

Finanzzeitreihen Teil 2

Mathematisches Institut
der
Universität zu Köln

Wintersemester 09/10
Betreuung: Prof. Schmidli, J. Eisenberg
Literatur : Quantitative Risk Management
Wu Jui Sun

Contents

1	Wiederholung	2
1.1	Value at Risk	2
1.2	Expected shortfall	2
2	Volatilitätsmodelle und Risikoschätzung	2
2.1	Volatilitätsvoraussage	2
2.1.1	Beispiel Voraussage in dem GARCH(1,1)-Modell . . .	3
2.2	Bedingte Risikomessung	3
2.2.1	Annahme	3
2.3	Backtesting	4
3	Grundlagen der multivariaten Zeitreihen	4
3.1	Grunddefinitionen	4
3.1.1	Definition strikte Stationarität	4
3.1.2	Definition schwache Stationarität	5
3.1.3	Definition Korrelation-Matrix-Funktion	5
3.1.4	Definition Multivariates Weisses Rauschen	5
3.1.5	Definition Multivariates Strikt Weisses Rauschen . . .	5
3.1.6	Definition Multivariate martingale Differenz	6
3.2	Multivariater ARMA Prozess	6
3.2.1	Definition VARMA Prozess	6
3.2.2	Beispiel VAR(1)-Prozess	6
4	Multivariate GARCH-Prozesse	7
4.1	Allgemeine Struktur von Modellen	7
4.1.1	Definition	7
4.2	Modelle für bedingte Korrelation (CCC)	7
4.2.1	Definition	7
4.2.2	Satz	7
4.3	Modelle für bedingte Kovarianz	8
4.3.1	Definition	8
4.3.2	Satz	8
4.4	Dimensionsreduzierung in MGARCH	9
4.4.1	Definition	9
4.5	MGARCH und bedingtes Risikomass	9

Finanzzeitreihen Teil 2

1 Wiederholung

1.1 Value at Risk

Betrachte Verteilung des Verlustes $F_L(l) = \mathbb{P}[L \leq l]$.

$$VaR_\alpha = \inf\{l \in \mathbb{R} : \mathbb{P}[L > l] \leq 1 - \alpha\} = \inf\{l \in \mathbb{R} : F_L(l) \geq \alpha\}$$

Falls der Verlust normalverteilt ist mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 dann $VaR_\alpha = \mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha)$ wobei Φ die Standardnormalverteilung ist. Der Value at Risk ist derjenige Verlust, der mit einer Wahrscheinlichkeit von $(1 - \alpha)$ innerhalb eines bestimmten Zeitraumes nicht überschritten wird.

1.2 Expected shortfall

Für einen Verlust L mit $\mathbb{E}(|L|) < \infty$ und VF F_L :

$$ES_\alpha = 1/(1 - \alpha) \int_\alpha^1 VaR_u(L) du = \mathbb{E}(L | L \geq VaR_\alpha)$$

Der Expected Shortfall gibt an, welche Abweichung bei Eintritt des Extremfalls, d.h. bei Überschreitung des VaR, zu erwarten ist.

2 Volatilitätsmodelle und Risikoschätzung

Wir werden Standardmethoden für Marktrisiken betrachten. Die Hauptprobleme sind die Abschätzungen von bedingten Risikomassen wie VaR und Expected Shortfall sowie das Backtesting von diesen Schätzern.

2.1 Volatilitätsvoraussage

Wie wollen die zukünftige Volatilität voraussagen, d.h den Wert σ_{t+h} für $h \geq 1$ bestimmen. Wir nehmen an dass wir den Zugang zu den Beobachtungen von dem Prozess bis zum Zeitpunkt t besitzen, dargestellt durch die natürliche Filtration $\mathbb{F}_t = \sigma(\{X_s : s \leq t\})$. Nehmen wir auch an, dass das GARCH-Modell kalibriert worden ist und dessen Parameter sind geschätzt.

2.1.1 Beispiel Voraussage in dem GARCH(1,1)-Modell

Sei $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ein SWN(0,1). Ein GARCH(1,1)-Modell ist ein Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ der strikt stationär ist und der $\forall t \in \mathbb{Z}$ und für den strikt positiven Prozess $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ die folgenden Gleichungen erfüllt :

$$X_t = \sigma_t Z_t, \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \text{ mit } \alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0, \beta_1 \geq 0.$$

Nehmen wir an dass das Modell auch kovarianzstationär ist s.d $\mathbb{E}(X_t^2) = \mathbb{E}(\sigma_t^2) < \infty$. Da das Modell eine Martingal-Differenz ist, ist die beste Voraussage von X_{t+h} gleich Null. Eine natürliche Voraussage von X_{t+1}^2 basierend auf \mathbb{F}_t ist dessen natürlicher Erwartungswert σ_{t+1}^2 gegeben durch

$$\mathbb{E}(X_{t+1}^2 | \mathbb{F}_t) = \alpha_0 + \alpha_1 X_t^2 + \beta_1 \sigma_t^2.$$

Zur Zeit t kennen wir den Wert σ_{t+1}^2 . Wir sagen der Prozess $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ist previsible. In der Praxis müssen wir jedoch eine Approximation von dieser Formel machen, da wir die vergangene Werte, die uns ermöglichen σ_t^2 zu berechnen, nicht haben. Eine natürliche Approximation ist σ_t^2 zu approximieren.

2.2 Bedingte Risikomessung

Betrachten wir die Situation wo man das Risiko für eine Investition in einer einzigen Aktie messen will. Am Tag t ist der Wert der Aktie V_t und der Log-return für den kommenden Tag beträgt X_{t+1} , also ist der linearisierte Verlust über den kommenden Tag $L_{t+1} = l_t^\Delta(X_{t+1}) = -V_t X_{t+1}$. Wir setzen $V_t = 1$ für alle t und schreiben $L_t = -X_t$, so ist $(L_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ der Prozess der negativen Log-returns.

2.2.1 Annahme

Der Verlustprozess $(L_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ist \mathbb{F}_t -messbar mit $L_t = \mu_t + \sigma_t Z_t$ wobei μ_t und σ_t \mathbb{F}_{t-1} -messbar sind und $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ SWN(0,1) sind.

Sei G die Verteilungsfunktion von $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$, dann kann man leicht nachrechnen dass

$$F_{L_{t+1} | \mathbb{F}_t}(l) = G((l - \mu_{t+1}) / \sigma_{t+1})$$

Wir kriegen dann $Var_\alpha^t = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1} q_\alpha(Z)$ und $ES_\alpha^t = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1} ES_\alpha(Z)$ wobei Z die Verteilungsfunktion G hat. Im Allgemeinen, um diese Risikomasse zu schätzen, braucht man die Schätzungen von μ_{t+1} (der bedingte Erwartungswert) und σ_{t+1} (die Volatilität des Schadensprozesses). Wir brauchen auch das Quantil sowie den Expected Shortfall von der Verteilungsfunktion G. In einem Modell mit Gauss'schen Innovationen haben wir $q_\alpha(Z) = \Phi^{-1}(\alpha)$ und $ES_\alpha(Z) = \phi(\Phi^{-1}(\alpha)) / (1 - \alpha)$. In einem nicht-Gauss'schen Modell hängen $q_\alpha(Z)$ und $ES_\alpha(Z)$ von weiteren Parametern ab.

2.3 Backtesting

Wir definieren Indikator-Variablen $I_{t+1} = I_{L_{t+1} > VaR_\alpha^t}$. Der Prozess $(I_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ist ein Prozess mit iid Bernoulli-verteilten Variablen mit Erfolgswahrscheinlichkeit $1 - \alpha$. Erfolg bedeutet hier falls das Quantil VaR überschritten wird. In der Praxis machen wir einen-Schritt-voraus VaR-Schätzer \widehat{VaR}_α^t und betrachten den Verstoss-Indikator $\widehat{I}_{t+1} := I_{L_{t+1} > \widehat{VaR}_\alpha^t}$. Nach iid Bernoulli-Verletzungen des einen-Schritt-voraus VaR zu prüfen, hat 2 Aspekte:

(*) einerseits prüft man ob die Anzahl der Verstosse im Durchschnitt korrekt ist, (**) andererseits prüft man ob das Muster der Verstosse beständig ein iid Benehmen hat.

Eine Möglichkeit die Unabhängigkeit der Bernoulli-Indikatoren zu prüfen ist der *Runs Test* vom David(1947). Man zählt die Läufe von aufeinanderfolgenden Nullen oder Einsen in der Realisierungen der Indikator-Variablen und vergleicht die realisierte Anzahl der Läufe mit der bekannten Verteilung von der Anzahl der Läufe in den iid Bernoulli Daten.

3 Grundlagen der multivariaten Zeitreihen

3.1 Grunddefinitionen

Nehmen wir an, dass die Momente der multivariaten Zeitreihe existieren. Wir definieren die Erwartungswertfunktion $\mu(t)$ und die Kovarianz-matrix-funktion $\Gamma(t, s)$ von der multivariaten Zeitreihe $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ durch:

$$\mu(t) = \mathbb{E}(X_t), \quad t \in \mathbb{Z},$$

$$\Gamma(t, s) = \mathbb{E}((X_t - \mu(t))(X_s - \mu(s))^T), \quad t, s \in \mathbb{Z}.$$

Analog zu dem eindimensionalen Fall, haben wir $\Gamma(t, t) = cov(X_t)$. Man beobachtet, dass für die Elemente $\gamma_{ij}(t, s)$ von $\Gamma(t, s)$ $\gamma_{ij}(t, s) = \gamma_{ji}(s, t)$ gilt. Es ist klar dass $\Gamma(t, s) = \Gamma(s, t)^T$ für alle t, s . Die Matrix muss aber nicht symmetrisch sein, also gilt im Allgemeinen $\Gamma(t, s) \neq \Gamma(s, t)$, was im Gegensatz zum eindimensionalen Fall steht.

3.1.1 Definition strikte Stationarität

Eine multivariate Zeitreihe $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ist strikt stationär falls

$$(X_{t_1}^T, \dots, X_{t_n}^T) \stackrel{d}{=} (X_{t_1+k}^T, \dots, X_{t_n+k}^T)$$

für alle $t_1, \dots, t_n, k \in \mathbb{Z}$ und für alle $n \in \mathbb{N}$.

3.1.2 Definition schwache Stationarität

Eine multivariate Zeitreihe $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ist schwach stationär oder kovarianzstationär falls, die ersten zwei Momente existieren und

$$\mu(t) = \mu, \quad t \in \mathbb{Z}$$

$$\Gamma(t, s) = \Gamma(t + k, s + k), \quad t, s, k \in \mathbb{Z}$$

Eine strikt stationäre multivariate Zeitreihe mit endlicher Kovarianzmatrix ist auch kovarianzstationär, aber es gibt auch Prozesse die strikt stationär aber nicht kovarianzstationär sind.

Wir haben $\Gamma(t - s, 0) = \Gamma(t, s)$ für alle t, s .

Wir schreiben $\Gamma(h) = \Gamma(h, 0)$, $\forall h \in \mathbb{Z}$ und bemerken dass $\Gamma(0) = \text{cov}(X_t)$, $\forall t$.

3.1.3 Definition Korrelation-Matrix-Funktion

Wir schreiben $\Delta = \Delta(\Gamma(0))$, und die Korrelation-Matrix-Funktion $P(h)$ von einer kovarianzstationären multivariaten Zeitreihe $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ist $P(h) = \Delta^{-1} \Gamma(h) \Delta^{-1}$, $\forall h \in \mathbb{Z}$.

3.1.4 Definition Multivariates Weisses Rauschen

$(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ist ein multivariates Weisses Rauschen falls es kovarianzstationär ist mit Korrelation-Matrix-Funktion

$$P(h) = \begin{cases} P, & \text{für } h = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für einige positiv definite Korrelation-Matrizen P .

Ein multivariater Weisses-Rauschen-Prozess mit Erwartungswert 0 und Kovarianzmatrix $\Sigma = \text{cov}(X_t)$ wird mit $\text{WN}(0, \Sigma)$ notiert.

3.1.5 Definition Multivariates Strikt Weisses Rauschen

$(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ist ein multivariates Strikt Weisses Rauschen, falls es eine Folge von iid Zufallsvektoren mit endlicher Kovarianzmatrix ist.

Ein multivariater Strikt Weisses-Rauschen-Prozess mit Erwartungswert 0 und Kovarianzmatrix Σ wird mit $\text{SWN}(0, \Sigma)$ notiert.

3.1.6 Definition Multivariate martingale Differenz

$(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ hat die multivariate Martingale-Differenz Eigenschaft bzg. Filtration (\mathbb{F}_t) falls $\mathbb{E}|X_t| < \infty$ und

$$\mathbb{E}(X_t | \mathbb{F}_{t-1}) = 0, t \in \mathbb{Z}$$

Der unbedingte Erwartungswert von so einem Prozess ist natürlich auch Null und falls $cov(X_t) < \infty$ für alle t , dann $\Gamma(t, s) = 0$ für $t \neq s$.

3.2 Multivariater ARMA Prozess

Wir werden hier kurz die mehrdimensionale ARMA Modelle betrachten.

3.2.1 Definition VARMA Prozess

Sei $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ein $WN(0, \Sigma_\epsilon)$. Der Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ist ein VARMA(p,q)-Prozess mit Erwartungswert Null, falls er kovarianzstationär ist und Gleichungen der Form :

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p} = \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \epsilon_{t-q}$$

$\forall t \in \mathbb{Z}$ erfüllt, für Parameter-Matrizen ϕ_i und θ_j in $\mathbb{R}^{d \times d}$.

$(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ist ein VARMA-Prozess mit Erwartungswert μ falls $(X_t - \mu)_{t \in \mathbb{Z}}$ ein VARMA(p,q)-Prozess mit Erwartungswert Null ist.

In der Praxis betrachten wir nur VARMA-Prozesse, wo die Lösung der Gleichungen die Form $X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i \epsilon_{t-1}$, hat.

3.2.2 Beispiel VAR(1)-Prozess

Der VAR(1)-Prozess erfüllt Gleichungen dieser Form

$$X_t = \phi X_{t-1} + \epsilon_t, \forall t.$$

Die Lösung sieht dann folgendermassen aus $X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \phi^i \epsilon_{t-i}$.

Die Kovarianzmatrixfunktion von diesem ist $\Gamma(h) = \phi^h \Gamma(0)$, $h=0,1,2,\dots$

In der Praxis sind vollständige VARMA-Modelle weniger üblich als z.B die VAR-Unterfamilien. Ein Grund dafür ist, dass Probleme beim Schätzen der Parametern auftauchen. Zum Beispiel können wir Situationen haben, wo das VARMA(1,1)-Modell $X_t - \phi X_{t-1} = \epsilon_t + \Theta \epsilon_{t-1}$ in $X_t - \phi^* X_{t-1} = \epsilon_t + \Theta^* \epsilon_{t-1}$ für völlig verschiedene Parameter ϕ^* und Θ^* umgeschrieben werden kann.

4 Multivariate GARCH-Prozesse

4.1 Allgemeine Struktur von Modellen

4.1.1 Definition

Sei $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ein $SWN(0, E_d)$. Der Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ist ein multivariater GARCH-Prozess, falls er strikt stationär ist und Gleichungen der Form:

$$X_t = \Sigma_t^{1/2} Z_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

erfüllt wobei $\Sigma_t^{1/2} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ der Cholesky-Faktor von einer symmetrischen und positiv definiten Matrix Σ_t , die \mathbb{F}_{t-1} -messbar ist, mit $\mathbb{F}_{t-1} = \sigma(\{X_s : s \leq t-1\})$, ist. Es ist einfach nachzurechnen dass so ein Prozess die multivariate Martingal-Differenz Eigenschaft besitzt:

$$\mathbb{E}(X_t | \mathbb{F}_{t-1}) = 0$$

und somit ein Weisses-Rauschen-Prozess sein muss.

Σ_t wird die bedingte Kovarianz-matrix sein : $cov(X_t | \mathbb{F}_{t-1}) = \Sigma_t$

Die Kunst multivariate GARCH-Modelle zu konstruieren besteht darin die Abhängigkeit von Σ_t zur Vergangenheit so zu spezifizieren dass Σ_t immer symmetrisch und positiv definit bleibt.

4.2 Modelle für bedingte Korrelation (CCC)

4.2.1 Definition

Der Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ist ein CCC-GARCH-Prozess, falls er die generelle Struktur eines GARCH-Prozesses besitzt, so dass die bedingte Kovarianz-Matrix die Form $\Sigma_t = \Delta_t P_c \Delta_t$ hat , wobei

- (i) P_c eine konstante positiv-definite Korrelation-Matrix ist, und
- (ii) Δ_t eine diagonale Volatilitätsmatrix ist, mit Elementen $\sigma_{t,k}$, die folgenden Gleichungen erfüllen

$$\sigma_{t,k}^2 = \alpha_{k0} + \sum_{i=1}^{p_k} \alpha_{ki} X_{t-i,k}^2 + \sum_{j=1}^{q_k} \beta_{kj} \sigma_{t-j,k}^2, \quad k=1, \dots, d$$

wobei $\alpha_{k0} > 0, \alpha_{ki} \geq 0, i=1, \dots, p_k, \beta_{kj} \geq 0, j=1, \dots, q_k$.

4.2.2 Satz

Das CCC-GARCH Modell ist wohldefiniert im Sinne, dass Σ_t fast sicher positiv definit ist, für alle t. Es ist genau dann kovarianzstationär wenn $\sum_{i=1}^{p_k} \alpha_{ki} + \sum_{j=1}^{q_k} \beta_{kj} < 1$ für $k=1, \dots, d$.

Beweis. Für einen Vektor $v \neq 0$ in \mathbb{R}^d , haben wir $v^T \Sigma_t v = (\Delta_t v)^T P_c (\Delta_t v) > 0$,

da P_c positiv definit ist und die strikte Positivität von den einzelnen Volatilitätsprozessen sichert dass $\Delta_t v \neq 0$.

" \implies " Falls $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ kovarianzstationär ist, dann ist jede einzelne Komponentenfolge $(X_{t,k})_{t \in \mathbb{Z}}$ ein kovarianzstationärer GARCH-Prozess. Eine notwendige und ausreichende Bedingung dazu ist $\sum_{i=1}^{p_k} \alpha_{ki} + \sum_{j=1}^{q_k} \beta_{kj} < 1$.

" \impliedby " Falls die Komponenten-Folgen kovarianz-stationär sind, dann gilt nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$\sigma_{ij} = \rho_{ij} \mathbb{E}(\sigma_{t,i} \sigma_{t,j}) \leq \rho_{ij} \sqrt{\mathbb{E}(\sigma_{t,i}^2)} \sqrt{\mathbb{E}(\sigma_{t,j}^2)} < \infty$. Da $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ eine multivariate Martingale-Differenz mit endlichen, zeitunabhängigen zweiten Momenten σ_{ij} ist, ist er ein kovarianzstationäres Weisses Rauschen. \square

Das CCC-Modell ist oft ein nützlicher Ausgangspunkt für komplexere Modelle. In empirischen Situationen gibt es eine angemessene Leistung, doch im Allgemeinen wird die Konstanz der bedingten Korrelation in diesem Modell als unrealistisch gesehen und der Einfluss von Nachrichten auf finanzielle Märkte erfordert Modelle die dynamische Entwicklungen der bedingten Korrelation und der Volatilitäten erlauben.

4.3 Modelle für bedingte Kovarianz

4.3.1 Definition

Der Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ist ein BEKK-Prozess falls er die generelle Struktur eines GARCH-Prozesses besitzt und die bedingte Kovarianz-matrix Σ_t erfüllt für alle $t \in \mathbb{Z}$,

$$\Sigma_t = A_0 + \sum_{i=1}^p A_i^T X_{t-i} X_{t-i}^T A_i + \sum_{j=1}^q B_j^T \Sigma_{t-j} B_j$$

wobei die Koeffizienten-matrizen alle in $\mathbb{R}^{d \times d}$ und A_0 symmetrisch und positiv definit ist.

4.3.2 Satz

In einem BEKK-Modell, ist die bedingte Kovarianz-matrix Σ_t fast sicher positiv definit für alle t .

Beweis. Betrachten wir der Einfachheit halber ein Modell erster Ordnung.

Für einen Vektor $v \neq 0$ in \mathbb{R}^d haben wir

$$v^T \Sigma_t v = v^T A_0 v + (v^T A_1^T X_{t-1})^2 + (B_1 v)^T \Sigma_{t-1} (B_1 v) > 0,$$

da der erste Term strikt positiv ist und der zweite und der dritte Term nicht-negativ sind. \square

4.4 Dimensionsreduzierung in MGARCH

4.4.1 Definition

Der Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ definiert ein PC-GARCH-Modell falls eine orthogonale Matrix $\Gamma \in \mathbb{R}^{d \times d}$ existiert, die $\Gamma \Gamma^T = \Gamma^T \Gamma = E_d$ erfüllt, so dass $(\Gamma^T X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ein rein diagonales GARCH-Modell definiert.

Falls $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ einen PC-GARCH-Prozess für gewisse Matrizen Γ definiert, dann können wir einen Prozess $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ einführen der folgendermassen definiert wird $Y_t = \Gamma^T X_t$ und somit $Y_t = \Delta_t Z_t$ erfüllt wobei $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ein $\text{SWN}(0, E_d)$ ist und Δ_t eine diagonale Volatilitätmatrix. Da $X_t = \Gamma \Delta_t Z_t$, haben die bedingten und unbedingten Kovarianz-matrizen folgende Struktur

$$\begin{aligned}\Sigma_t &= \Gamma \Delta_t^2 \Gamma^T \\ \Sigma &= \Gamma \mathbb{E}(\Delta_t^2) \Gamma^T\end{aligned}$$

und sind offensichtlich symmetrisch und positiv definit.

4.5 MGARCH und bedingtes Risikomass

Nehmen wir an, wir kalibrieren ein multivariates GARCH-Modell, das die generelle Struktur $X_t = \mu_t + \Sigma_t^{1/2} Z_t$ mit historischen Risikofaktoren X_{t-n+1}, \dots, X_t hat. Wir interessieren uns für die Verteilung des Verlustes $L_{t+1} = l_{[t]}(X_{t+1})$ gegeben $\mathbb{F}_t = \sigma(\{X_s : s \leq t\})$.

Eine Methode die man anwenden kann, ist die Monte-Carlo-Methode: Man kann den nächsten Wert X_{t+1} vom stochastischen Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mehrmals simulieren, indem wir Schätzer von μ_{t+1} und Σ_{t+1} benutzen. Alternativ, kann man die Varianz-Kovarianz-Berechnung benutzen : betrachten wir den linearisierten Verlust-Operator mit der allgemeinen Form $l_{[t]}^\Delta(x) = -(c_t + b_t^T x)$, die Momente der bedingten Verlust-Verteilung werden dann

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(L_{t+1}^\Delta | \mathbb{F}_t) &= -c_t - b_t^T \mu_{t+1} \\ \text{cov}(L_{t+1}^\Delta | \mathbb{F}_t) &= b_t^T \Sigma_{t+1} b_t\end{aligned}$$