2$ steigen oder fallen kann. Bevor wir nun α und η festlegen, können wir leicht (1) bestätigen. Da r^{δ} (1) $= r$, haben wir $c(1)$ - $\delta(1) = 0$, so dass $X(1) = \eta s(Z(t)$ - $r)$. Mit $\beta = 0$ ist Gleichung (1) offensichtlich erfüllt. Gleichung (2) gibt uns jetzt eine faire Beziehung zwischen α und η:

$$\alpha\eta = 0.55.$$

Wir sehen, dass $\alpha > 1$ ist, wenn der Anteil der risikobehafteten Anlage weniger als 55% beträgt. Ein Umverteilungsfaktor größer als eins macht Sinn, wenn es ein Bonuspotential im zweiten Jahr gibt, welches nicht umverteilt werden muss und noch nicht in $X(1)$ enthalten ist.

In Abbildung 1 finden wir alle Angaben für den Fall, dass wir 60% ($\eta = 0.6$) in die risikobehaftete Anlage investieren. Das gibt uns einen Umverteilungsparameter α von ca. 0.91. Abbildung 1 zeigt uns, wie sich die Anlage enwickelt, jenachdem ob die risikobehaftete Anlage im ersten Jahr steigt oder fällt.
Wir sehen, dass die technische Reserve nach dem ersten Jahr bei 2.05 liegt, egal wie sich die Anlage entwickelt. Im Gegensatz dazu ist die Entwicklung der technischen Reserve nach dem zweiten Jahr und damit auch die abschließende Zahlung gleich 2.19 bzw. 2.11, abhängig vom Ergebnis der Anlage. Geht die Anlage im ersten Jahr nach oben, so beträgt der Bonuszinssatz im zweiten Jahr 7%.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \begin{bmatrix} S(1) = 1.2 \\ V^*(1) = 2.05 \\ X(1) = 0.09 \\ b(1) = 2.11 \\ V^g(1) = 2.01 \\ V^b(1) = 0.08 \\ V(1) = 2.09 \end{bmatrix} & \longrightarrow & \begin{bmatrix} b(2) = 2.19 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} S(0) = 1 \\ V^*(0) = 1 \\ X(0) = 0 \\ b(0) = 2.09 \\ V^g(0) = 0.94 \\ V^b(0) = 0.06 \\ V(0) = 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \nearrow \\ \\ \searrow \end{array} & & & \\
 & & \begin{bmatrix} S(2) = 0.9 \\ V^*(2) = 2.05 \\ X(2) = -0.09 \\ b(2) = 2.11 \\ V^g(2) = 2.01 \\ V^b(2) = 0 \\ V(2) = 2.01 \end{bmatrix} & \longrightarrow & \begin{bmatrix} b(2) = 2.11 \end{bmatrix}
\end{array}$$

Abbildung 1: Zwei-Perioden-Versicherungsmodell

Geht die Anlage hingegen im ersten Jahr nach unten, so ist der Bonuszinssatz im zweiten Jahr gleich dem Zinssatz erster Ordnung (3%). Geht die Anlage im ersten Jahr nach oben, sind individuelles und Kollektivpotential nach dem ersten Jahr 0.04. Geht die Anlage nach unten gehen alle Sicherheitsmargen verloren und beide Bonuspotentiale sind Null. Der Unterschied zwischen dem Bonuspotential nach dem ersten Jahr der beiden Möglichkeiten macht den Unterschied zwischen den beiden Auszahlungsbeträgen nach zwei Jahren.

Bis jetzt haben wir nur gesehen, wie man die Werte ermittelt. Nun geben wir einen kurzen Beweis für die Werte aus dem oben gezeigten Beispiel. Der Beweis zeigt, wie es möglich ist, durch taktische Investitionen genau den Ertrag zu erhalten, der nach zwei Jahren fällig ist. Dabei werden die Beträge natürlich Reserven für zukünftige Verpflichtungen.

Wir kalkulieren die Investition, die nach dem ersten Jahr benötigt wird, für eine bestimmte Auszahlung nach dem zweiten Jahr. Dabei gibt es zwei Fälle, jenachdem ob die Anlage nach dem ersten Jahr steigt oder fällt.

Betrachten wir nun den Fall, dass die risikobehaftete Anlage nach oben geht. Jetzt kann die Anlage im zweiten Jahr entweder steigen oder fallen. Egal was im zweiten Jahr passiert, brauchen wir 2.19 nach dem zweiten Jahr. Wir bezeichnen mit $h^1(2,u)$ die Anzahl der risikobehafteten Anlagen und mit $h^0(2,u)$ die Investitionen in den risikolosen Zinssatz. Damit erhalten wir das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} h^1(2,u)\cdot 1.44 + h^0(2,u)\cdot 1.10 &= 2.19, \\ h^1(2,u)\cdot 1.08 + h^0(2,u)\cdot 1.10 &= 2.19, \end{aligned}$$

wobei 1.44 und 1.08 die Preise der risikobehafteten Anlage nach dem zweiten Jahr in Abhängigkeit von dem Ergebnis der risikobehafteten Anlage im zweiten Jahr sind und gegeben, dass die Anlage nach oben geht im ersten Jahr. Die Zahl $(1.05)^2 \approx 1.10$ ist der Wert nach zwei Jahren einer Einheit zur Zeit 0 einschließlich einem angesammelten Zinssatz in Höhe von 5%. Die Lösung ist gegeben durch

$$h^1(2,u) = 0, \qquad h^0(2,u) = 1.99,$$

und wir bemerken, dass der Wert der Investition exakt gegeben ist durch

$$1.99 \cdot 1.05 = 2.09 = V(1,u).$$

Ein entsprechendes System erhalten wir, wenn die Anlage im ersten Jahr nach unten geht:

$$\begin{aligned} h^1(2,d)\cdot 1.08 + h^0(2,d)\cdot 1.10 &= 2.11, \\ h^1(2,d)\cdot 0.81 + h^0(2,d)\cdot 1.10 &= 2.11, \end{aligned}$$

welches folgende Lösung hat:

$$h^1(2,d) = 0, \qquad h^0(2,d) = 1.92,$$

und der Preis dieser Investition ist gegeben durch

$$1.92 \cdot 1.05 = 2.01 = V(1,d).$$

Wie man erwartet, sollte man im zweiten Jahr nicht in die risikobehaftete Anlge investieren, egal wie das Ergebnis nach dem ersten Jahr ist, wenn der Bonuszinssatz im zweiten Jahr unabhängig vom Ergebnis der Anlage in diesem Jahr ist.
Jetzt wissen wir, was wir nach dem ersten Jahr machen müssen, egal welches Ergennis sich

im ersten Jahr ergibt. Die Frage ist, was soll man im Zeitpunkt 0 machen? Hier kann man wieder ein System aufstetzen, wo man versucht ein am Ende des ersten Jahres benötigtes Portfolio zu erstellen, egal, was das Ergebnis nach dem ersten Jahr ist. Wir wissen, dass wir zu den Kapitalgewinnen nach dem ersten Jahr auch eine Prämienzahlung erhalten, so dass man das folgende Gleichungssystem erhält

$$
\begin{aligned}
h^1(1) \cdot 1.20 + h^0(1) \cdot 1.05 + 1 &= 2.09, \\
h^1(1) \cdot 0.90 + h^0(1) \cdot 1.05 + 1 &= 2.01.
\end{aligned}
$$

Dieses System hat die folgende Lösung:

$$h^0(1) = 0.74, \qquad h^1(1) = 0.26,$$

und schließlich sehen wir, dass diese Investition den exakten Wert π hat:

$$0.74 \cdot 1 + 0.26 \cdot 1 = 1 = \pi.$$

Der Preis der Investition ist genau der Wert, der zur Zeit 0 als Prämie gezahlt wird und wir haben daher eine Portfoliostrategie konstruiert mit der wir unserer Verpflichtung nachkommen können ohne ein Risiko einzugehen. Das Arbitrageargument gibt an, dass der Marktwert der Verpflichtung gleich dem Preis des erreichten Portfolios ist mit dem man exakt die Verpflichtungen trifft. Daher können wir die Zahlen aus Abbildung 1 folgern.

3 Das Binomial-Modell

3.1 Das eindimensionale Modell

Wir betrachten nun die Ein-Perioden-Version des einfachst möglichen Finanzmarktes, wo die Aktie nach einer Periode einen von zwei Werten annehmen kann. Nicht, weil wir denken, dass dieser Markt besonders realistisch wäre aber es ist einfach das finanzmathematische Konzept in diesem Markt zu verstehen. Die Berechnungen werden auf zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten reduziert. Dieses Modell wird in der Praxis oft angewandt.

Das Modell beruht auf zwei Investitionsmöglichkeiten, einen Bond und eine Aktie.

Der Preis des Bond ist deterministisch und nimmt folgenden Wert an:

$$\begin{aligned} S^0(0) &= 1, \\ S^0(1) &= (1+r)\ S^0(0) = 1+r, \end{aligned}$$

wobei r ein deterministischer Zinssatz für die Zeit 0 bis 1 ist. Wir können die Investitionsmöglichkeit S^0 auch als eine Möglichkeit ansehen Geld auf einem Bankkonto mit Zinssatz r anzulegen.

Der Preis der Aktie ist ein stochastischer Prozess und nimmt den folgenden Wert an:

$$\begin{aligned} S^1(0) &= s, \\ S^1(1) &= s(1+Z), \\ Z &= \begin{cases} u & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p_u, \\ d & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p_d. \end{cases} \end{aligned}$$

Wir definieren ein(e) *Portfolio (-strategie)* als einen Vektor $h = (h^0, h^1)$, welcher die Anzahl an Bonds und Aktien im Portfolio zum Zeitpunkt 0 beschreibt. Wir erlauben auch negative Werte im Portfolio und beschreiben damit Leerverkäufe. Das heißt im Falle eines Leerverkaufs von Bonds: wir leihen Geld bei der Bank zum Zinssatz r. Im Gegensatz dazu ist es bei Leerverkäufen von Aktien so, dass man sich für eine Zahlung in 0 dazu verpflichtet den Preis der Aktie in der Zukunft zu zahlen.

In Bezug auf ein Portfolio h definieren wir den Nutzenprozess wie folgt:

$$V(t,h) = h^0 S^0(t) + h^1 S^1(t), \qquad t = 0, 1.$$

Die Idee von Arbitrage spielt eine sehr wichtige Rolle und wir definieren ein *Arbitrageportfolio* als ein Portfolio, dass die folgenden Relationen befolgt:

$$\begin{aligned} V(0,h) &= 0, \\ \mathbb{P}(V(1,h) \geq 0) &= 1, \\ \mathbb{P}(V(1,h) > 0) &> 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Daher ist ein Arbitrageportfolio ein Portfolio, dass zum Zeitpunkt 0 einen Nullwert hat und im Zeitpunkt 1 einen nicht-negativen Wert hat mit der Möglichkeit positiv zu sein. Es ist hier wichtig hervorzuheben, dass wir normalerweise vom Markt erforden, dass keine Arbitrageportfolios existieren. Wir sprechen dann von arbitragefreien Märkten. Daher kann man für einen gegebenen Markt die Frage stellen, ob dieser Markt arbitragefrei ist.

Man kann leicht sehen, dass der Binomialmarkt arbitragefrei ist, wenn

$$d < r < u.$$

Die Lösung (q(u),q(d)) des folgenden Gleichungssystems

$$\begin{aligned} q(u) \cdot u + q(d) \cdot d &= r, && (4) \\ q(u) + q(d) &= 1, && (5) \end{aligned}$$

ist

$$\begin{aligned} q(u) &= \frac{r-d}{u-d}, && (6) \\ q(d) &= \frac{u-r}{u-d}. \end{aligned}$$

In dem Fall, dass die Ungleichheiten $d < r < u$ gelten, versichern $q(u)$, $q(d) > 0$ und die Bedingung $q(u)+q(d) = 1$ in Gleichung (5), dass wir $q(u)$ und $q(d)$ als Wahrscheinlichkeiten unter einem Maß Q betrachten können. Für dieses Maß gilt entsprechend Gleichung (4):

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+r}\mathbb{E}^Q[S^1(1)] &= \frac{1}{1+r}(q(u) \cdot s(1+u) + q(d) \cdot s(1+d)) \\ &= s\frac{1 + q(u)\ u + q(u)\ d}{1+r} \\ &= s. \end{aligned}$$

Wir sehen, dass die Erwartung an den diskontierten Aktienwert zum Zeitpunkt 1 gleich dem Aktienpreis zur Zeit 0 ist. Ein Wahrscheinlichkeitsmaß unter dem dies der Fall ist, wird *Martingalmaß* (oder *risikoneutrales Maß* oder *risikobereinigtes Maß*) genannt.
Aus der obigen Argumentation können wir folgern, dass ein Binomialmodell (S^0, S^1) genau dann arbitragefrei ist, wenn ein Martingalmaß existiert.

Wir nehmen an, dass der Markt arbitragefrei ist, d.h. $d < r < u$, und wir untersuchen das Bewertungsproblem sogenannter *bedingter Ansprüche*.
Der *bedingte Anspruch* ist eine stochastische Variable der Form $X = \Phi(Z)$. Sie ist stochastisch, da Z eine stochastische Variable ist. Äquivalent ist sie ausschließlich festgelegt durch das Ergebnis von $S^1(1)$. Die Funktion Φ wird *Vertragsfunktion* genannt.

Ein typisches Beispiel für einen bedingten Anspruch ist die europäische Call-Option auf eine Aktie mit Basispreis K. Eine europäische Call-Option gibt das Recht, nicht aber die

Pflicht, eine Aktie zum Zeitpunkt 1 zum Preis K zu kaufen. In unserem Modell ist dieser Vertrag nur interessant, wenn $s \cdot (1+d) < K < s \cdot (1+u)$. Ist $S^1(1) > K$ wird die Option ausgeübt und der Besitzer zahlt K für die Aktie und verkauft diese für $s \cdot (1+u)$ am Markt. Er erwirtschaftet einen Ertrag in Höhe von $s \cdot (1+u) - K$. Ist $S^1(1) < K$, so gibt der Besitzer die Option auf mit einem Ertrag von 0, d.h.

$$X = \Phi(Z) = (s \cdot (1+Z) - K)^+ = \begin{cases} s \cdot (1+u) - K, & Z = u, \\ 0, & Z = d. \end{cases} \tag{7}$$

Es ist ein Problem einen fairen Preis für diesen Vertrag zu finden, falls dieser überhaupt existiert. Der Preis zum Zeitpunkt t wird bezeichnet mit $\Pi(t, X)$ und wir sehen leicht, dass $\Pi(1, X) = X$, um Arbitrage zu vermeiden. Das Problem ist daher $\Pi(0, X)$ zu finden.

Ein bedingter Anspruch wird *absicherbar* genannt, wenn ein Portfolio h existiert, so dass

$$V(1, h) = X. \tag{8}$$

In disesm Fall wird h auch *Hedging* oder *Duplikationsportfolio* genannt. Sind alle bedingten Ansprüche erzielbar, ist der Markt *vollständig*. Ist ein Anspruch erzielbar mit einem Duplikationsportfolio h, gibt es in der Realität keinen Unterschied zwischen dem Halten des Anspruchs und dem Halten des Duplikationsportfolio. Dann ist es einfach zu sehen, dass der Preis des Anspruchs zur Zeit 0 gleich dem Preis des Duplikationsportfolio zum Zeitpunkt 0 sein muss, um Arbitragemöglichkeiten am Markt zu vermeiden. D.h.

$$\Pi(0, h) = V(0, h).$$

Ist der Markt vollständig, können alle Ansprüche gepreist werden durch festlegen des Preises des Duplikationsportfolio. Die Frage ist nun, ob der einperiodige Binomialmarkt vollständig ist.

Gemäß Gleichung (8) wissen wir, dass für ein Portfolio, dass X dupliziert gilt:

$$\begin{aligned} h^0 \cdot (1+r) + h^1 \cdot s(1+u) &= \Phi(u), \\ h^0 \cdot (1+r) + h^1 \cdot s(1+d) &= \Phi(d). \end{aligned} \tag{9}$$

Dies ist ein System von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten (h^0, h^1), mit Lösung

$$\begin{aligned} h^1 &= \frac{\Phi(u) - \Phi(d)}{s(u-d)}, \\ h^0 &= \frac{1}{1+r} \frac{(1+u) \cdot \Phi(d) - (1+d) \cdot \Phi(u)}{u-d}, \end{aligned} \tag{10}$$

unter der Bedingung, dass $d < r < u$.

Wir können jetzt den Preis $\Pi(0, X) = V(0, h)$ bestimmen durch:

$$
\begin{aligned}
V(0,h) &= h^0 + h^1 \cdot s \\
&= \frac{1}{1+r}\frac{(1+u)\cdot\Phi(d) - (1+d)\cdot\Phi(u)}{u-d} + \frac{\Phi(u) - \Phi(d)}{(u-d)} \\
&= \frac{1}{1+r}\frac{(1+u)\cdot\Phi(d) - (1+d)\cdot\Phi(u) + (1+r)\cdot\Phi(u) - (1+r)\cdot\Phi(d)}{u-d} \\
&= \frac{1}{1+r}(q(u)\cdot\Phi(u) + q(d)\cdot\Phi(d)). \qquad (11)
\end{aligned}
$$

wobei $q(u)$ und $q(d)$ durch Gleichung (6) gegeben sind. Wir folgern, dass das einperiodige Binomialmodell vollständig ist und das $X = \Phi(\mathrm{Z})$ zum Zeitpunkt 0 einen Preis hat, gegeben durch Gleichung (11) mit $(q(u), q(d))$ gegeben durch Gleichung (6). Wir sehen, dass der Preis des bedingten Anspruchs X kalkuliert werden kann durch die sogenannte risikoneutrale Formel:

$$\Pi(0, X) = \frac{1}{1+r}\mathbb{E}^Q[X],$$

wobei Q, gegeben durch die Wahrscheinlichkeiten $(q(u), q(d))$, das einzige Wahrscheinlichkeitsmaß ist unter dem der Preis der risikobehafteten Anlage durch die risikoneutrale Formel kalkuliert werden kann.

Es mag überraschen, dass die Wahrscheinlichkeiten $p(u)$ und $p(d)$ keine wichtige Rolle in der Preisermittlungsformel haben. Wenn wir eine Option halten, ist der erwartete Gewinn abhängig vom objektiven Wahrscheinlichkeitsmaß. Andererseits geben wir durch den Kauf einer Option die Möglichkeit auf, den Wert der Option auf dem gleichen Markt mit entsprechenden objektiven Preisänderungen zu investieren.

Beispiel

Wir beenden diesen Abschnitt mit einem Beispiel in dem wir eine europäische Option (Gleichung (7)) mit den Parametern $r = 5\%$, $u = 20\%$, $d =$ -10%, $K = 110$, $p(u) = 0.6$, $p(d) = 0.4$ betrachten.

Die erste Idee könnte sein, den erwarteten gegenwärtigen Wert unter dem objektiven Maß zu erhalten

$$\frac{1}{1.05}\mathbb{E}^P[\Phi(Z)] \;=\; \frac{1}{1.05}(10\cdot p(u) + 0\cdot p(d)) \;=\; 5.71.$$

Man kann den Preis auch anhand von Varianz oder Standardabweichung bewerten. Diese unterschiedlichen Auswirkungen kann man in Abbildung 2 ablesen.

$$\begin{bmatrix} S^0(0) = 1 \\ S^1(0) = 100 \\ \Pi(0) = 4.76 \\ h^0 = -28.57 \\ h^1 = 0.33 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \nearrow \\ \\ \searrow \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} S^0(1) = 1.05 \\ S^1(1) = 120 \\ \Pi(1) = 10 \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} S^0(1) = 1.05 \\ S^1(1) = 90 \\ \Pi(1) = 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Abbildung 2: Ein-Perioden-Modell

Abbildung 2 zeigt wie risikolose Anlage, risikobehaftete Anlage und Option vom Ergebnis der stochastischen Variable Z abhängen. Zuerst schreiben wir S^0 und S^1 für die Zeiten 0 und 1. Danach berechnen wir den Preis der Option zum Zeitpunkt 1, der gegeben ist durch (7). Zuletzt berechnen wir $\Pi(0)$ und h aus den Gleichungen (11) und (10). Daraus ergibt sich für dieses Beispiel:

$$\begin{aligned}
\Pi(0) &= \frac{1}{1.05}\mathbb{E}^Q[\Phi(Z)] \\
&= \frac{1}{1.05}(q(u)\Phi(u) + q(d)\Phi(d)) \\
&= \frac{1}{1.05}\left(\frac{0.05-(-0.1))}{0.2-(-0.1)}10 + \frac{0.2-0.05}{0.2-(-0.1)}0\right) = 4.76; \\
h^1 &= \frac{10-0}{100(0.2-(-0.1))} = 0.33; \\
h^0 &= \frac{1}{1.05}\frac{1.2\cdot 0 - 0.9\cdot 10}{0.2-(-0.1)} = -28.57.
\end{aligned}$$

Wir können damit zeigen, dass der Preis des Portfolios h gegeben ist durch:

$$V(0,h) = -28.57 + 0.33 \cdot 100 = 4.76,$$

wodurch das Portfolio den Wert

$$V(1,h) = \begin{cases} -28.57 \cdot 1.05 + 0.33 \cdot 120 = 10, & Z = u, \\ -28.57 \cdot 1.05 + 0.33 \cdot 90 = 0, & Z = d. \end{cases}$$

im Zeitpunkt 1 bekommt.

3.2 Das mehrdimensionale Modell

Ein Nachteil des einperiodigen Modells ist der, dass es ein sehr einfaches Anlagenmodell mit nur zwei möglichen Ergebnissen ist. Wenn wir die Anzahl der Ergebnisse erhöhen und nach Duplikationsportfolios suchen bekommen wir Probleme, da die Anzahl der Unbekannten in Gleichung (9) weiterhin zwei ist ((h^0, h^1)) während die Anzahl der Gleichungen gleich der Anzahl von möglichen Ergebnissen ist. Daher wird das System nur eine Lösung für spezielle triviale Ansprüche wie $\Phi(Z) = S^1(1)$ haben. Wir können sagen, dass die Vollständigkeit des Binomialmodells äquivalent ist zu der Tatsache, dass die Anzahl der Gleichungen in Gleichung (9) gleich der Anzahl der Unbekannten ist.
Daher betrachtet man mehrere einperiodige Modell hintereinander wodurch sich die Anzahl der Ergebnisse mit der Anzahl der Perioden erhöht. Wenn wir nun erlauben, dass ein Portfolio nach jeder Periode geändert werden kann, ist die Vollständigkeit gewahrt.

Wir betrachten nun den Zeithorizont n und definieren den Preisprozess für die risikolose Anleihe und die risikobehaftete Anleihe wie folgt:

$$\begin{aligned} S^0(t) &= (1+r)S^0(t-1), \qquad t = 1, ..., n, \\ S^0(0) &= 1, \\ S^1(t) &= (1+Z(t))S^1(t-1), \qquad t = 1, ..., n, \\ S^1(0) &= s, \end{aligned}$$

wobei $Z(1), ..., Z(n)$ unabhängige stochastische Variablen sind, die den Wert u und d mit Wahrscheinlichkeit $p(u)$ und $p(d)$ annehmen können.
Ein(e) *Portfolio (-strategie)* ist ein Prozess:

$$h = \{h(t)\}_{t=1,\dots,n} = \{(h^0(t),\ h^1(t))\}_{t=1,\dots,n},$$

so dass $h(t)$ eine Funktion von $(S^1(1),...,S^1(t-1))$ ist. Der *Werteprozess* in Verbindung zum Portfolio h ist definiert durch:

$$V(t,h) = h^0(t)S^0(t) + h^1(t)S^1(t), \qquad t = 0, ..., n.$$

Das Portfolio $h(t)$ zur Zeit t ist das Portfolio, dass im Zeitraum $[t-1, t]$ gehalten wird. Intuitiv ist klar, dass dieses Portfolio nur von den Preisen bis $t-1$ abhängen kann und nicht von den zukünfitgen Preisen vom Zeitpunkt t an. Wir sagen, dass das Portfolio *vorhersehbar* sein muss.

Besonders interessant sind *selbstfinanzierende* Portfolios, für die gilt:

$$h^0(t)S^0(t) + h^1(t)S^1(t) \;=\; h^0(t+1)S^0(t) + h^1(t+1)S^1(t), \qquad t = 1, ..., n-1.$$

Bei selbstfinanzierenden Portfolios wird zu keiner Zeit, $t = 1, ..., n-1$, Kapital zugeführt. Alle neuen Investitionen finanzieren sich durch die Kapitalgewinne der vorhergehenden Investitionen. Wir definieren ein Arbitrage-Portfolio als selbstfinanzierendes Portfolio, für das Gleichung (3), mit Zeitpunkt n anstelle von 1, gilt.

Das Martingalmaß ist jetzt gegeben durch die positive Wahrscheinlichkeit $(q(u), q(d))$ für die der diskontierte Preisprozess für die risikobehaftete Anlage ein Martingal ist, d.h.

$$\frac{1}{1+r}\mathbb{E}^Q[S^1(t+1)|S^1(t) = s] \;=\; s.$$

Wir können leicht sehen, dass $(q(u), q(d))$ wieder durch Gleichung (6) gegeben ist. Damit solche Wahrscheinlichkeiten existieren, muss man im einperiodigen Modell fordern, dass $d < r < u$. Genau wie im einperiodigen Modell sichert diese Bedingung, dass es keine Möglichkeit gibt ein Arbitrage-Portfolio zu schaffen. Daher ist das mehrperiodige Modell ebenfalls arbitragefrei, wenn es ein Martingalmaß gibt.
Ein *einfacher bedingter Anspruch* ist eine stochastische Variable $X = \Phi(S^1(n))$ wobei generelle Ansprüche gegeben sind in der Form $X = \Phi(S^1(1), ..., S^1(n))$. Wir bezeichnen einen Anspruch, der zur Zeit t fällig wird mit $S^1(t)$ oder $S^1(1), ..., S^1(t)$. Ein Claim heißt *absicherbar*, wenn es ein selbstfinanzierendes Portfolio h gibt mit $V(n, h) = X$ und h wird *hedging* oder *duplizierend* genannt. Im Prinzip gibt es keinen Unterschied zwischen dem Halten eines erreichbaren Anspruchs und dem Portfolio, dass den Anspruch dupliziert. Daher ist der einzige vernünftige Preis einer solchen Anleihe gleich dem Wert des Duplikationsportfolio, d.h.

$$\Pi(t, X) \;=\; V(t, h).$$

Mit dem „vernünftigen Preis“ ist gemeint, dass wenn sich die Preise unterscheiden, es die Möglichkeit eines Arbitrageportfolios gibt. In dem Fall sprechen wir von einer arbitragefreien Anleihe. Wenn alle Anleihen am Markt erreichbar sind, wird der Markt *vollständig* genannt. Durch kopieren des einperiodigen Modells für jede Periode wird gezeigt, dass auch das mehrdimensionale Modell vollständig ist und das Preise und Duplikations-Portfolios gefunden werden können, die Systeme von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten lösen können.

$$\Pi(3, X) \;=\; V(3, h) \;=\; X \;=\; (S^1(3) - K)^+.$$

Beispiel

Wir wollen nun ein Beispiel betrachten, in dem wir für eine europäische Option mit den Parametern $r = 5\%$, $u = 20\%$, $d =$ -10% und $K = 110$ den Preis bestimmen wollen. Abbildung 3 zeigt, wie sich die Preise für die risikobehaftete Anlage, die risikolose Anlage und die Option nach den Ergebnissen der stochastischen Variablen $Z(1)$, $Z(2)$ und $Z(3)$ berechnen. Wir haben gegeben, dass $q(u) = q(d) = 1/2$. Zuerst berechnen wir S^0 und S^1 für die Zeitpunkte 0, 1, 2 und 3. Danach berechnen wir den Preis der Option zum Zeitpunkt 3 gegeben durch die Terminalbedingungen. Wir berechnen nun $\Pi(2, X)$ und $h(3)$ mit Hilfe der Gleichungen (11) und (10) für alle drei möglichen Ergebnisse im Zeitpunkt 2. Für das erste Ergebnis der risikobehafteten Anlage, die in den ersten beiden Perioden nach oben geht und zum Zeitpunkt 2 den Wert 144 hat, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\Pi(2, X) &= \frac{1}{1.05}\mathbb{E}^Q[\Phi(Z)] \;=\; \frac{1}{1.05}\left(62.8 \cdot \frac{1}{2} + 19.6 \cdot \frac{1}{2}\right) \;=\; 39.24,\\
h^1(3) &= \frac{62.8 - 19.6}{144(0.2 - (-0.1))} \;=\; 1,\\
h^0(3) &= \frac{1}{(1.05)^3}\frac{1.2 \cdot 19.6 - 0.9 \cdot 62.8}{0.2 - (-0.1)} \;=\; -95.02.
\end{aligned}$$

Wir können damit zeigen, dass der Wert des Portfolios h exakt gegeben ist durch

$$V(2, h) \;=\; -95 \cdot (1.05)^2 + 1 \cdot 144 \;=\; 39.24,$$

wobei der Wert des Portfolio zum Zeitpunkt 3 gegeben ist durch

$$V(3, h) \;=\; \begin{cases} -95.02 \cdot (1.05)^3 + 1 \cdot 172.8 \;=\; 62.8, & Z(3) = u,\\ -95.02 \cdot (1.05)^3 + 1 \cdot 129.6 \;=\; 19.6, & Z(3) = d. \end{cases}$$

Jetzt kann $V(2, h)$ $\Pi(2)$ ersetzen. Wir machen so weiter indem wir $\Pi(2)$ und $h(3)$ mit den möglichen Ergebnissen der risikobehafteten Anlage zum Zeitpunkt 2 (108 und 81) berechnen. Danach gehen wir zum Zeitpunkt 1 und erhalten $\Pi(1)$ und $h(2)$, wobei $\Pi(2)$ jetzt der Anspruch in einer einjährigen Berechnung ist. Letztendlich erhalten wir $\Pi(0)$.

$$\begin{bmatrix} S^0(0) = 1 \\ S^1(0) = 100 \\ \Pi(0) = 13.13 \\ h^0(1) = -49.15 \\ h^1(1) = 0.62 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} S^0(1) = 1.05 \\ S^1(1) = 120 \\ \Pi(1) = 23.13 \\ h^0(2) = -72.91 \\ h^1(2) = 0.83 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} S^0(1) = 1.05 \\ S^1(1) = 90 \\ \Pi(1) = 4.44 \\ h^0(2) = -25.40 \\ h^1(2) = 0.35 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} S^0(2) = 1.10 \\ S^1(2) = 144 \\ \Pi(2) = 39.24 \\ h^0(3) = -95.02 \\ h^1(3) = 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} S^0(2) = 1.10 \\ S^1(2) = 108 \\ \Pi(2) = 9.33 \\ h^0(3) = -50.79 \\ h^1(3) = 0.60 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} S^0(2) = 1.10 \\ S^1(2) = 81 \\ \Pi(2) = 0 \\ h^0(3) = 0 \\ h^1(3) = 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} S^0(3) = 1.16 \\ S^1(3) = 172.8 \\ \Pi(3) = 39.24 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} S^0(3) = 1.16 \\ S^1(3) = 129.6 \\ \Pi(3) = 19.6 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} S^0(3) = 1.16 \\ S^1(3) = 97.2 \\ \Pi(3) = 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} S^0(3) = 1.16 \\ S^1(3) = 72.9 \\ \Pi(3) = 0 \end{bmatrix}$$

Abbildung 3: Mehrdimensionales Modell