Universität zu Köln
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Seminar

Bewertungsmethoden in der Personenversicherungsmathematik

Black-Scholes Modell

Referenten: Prof. Dr. Hanspeter Schmidli
Dr. Julia Eisenberg

Vorgelegt von
Wu Jui Sun

Vortragstermin: 15.06.2010

Inhaltsverzeichnis

1 Das Black-Scholes Modell

Das Black-Scholes Modell wurde 1973 von Black, Scholes und Merton veröffentlicht und 1997 mit dem Nobel Preis ausgezeichnet.
Das Black-Scholes Modell besteht aus zwei Aktiven mit Preisdynamiken

$$\begin{aligned} &dS^0(t) = rS^0(t)dt \\ &S^0(0) = 1 \\ &dS^1(t) = \alpha S^1(t)dt + \sigma S^1(t)dW(t) \\ &S^1(0) = s \end{aligned} \tag{1}$$

wobei r,α und σ deterministische Konstanten sind. Die Idee von der Dynamik von S^0 ist klar, da S^0 eine deterministische Differentialgleichung mit folgender Lösung

$$\begin{aligned} &\tfrac{d}{dt}S^0(t) = rS^0(t), S^0_0 = 1 \\ &S^0(t) = e^{rt} \end{aligned} \tag{2}$$

erfüllt. Wir können eine Investition in S^0 als eine Geldanlage bei einer Bank mit konstanter Verzinsung interpretieren. Die Preisdynamik von S^1 basiert sich auf der Annahme dass eine Veränderung des Preises im einen "kleinen" Zeitintervall $(t, t + \Delta t]$ folgendermaßen approximiert werden kann :

$$\begin{aligned} \Delta S(t) = S(t + \Delta t) - S(t) &\approx \alpha S(t)\Delta t + \sigma S(t)(W(t + \Delta t) - W(t)) \\ &= \alpha S(t)\Delta t + \sigma S(t)\Delta W(t) \end{aligned} \tag{3}$$

wobei W eine Brownsche Bewegung bzw. einen Wiener Prozess ist. Für einen Wiener Prozess gilt $\Delta W(t) \sim N(0, \Delta t)$.
Ein Portfolio (eine Strategie) ist ein Prozess $h = \{h(t)\}_{t\in[0,n]} = \{(h^0(t), h^1(t))\}_{t\in[0,n]}$ wobei $h(t)$ eine Funktion von $(S^1(s), 0 \le s \le t)$ ist. Der Wertprozess des Portfolios ist definiert als

$$V(t, h) = h^0(t)S^0(t) + h^1(t)S^1(t), t \in [0, n]. \tag{4}$$

Das Portfolio zu einem gegebenen Zeitpunkt t, $h(t)$, kann als ein Portfolio, das während der Periode $[t, t+dt)$ gehalten wird, interpretiert werden. Von besonderer Bedeutung sind selbstfinanzierende Portfolios für welche

$$\begin{aligned} dV(t, h) &= h^0(t)dS^0(t) + h^1(t)dS^1(t) \\ &= rV(t, h)dt + h^1(t)S^1(t)((\alpha - r)dt + \sigma dW(t)). \end{aligned} \tag{5}$$

Zu keinem Zeitpunkt wird Geld dazugefügt oder konsumiert, und alle neue Investitionen zum Zeitpunkt t werden durch Kapitalgewinne aus alten Investitionen finanziert.
Ein Arbitrage Portfolio ist definiert als ein Portfolio mit folgenden Qualitäten :

$$\begin{aligned} &V(0, h) = 0, \\ &\mathbb{P}(V(n, h) \ge 0) = 1, \\ &\mathbb{P}(V(n, h) > 0) > 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Wir definieren einen einfachen bedingten Anspruch als eine stochastische Variable
$X = \Phi(S^1(n))$. Ein Anspruch ist erzielbar falls es ein selbstfinanzierendes Portfolio h

existiert so dass $V(n,h) = X$, und h wird Hedging Portfolio genannt. Es gibt keinen Unterschied zwischen dem Besitz eines bedingten Anspruchs und des Hedging Portfolios. Also ist der einzige arbitragefreie Preis für so einen Anspruch der Wert des Hedging Portfolios

$$\Pi(t,X) = V(t,h). \tag{7}$$

Falls alle Ansprüche im Markt erreichbar sind, dann ist der Markt vollständig, und es ist normal zu fragen ob das Black-Scholes Markt Modell vollständig ist. Falls die Antwort Ja ist, dann haben wir den arbitragefreien Preis für jeden Anspruch zu jedem Zeitpunkt durch $\Pi(t,X) = V(t,h)$, wobei h das Hedging Portfolio ist, gefunden.
Nun bezeichnen wir mit $\Pi(t)$ den Preis eines einfachen Anspruchs X zur Zeit t, für den wir ein Hedging Portfolio h und einen arbitagefreien Preis Π suchen. Wir nehmen nun an dass der Preis des Anspruchs X als eine Funktion der Zeit und des Preises der Aktie geschrieben werden kann, d.h. $\Pi(t) = F(t, S^1(t))$, wobei $F(t,s)$ eine deterministische Funktion von zwei Variablen ist.
Demzufolge suchen wir ein Paar (h,Π) so dass $V(n,h) = X$ und $\Pi(t,X) = V(t,h)$ erfüllt sind. Wir brauchen dazu die Dynamiken von verschiedenen Preisprozessen. Die Preisdynamiken von S^0 und S^1 sind bekannt, doch wie sieht die Preisdynamik von Π aus? Es existiert ein starkes Ergebnis, das zeigt wie die Dynamik von S^1 in einer regulären Funktion $F(t, S^1(t))$ widergespiegelt wird. Dieses Ergebnis trägt den Namen Itô-Formel und führt dazu dass Π sich wie S^1 benimmt mit Prozessen $\alpha^\pi(t)$ und $\sigma^\pi(t)$ die α und σ ersetzen. Die Dynamik des Preisprozesses Π ist gegeben durch

$$d\Pi(t) = \alpha^\Pi(t)\Pi(t)dt + \sigma^\Pi(t)\Pi(t)dW(t) \tag{8}$$

wobei

$$\alpha^\Pi(t) = \frac{\frac{\partial F}{\partial t}(t,S^1(t)) + \alpha S^1(t)\frac{\partial F}{\partial s}(t,S^1(t))}{F(t,S^1(t))} + \frac{\frac{1}{2}\sigma^2(S^1(t))^2\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}(t,S^1(t))}{F(t,S^1(t))}; \tag{9}$$

$$\sigma^\Pi(t) = \frac{\sigma S^1(t)\frac{\partial F}{\partial s}(t,S^1(t))}{F(t,S^1(t))}. \tag{10}$$

Andererseits brauchen wir ein Portfolio dessen Wertprozess, nach Gleichung (7), dem Preis Π gleicht

$$\Pi(t) = V(t,h) = h^0(t)S^0(t) + h^1(t)S^1(t) \tag{11}$$

und das, nach Gleichung (5), selbstfinanzierend ist :

$$\begin{aligned} d\Pi(t) &= h^0(t)dS^0(t) + h^1(t)dS^1(t) \\ &= h^0(t)rS^0(t)dt + h^1(t)(\alpha S^1(t)dt + \sigma S^1(t)dW(t)) \\ &= \tfrac{h^0(t)rS^0(t)+h^1(t)\alpha S^1(t)}{\Pi(t)}\Pi(t)dt + \tfrac{h^1(t)\sigma S^1(t)}{\Pi(t)}\Pi(t)dW(t). \end{aligned} \tag{12}$$

Jetzt können wir die Gleichungen (8) und (12) vergleichen, und durch die Gleichsetzung der Terme vor dt, und vor $dW(t)$ kriegen wir

$$\begin{aligned} \alpha^\Pi(t) &= \tfrac{h^0(t)rS^0(t)+h^1(t)\alpha S^1(t)}{\Pi(t)}, \\ \sigma^\Pi(t) &= \tfrac{h^1(t)\sigma S^1(t)}{\Pi(t)}. \end{aligned}$$

Durch die Einsetzung der Gleichung (11), kriegen wir

$$\frac{\alpha - r}{\sigma} = \frac{\alpha^{\Pi}(t) - r}{\sigma^{\Pi}(t)}; \tag{13}$$

$$h^1(t) = \frac{\sigma^{\Pi}(t)\Pi(t)}{\sigma S^1(t)} = \frac{\partial F}{\partial s}(t, S^1(t)); \tag{14}$$

$$h^0(t) = \frac{\Pi(t) - h^1(t)S^1(t)}{S^0(t)}. \tag{15}$$

Setzen wir die Gleichungen (9) und (10) in die Gleichung (13) ein, kriegen wir

$$0 = \tfrac{\partial F}{\partial t}(t, S^1(t)) + rS^1(t)\tfrac{\partial F}{\partial s}(t, S^1(t)) + \tfrac{1}{2}\sigma^2(S^1(t))^2\tfrac{\partial^2 F}{\partial s^2}(t, S^1(t)) - F(t, S^1(t))r. \tag{16}$$

Außerdem haben wir die Bedingung $\Pi(n) = \Phi(S(n))$. Diese Differentialgleichung muss zu jedem Zeitpunkt erfüllt sein, unabhängig davon welchen Wert $S^1(t)$ annimmt. Diese Differentialgleichung wird die Black-Scholes Gleichung genannt:

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial F}{\partial t}(t, s) + rs\tfrac{\partial F}{\partial s}(t, s) + \tfrac{1}{2}\sigma^2 s^2\tfrac{\partial^2 F}{\partial s^2}(t, s) - F(t, s)r = 0,\\ F(n, s) = \Phi(s). \end{aligned} \tag{17}$$

Die Black-Scholes Gleichung ist eine deterministische partielle Differentialgleichung die wir für jeden Punkt (t, s) lösen können. Falls wir den Preis des Anspruchs brauchen, ersetzen wir einfach s durch $S^1(t)$ in $F(t, s)$. Falls wir nun aber den Preis in einem kleinen Zeitintervall übertragen wollen, brauchen wir wieder die Dynamik die in der Gleichung (8) gegeben ist. Durch die Einsetzung der Gleichungen (9) und (10) und $\partial F(t, S^1(t))/\partial t$ in die Gleichung (16), kriegen wir

$$d\Pi(t) = (r\Pi(t) + (\alpha - r)S^1(t)\tfrac{\partial F}{\partial s}(t, S^1(t)))dt + \sigma S^1(t)\tfrac{\partial F}{\partial s}(t, S^1(t))dW(t) \tag{18}$$

Falls wir nun die Gleichungen (5) und (18) vergleichen und Gleichung (7) benutzen, kriegen wir wieder das Hedging Portfolio, da $h^1(t) = \partial F(t, S^1(t))/\partial s$ und $h^0(t)$ wird duch folgende Gleichung bestimmt:

$$\Pi(t) = h^0(t)S^0(t) + h^1(t)S^1(t).$$

Wir beschreiben nun die Dynamik von S^1 indem wir einen Prozess W^Q, der ein Wiener Prozess unter dem äquivalenten Mass ist, benutzen so dass

$$dS^1(t) = rS^1(t)dt + \sigma S^1(t)dW^Q(t). \tag{19}$$

Unter Q, kriegen wir

$$\mathbb{E}^Q[e^{-r(u-t)}S^1(u)|S^1(t) = s] = s, \qquad t \le u \le n,$$

wobei $\mathbb{E}^Q$ der Erwartungswert unter Q ist. Wir sehen dass, bis auf den Diskontierungsfaktor $e^{-r(u-t)}$, S^1 unter Q ein Martingal ist; Q ist bekannt als das Martingalmass. Die Lösung der Black-Scholes Gleichung hat die folgende Form :

$$F(t, s) = \mathbb{E}^Q[e^{-r(n-t)}\Phi(S^1(n))|S^1(t) = s] \tag{20}$$

Für die meisten Vertragsfunktionen Φ, kann man die Gleichung (20) nur numerisch lösen. Doch in einigen Fällen, kann man sie analytisch lösen; ein Beispiel ist die europäische Call Option, $\Phi(S^1(n)) = (S^1(n) - K)^+$. Die Verteilung von S^1 unter Q kombiniert mit der einfachen Vertragsfunktion gibt uns eine relativ explizite Formel für den arbitragefreien Preis einer europäischen Call Option im Black-Scholes Markt. Diese Formel heisst die Black-Schorles Formel:

$$F(t,s) = sN[d_1(t,s)] - e^{-r(n-t)}KN[d_2(t,s)]. \tag{21}$$

Hier ist N die Verteilungsfunktion einer Standard Normal Verteilung, und

$$\begin{aligned} d_1(t,s) &= \tfrac{1}{\sigma\sqrt{n-t}}(log(\tfrac{s}{K}) + (r + \tfrac{1}{2}\sigma^2)(n-t)), \\ d_2(t,s) &= d_1(t,s) - \sigma\sqrt{n-t}. \end{aligned} \tag{22}$$

2 Stetiges Versicherungsmodell

Die technische Reserve V^* hängt mit den Rechnungsgrundlagen erster Ordnung und zweiter Ordnung zusammen, die durch die Verzinsungen erster Ordnung und zweiter Ordnung r^* und r^δ gebildet werden :

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}V^*(t) &= r^\delta(t)V^*(t) + \pi \\ &= r^*(t)V^*(t) + \pi + \delta(t), \\ V^*(0) &= 0, \end{aligned} \tag{23}$$

wobei die Dividendenrate $\delta(t)$ durch $\delta(t) = (r^\delta(t) - r^*(t))V^*(t)$ gegeben ist. Nach dem Äquivalenzprinzip ist die Überlebenssumme $b(t)$ zur Zeit t , für eine gegebene technische Reserve, gegeben durch

$$V^*(t) = b(t)(\nu^*)^{n-t} - \pi a^*_{\overline{n-t|}},$$

Im Kapitel 2 haben wir die Gesamtheit der Rückstellungen U gesehen :

$$\begin{aligned} &dU(t) = rU(t)dt + \pi dt, \\ &U(0) = 0, \end{aligned}$$

wobei r konstant ist. Das Unternehmen hat nun $h^1(t)$ Aktien zum Zeitpunkt t. Änderungen in der Gesamtheit der Rückstellungen U bestehen aus Prämien und Kapitalgewinnen. Kapitalgewinne bestehen aus Verzinsungsgewinne aus dem Teil von $U(t)$ der nicht in Aktien investiert worden ist, $U(t) - \eta^1(t)S^1(t)$, und aus der Preisänderung des Portfolios von Aktien. Daher

$$\begin{aligned} dU(t) &= r(U(t) - \eta^1(t)S^1(t))dt + \eta^1(t)dS^1(t) + \pi dt \\ &= rUdt + \eta^1(t)S^1(t)((\alpha - r)dt + \sigma dW(t)) + \pi dt, \\ U(0) &= 0. \end{aligned}$$

Die unverteilten Rückstellungen X werden durch

$$X(t) = U(t) - V^*(t)$$

bestimmt und wir kriegen

$$\begin{aligned} dX(t) &= dU(t) - dV^*(t) \\ &= rX(t)dt + \eta^1(t)S^1(t)((\alpha - r)dt + \sigma dW(t)) + (c(t) - \delta(t))dt, \end{aligned}$$

wobei

$$c(t) = (r(t) - r^*(t))V^*(t)$$

Die Idee ist nun prospektive Grössen für die Gesamtheit der Rückstellungen und die unverteilten Rückstellungen einzuführen. Falls $b(n)$ ein bedingter Anspruch ist, so dass er nur durch die Entwicklung des Aktienmarktes bestimmt wird dann gilt für den Marktwert der Gesamtzahlungen, den Marktwert der garantierten Zahlungen und den Marktwert der nicht garantierten Zahlungen :

$$V(t) = \mathbb{E}_t^Q[b(n)]v^{n-t} - \pi a_{\overline{n-t|}} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} V^g(t) &= b(t)v^{n-t} - \pi a_{\overline{n-t|}}, \\ V^b(t) &= (\mathbb{E}^Q[b(n)] - b(t))v^{n-t}. \end{aligned}$$

Gemäß der Gleichung (24) müssen die Restparameter folgendermaßen bestimmt werden

$$V(0) = 0.$$

Es existieren Investitionsstrategien η^1 so dass $X(n) = 0$. Eine ausreichende Bedingung an η so dass $X(n) = 0$ erfüllt ist, besteht darin dass riskante Investitionen nur gemacht werden falls $U(t)$ $V^g(t)$ überschreitet. Sonst, müssen die Investitionen die Rendite r zurückgegeben. Wir schreiben die Bedingung folgendermaßen auf:

$$U(t) - V^g(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \eta^1(t) = 0$$

Falls wir die Solvenzregel $X(t) \geq 0$ hinzufügen, dann ist eine ausreichende Bedingung an η, dass die riskante Investitionen nur gemacht werden, falls $X(t) \geq 0$. Wir schreiben :

$$X(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \eta^1(t) = 0$$

Die Bedingungen an X beschränken das Risiko im Portfolio. Jedoch kann man diese Bedingungen auch ignorieren und mehr Kapital in Aktien investieren. Man kann sich auch eine allgemeine Investition vorstellen wo die Proportion der Fonds in riskante Aktiven, $\eta^1(t)S^1(t)/X(t)$, eine Funktion Θ von $(t, V^*(t), X(t))$ ist, d.h.

$$\tfrac{\eta^1(t)S^1(t)}{X(t)} = \Theta(t, V^*(t), X(t)). \tag{25}$$

Hierdurch ist

$$dX(t) = (rdt + \Theta(t, V^*(t), X(t))((\alpha - r)dt + \sigma dW(t)))X(t) + (c(t) - \delta(t))dt.$$

Wir definieren nun :

$$r^\delta(t) = r^*(t) + \tfrac{\Phi(t, X(t))}{V^*(t)},$$

wobei Φ eine Funktion, die die Abhängigkeit von X spezifiziert, ist. Wir können an eine Funktion denken die die folgende Form hat

$$\Phi(t,x) = (\beta(t) + \alpha(t)x)^+, \tag{26}$$

wobei α und β deterministische Funktionen von t sind. Wir werden nun drei Boni betrachten und zwar den Schlussbonus, die Bardividende und den Mehrwert und erinnern uns an zwei mögliche Konstruktionen:
* falls $\beta(t) = 0$ und $\alpha(t) = \alpha > 0$ dann

$$\Phi(t, X(t)) = \alpha(X(t))^+$$

* falls $\alpha(t) = 1$ und $\beta(t) = -K < 0$ dann

$$\Phi(t, X(t)) = (X(t) - K)^+.$$

2.1 Schlussbonus

Wir fangen mit dem Schlussbonus an, weil dieser die meisten Ähnlichkeiten mit der europäischen Option hat. Dies gibt uns die erste Verallgemeinerung der Black-Scholes Gleichung. Die Investition wird durch eine Funktion Θ bestimmt, so dass $\eta^1(t)S^1(t)/X(t) = \Theta(t, X(t))$. Die Dynamik von $X(t)$ wird

$$\begin{aligned} &dX(t) = (rdt + \Theta(t, X(t))((\alpha - r)dt + \sigma dW(t)))X(t) + c(t)dt, \\ &c(t) = (r(t) - r^*(t))V^*(t), \end{aligned}$$

In der Vertragsperiode werden der technischen Reserve keine Dividende hinzugefügt, also haben wir $b(t) = b(0)$. Andererseits muss das Unternehmen beim Ablauf, zusätzlich zu $b(0)$, noch eine Bonussumme auszahlen, die als eine Funktion $\Theta(X(n))$ der Form (26) ausgedrückt werden kann. Es ist nun möglich eine deterministische Differentialgleichung für die Gesamtheit der Rückstellungen V, die die Black-Scholes Gleichung verallgemeinert, abzuleiten:

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial}{\partial t}V(t,x) = rV(t,x) + \pi - \tfrac{\partial}{\partial x}V(t,x)(rx + c(t)) - \tfrac{1}{2}\Theta^2(t,x)\sigma^2 x^2 \tfrac{\partial^2}{\partial x^2}V(t,x), \\ &V(n,x) = b(0) + \Phi(x). \end{aligned} \tag{27}$$

Die Differentialgleichung (27) ist ein deterministisches Werkzeug zur Bestimmung von $V(t, X(t))$. Eine Differentialgleichung des Saldierens der Gesamtheit der Rückstellungen kann, nach Gleichung (18), folgendermaßen abgeleitet werden :

$$dV(t,X(t)) = rV(t,X(t))dt + \pi dt + \tfrac{\partial}{\partial x}V(t,X(t))\Theta(t,X(t))X(t)((\alpha - r)dt + \sigma dW(t)).$$

Vergleichen wir dies mit der Dynamik in (5), können wir ein Hedging Portfolio von der folgenden Beziehung, die h^1 bestimmt, konstruieren:

$$\tfrac{\partial}{\partial x}V(t,X(t))\Theta(t,X(t))X(t) = h^1(t)S^1(t)$$

und h^0 wird dann vom Rest bestimmt. Die Lösung der Gleichung (27) hat folgende Form

$$V(t,u) = e^{-r(n-t)}(b(0) + \mathbb{E}^Q_{t,x}[\Phi(X(n))]) - \textstyle\int_t^n e^{-r(s-t)}\pi ds$$

wobei $\mathbb{E}^Q_{t,s}$ den Erwartungswert unter Q bedingt durch $X(t) = x$ darstellt. Für bestimmte Bedingungen an Θ und Φ, ist es möglich eine explizite Formel abzuleiten.

2.2 Bardividende

Wir betrachten nun die Bardividende. Die Investition wird durch eine Funktion Θ bestimmt, so dass $\eta^1(t)S^1(t)/X(t) = \Theta(t, X(t))$. Bardividende ist durch die direkte Auszahlung von Dividenden an den Versicherungsnehmer gegeben. Garantierte Zahlungen π und $b(0)$ werden fällig, aber der Versicherungsnehmer bekommt eine Barprämienzahlung $(r^\delta(t) - r^*(t))V^*(t)$. Wir können diese Prämienzahlungen mit unverteilten Rückstellungen durch eine Funktion Φ in Verbindung verbringen

$$r^\delta(t) = r^*(t) + \tfrac{\Phi(t,X(t))}{V^*(t)}.$$

Die Bonuszahlungen und die Dynamik von $X(t)$ werden

$$(r^\delta(t) - r^*(t))V^*(t) = \Phi(t, X(t))$$

und

$$dX(t) = (rdt + \Theta(t, X(t))((\alpha - r)dt + \sigma dW(t)))X(t) + c(t)dt - \Theta(t, X(t))dt.$$

Wir können an eine Funktion in der Form der Gleichung (26) denken. Es ist wieder möglich eine Differentialgleichung für die Funktion $V(t, x)$ abzuleiten

$$\begin{aligned}&\tfrac{\partial}{\partial t}V(t,x) = rV(t,x) + \pi - \Phi(t,x) - \tfrac{\partial}{\partial x}V(t,x)(rx + c(t) - \Phi(t,x)) - \tfrac{1}{2}\Theta^2(t,x)\sigma^2 x^2 \tfrac{\partial^2}{\partial x^2}V(t,x),\\ &V(n,x) = b(0).\end{aligned} \tag{28}$$

Die Differentialgleichung des Saldierens der Gesamtheit der Rückstellungen wird

$$\begin{aligned}dV(t,X(t)) &= rV(t,X(t))dt + \pi dt - \Phi(t,X(t))dt +\\ &\tfrac{\partial}{\partial x}V(t,X(t))(\Theta(t,X(t))((\alpha - r)dt + \sigma dW(t))X(t)).\end{aligned}$$

und das Heding Portfolio der Aktien wird folgendermaßen bestimmt

$$\tfrac{\partial}{\partial x}V(t,X(t))\Theta(t,X(t))X(t) = h^1(t)S^1(t).$$

Die Lösung der Gleichung (28) hat folgende Form :

$$V(t,x) = e^{-r(n-t)}b(0) + \textstyle\int_t^n e^{-r(s-t)}(\mathbb{E}^Q_{t,x}[\Phi(s,X(s))] - \pi)ds.$$

Für bestimmte Bedingungen an Θ und Φ, ist es möglich eine explizite Formel abzuleiten.

2.3 Mehrwert

Der Mehrwert ist der Bonus wo die Dividendenzahlungen zu der technischen Reserve addiert werden und wo die garantierte Überlebenssumme erhöht wird. Garantierte Zahlungen π und $b(n)$ werden fällig, wobei $b(n) = V^*(n)$ die Endüberlebenssumme ist, mit der Akkumulation von früheren Dividenden. Die Investition wird durch eine Funktion Θ bestimmt, so dass $\eta^1(t)S^1(t)/X(t) = \Theta(t, V^*(t), X(t))$ und wir können die Prämienzahlungen mit unverteilten Rückstellungen durch eine Funktion Φ in Verbindung verbringen

$$r^\delta(t) = r^*(t) + \tfrac{\Phi(t,V^*(t),X(t))}{V^*(t)}.$$

Die Dividendenzahlungen und die Dynamiken von X und V^* werden

$$(r^\delta(t) - r^*(t))V^*(t) = \Phi(t, X(t)),$$

$$\begin{aligned} dX(t) = &(rdt + \Theta(t, V^*(t), X(t))((\alpha - r)dt + \sigma dW(t)))X(t) + \\ &(r(t) - r^*(t))V^*(t)dt - \Phi(t, X(t), V^*(t))dt \end{aligned}$$

und

$$dV^*(t) = r^*V^*(t)dt + \pi dt + \Phi(t, X(t), V^*(t))dt.$$

Wir können an eine Funktion in der Form der Gleichung (26) denken. Es ist nun möglich eine Differentialgleichung für die Funktion $V(t, v, x)$ abzuleiten

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial}{\partial t}V(t, v, x) = &rV(t, v, x) + \pi \\ &-\tfrac{\partial}{\partial x}V(t, v, x)(rx + (r - r^*)v - \Phi(t, v, x)) \\ &-\tfrac{\partial}{\partial v}V(t, v, x)(r^*v + \pi + \Phi(t, v, x)) \\ &-\tfrac{1}{2}\Theta^2(t, v, x)\sigma^2 x^2 \tfrac{\partial^2}{\partial x^2}V(t, v, x), \\ V(n, v, x) = &v. \end{aligned} \tag{29}$$

Die Differentialgleichung des Saldierens der Gesamtheit der Rückstellungen wird

$$\begin{aligned} dV(t, V^*(t), X(t)) = &rV(t, V^*(t), X(t))dt + \pi dt \\ &+\tfrac{\partial}{\partial x}V(t, V^*(t), X(t))\Theta(t, V^*(t), X(t))X(t) \\ &\times((\alpha - r)dt + \sigma dW(t)), \end{aligned}$$

und das Heding Portfolio der Aktien wird folgendermaßen bestimmt

$$\tfrac{\partial}{\partial x}V(t, V^*(t), X(t))\Theta(t, V^*(t), X(t))X(t) = h^1(t)S^1(t).$$

Die Lösung der Gleichung (29) hat folgende Form :

$$V(t, v, x) = \textstyle\int_t^n e^{-r(s-t)}(\mathbb{E}^Q_{t,v,u}[V^*(n)] - \pi)ds,$$

wobei $\mathbb{E}^Q_{t,v,u}$ den Erwartungswert unter Q, mit den Bedingungen $V^*(t) = v$ und $X(t) = x$, darstellt. Für bestimmte Bedingungen an Θ und Φ, ist es möglich eine explizite Formel abzuleiten.

3 Verallgemeinerungen der Modelle

In diesem Kapitel wurde der Finanzmarkt durch das Binomialmodell und das Black-Scholes Modell modelliert. Oft sind diese Modelle zu einfach um die Effekte, die im realen Finanzmarkt auftreten, abzudecken. Wir werden also mögliche Verallgemeinerungen der Modelle betrachten die die Modelle realistischer machen.

3.1 Stochastische Verzinsung im Black-Scholes Modell

Im Kapitel 3 ist ein stochastisches Modell vorgestellt worden, wo die Dynamik der Verzinsung durch

$$dr(t) = \nu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dW^r(t),$$

gegeben ist, wobei W^r ein Wiener Prozess ist. Wir können nun die deterministische Verzinsung im Black-Scholes Modell mit so einer Verzinsung ersetzen. Wir können auch zulassen dass die zwei Wiener Prozesse W und W^r korreliert sind. Die Menge der arbitragefreien Preise von einem bedingten Anspruch X wird

$$\Pi^Q(t, X) = \mathbb{E}_t^Q[e^{-\int_t^n r(s)ds} X], \quad Q \in \mathbf{Q} \tag{30}$$

wobei $\mathbf{Q}$ eine Menge von Martingalmaßen ist. Falls wir die Preise $P(t, n)$ der Nullcoupons kennen und die Unabhängigkeit zwischen r und S^1 unter Q annehmen, kriegen wir folgende Preisformel

$$\Pi(t, X) = P(t, n)\mathbb{E}_t^Q[X] \tag{31}$$