

# Quantitative Risk Management

Copulas und Abhängigkeit

Johannes Paschetag

Mathematisches Institut  
der  
Universität zu Köln

Wintersemester 2009/10  
Betreuung: Prof. Schmidli, J. Eisenberg

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Copulas</b>	<b>1</b>
1.1	Erste Eigenschaften . . . . .	1
1.2	Beispiele . . . . .	4
1.3	Meta Verteilungen . . . . .	6
1.4	Weitere Eigenschaften . . . . .	7
1.5	Perfekte Abhängigkeit . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Abhängigkeitsmaße</b>	<b>9</b>
2.1	Lineare Korrelation . . . . .	9
2.2	Rangkorrelation . . . . .	12
2.3	Koeffizienten der Flankenabhängigkeit . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Flankenabhängigkeit bei Normal Gemischten Copulas</b>	<b>15</b>
<b>4</b>	<b>Archimedische Copulas</b>	<b>16</b>
4.1	Bivariate Archimedische Copulas . . . . .	16
4.2	Multivariate Archimedische Copulas . . . . .	18

# 1 Copulas

Jede gemeinsame VF eines Zufallsvektors beinhaltet zum Einen die jeweiligen Randverteilungen der einzelnen Komponenten des Vektors, zum Anderen eine Beschreibung der Abhängigkeiten untereinander. Durch eine Copula kann die Abhängigkeitsstruktur isoliert werden. Wir sehen Copulas als extrem nützliches Werkzeug an und zeigen in diesem Kapitel einige Vorteile. Sie helfen uns, Abhängigkeiten gründlicher zu studieren. Ebenso verdeutlichen sie, welche Fallen auftreten können, wenn man Abhängigkeiten nur über Korrelationskoeffizienten beschreiben möchte.

Copulas drücken Abhängigkeiten auf einer Quantil-Skala aus, welches sehr vorteilhaft bei der Beschreibung von extremen Schadenfällen (siehe VaR und ES) ist. Ebenso erleichtern sie einen Bottom-Up-Ansatz in multivariaten Modellen, wo mehr über die Verteilung einzelner Risikofaktoren bekannt ist als über ihre Abhängigkeit untereinander. Über unseren Copula-Ansatz können wir gegebene Randverteilungen mit verschiedenen Abhängigkeitsstrukturen zu gemeinsamen VF kombinieren und so das Gesamtrisiko untersuchen.

## 1.1 Erste Eigenschaften

### Definition 1.1

*Eine  $d$ -dimensionale Copula ist eine VF auf  $[0, 1]^d$  mit standard gleichverteilten Randverteilungen. Wir bezeichnen Copulas stets mit  $C(\mathbf{u}) = C(u_1, \dots, u_d)$ . Für eine Copula  $C$  müssen folgende drei Eigenschaften gelten:*

- (1)  $C(u_1, \dots, u_d)$  ist monoton steigend in jeder Komponente.
- (2)  $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$  für Komponente  $u_i \in [0, 1]$ .
- (3) Für alle  $(a_1, \dots, a_d), (b_1, \dots, b_d) \in [0, 1]^d$  mit  $a_i \leq b_i$  gilt:

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_d=1}^2 (-1)^{i_1+\dots+i_d} C(u_{1i_1}, \dots, u_{di_d}) \geq 0 \quad (1)$$

wobei  $u_{j1} = a_j$  und  $u_{j2} = b_j$  für alle  $j \in \{1, \dots, d\}$ .

Die erste Eigenschaft gilt für jede VF und die zweite folgt sofort daraus, dass die Randverteilungen standard gleichverteilt sein sollen. Eigenschaft

drei, auch Rechteck-Ungleichung genannt, stellt sicher, dass keine negativen WKTen auftreten können. Jede Funktion  $C$  mit diesen Eigenschaften ist eine Copula.

### Korollar 1.2

Sei  $G$  VF und  $G^{\leftarrow}(y) = \inf\{x : G(x) \geq y\}$  die verallgemeinerte Inverse.

(1) **Quantil-Transformation.** Sei  $U \sim U(0,1)$  standard normal verteilt, dann gilt  $P(G^{\leftarrow}(U) \leq x) = G(x)$ .

(2) **Wahrscheinlichkeits-Transformation.** Wenn  $Y$  VF  $G$  hat, wobei  $G$  eine stetige, univariate VF, dann gilt  $G(Y) \sim U(0,1)$ .

*Beweis.* Sei  $y \in \mathbb{R}$  und  $u \in (0,1)$ . Die erste Gleichung folgt aus  $G(y) \geq u \Leftrightarrow G^{\leftarrow}(u) \leq y$

Für die zweite Gleichung zeigen wir  $P(G(Y) \leq u) = P(G^{\leftarrow} \circ G(Y) \leq G^{\leftarrow}(u)) = P(Y \leq G^{\leftarrow}(u)) = G \circ G^{\leftarrow}(u) = u$  ■

Korollar 1.2.ii) ist die Grundlage für stochastische Simulationen. Wir berechnen Pseudozufallszahlen, die gleichverteilt auf  $(0,1)$  sind und berechnen dann die Inverse der verallgemeinerten VF  $G$ . Man erhält Zufallszahlen mit VF  $G$ . Ebenfalls können dadurch Zufallsvariablen in andere ZV transformiert werden.

### Theorem 1.3 (Sklars Theorem)

Sei  $F$  gemeinsame VF mit Randverteilungen  $F_1, \dots, F_d$ . Dann existiert eine Copula  $C : [0,1]^d \rightarrow [0,1]$ , so dass  $\forall x_1, \dots, x_d \in \bar{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) \quad (2)$$

Bei stetigen Randverteilungen ist  $C$  eindeutig, ansonsten nur auf dem Bildbereich  $\text{Im}F_1 \times \dots \times \text{Im}F_d$  mit  $\text{Im}F_i = F_i(\bar{\mathbb{R}})$  Seien umgekehrt  $C$  eine Copula und  $F_1, \dots, F_d$  univariate VFen. Dann ist  $F$  nach Formel (2) eine gemeinsame VF mit Randverteilungen  $F_1, \dots, F_d$ .

*Beweis.* Zeige Existenz und Eindeutigkeit falls  $F_1, \dots, F_d$  stetige Randverteilungen sind. Nach Proposition 2.ii) und Definition 1.1 ist die VF von  $(F_1(X_1), \dots, F_d(X_d))$  eine Copula, bezeichnet mit  $C$ . Daraus folgt Formel (2). Mit  $x_i = F_i^{\leftarrow}(u_i)$  erhalten wir

$$C(u_1, \dots, u_d) = F(F_1^{\leftarrow}(u_1), \dots, F_d^{\leftarrow}(u_d)) \quad (3)$$

wodurch  $C$  eindeutig durch  $F$  und  $F_1, \dots, F_d$  bestimmt ist. Nehmen wir nun an, dass  $C$  eine Copula ist und  $F_1, \dots, F_d$  univariate VFn. Wir konstruieren eine  $d$ -dimensionale ZV mit VF (2): Sei  $\mathbf{U}$  ZV mit VF  $C$ , dann setze  $X := (F_1^{\leftarrow}(U_1), \dots, F_d^{\leftarrow}(U_d))$ . Wir weisen nach

$$\begin{aligned} P(X_1 \leq x_1, \dots, X_d \leq x_d) &= P(F_1^{\leftarrow}(U_1) \leq x_1, \dots, F_d^{\leftarrow}(U_d) \leq x_d) \\ &= P(U_1 \leq F_1(x_1), \dots, U_d \leq F_d(x_d)) \\ &= C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)). \end{aligned}$$

Die Formeln (2) und (3) sind fundamental. Erstere zeigt, wie gemeinsame Verteilungen  $F$  mithilfe von Copulas aus Randverteilungen entstehen können. Formel (3) zeigt, wie Copulas aus multivariaten VFn mit stetigen Randverteilungen gewonnen werden können. Außerdem erfährt man mehr über die Abhängigkeit der Quantile, da  $C(u_1, \dots, u_d)$  genau die WKT ist, dass  $X_1$  unter seinem  $u_1$ -Quantil liegt etc. ■

#### **Definition 1.4**

Sei  $X$  ZV mit VF  $F$ ,  $F_1, \dots, F_d$  seien stetige Randverteilungen. Dann ist die Copula zu  $X$  die VF  $C$  von  $(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))$

Das Copulakonzept ist etwas unnatürlich für mehrdimensionale diskrete Verteilungen. Dies liegt daran, dass bei nicht-stetigen Randverteilungen mehrere Möglichkeiten für eine Copula bestehen, um damit die gemeinsame VF zu bilden.

#### **Beispiel 1.5**

Sei  $(X_1, X_2)$  ZV mit bivariater Bernoulliverteilung, genauer gelte

$$P(X_1 = 0, X_2 = 0) = \frac{1}{8}, P(X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{3}{8}$$

$$P(X_1 = 0, X_2 = 1) = \frac{2}{8}, P(X_1 = 1, X_2 = 0) = \frac{2}{8}.$$

Also besitzen  $X_1$  und  $X_2$  die gleichen Randverteilungen. Nach Sklars Theorem gilt  $P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) = C(P(X_1 \leq x_1), P(X_2 \leq x_2))$ . Da aber  $\text{Im}F_1 = \text{Im}F_2 = \{0, \frac{3}{8}, 1\}$  ist  $C(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}) = \frac{1}{8}$  die einzige (zusätzliche) Bedingung an eine Copula  $C$ , damit sie Copula zur ZV  $X$  ist. Dies erfüllen unendlich viele.

### Korollar 1.6

Sei  $(X_1, \dots, X_d)$  Zufallsvektor mit stetigen Randverteilungen  $F_1, \dots, F_d$  und Copula  $C$ . Seien  $T_1, \dots, T_d$  streng monoton wachsende Funktionen. Dann hat  $(T_1(X_1), \dots, T_d(X_d))$  ebenfalls Copula  $C$ .

### Theorem 1.7 (Frechet-Grenzen)

Für jede Copula  $C$  gelten folgende Grenzen:

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^d u_i + 1 - d, 0 \right\} \leq C(\mathbf{u}) \leq \min\{u_1, \dots, u_d\} \quad (4)$$

*Beweis.* Die zweite Ungleichung ist klar, da für alle  $i$  gilt

$$\bigcap_{1 \leq j \leq d} \{U_j \leq u_j\} \subset \{U_i \leq u_i\}$$

Desweiteren gilt mit  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d)$

$$\begin{aligned} C(\mathbf{u}) &= P\left(\bigcap_{1 \leq i \leq d} \{U_i \leq u_i\}\right) \\ &= 1 - P\left(\bigcup_{1 \leq i \leq d} \{U_i > u_i\}\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^d P(U_i > u_i) \\ &= 1 - d + \sum_{i=1}^d u_i \end{aligned}$$

■

## 1.2 Beispiele

a) Unabhängigkeitscopula:

$$C(u_1, \dots, u_d) = \prod(u_1, \dots, u_d) = \prod_{i=1}^d u_i \quad (5)$$

Aus Sklars Theorem folgt sofort, dass bei stetigen Randverteilungen die ZVen genau dann unabhängig sind, wenn ihre Copula die Unabhängigkeitscopula ist.

b) Die **Komonotonie-Copula** ist die obere Frechet-Grenze aus Formel (4).

$$C(u_1, \dots, u_d) = M(u_1, \dots, u_d) = \min\{u_1, \dots, u_d\} \quad (6)$$

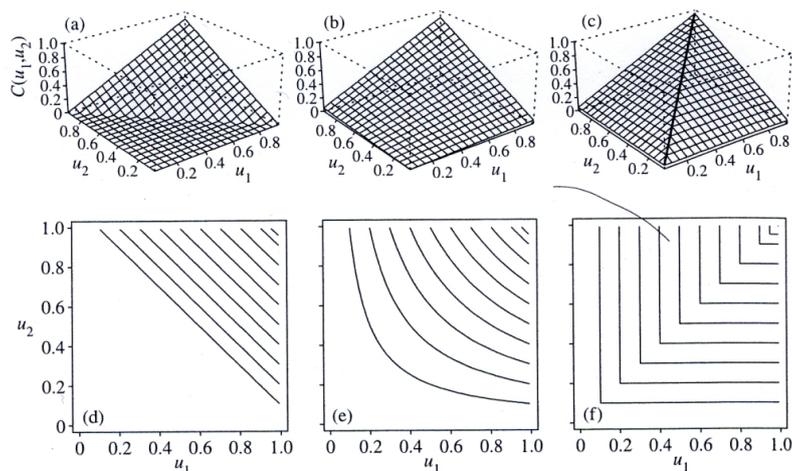
Dies ist die Copula des Zufallsvektor  $(U, \dots, U)$  wobei  $U$  standard gleichverteilt ist, d.h. gleichverteilt auf  $[0, 1]$ . Ebenso gilt dies für den Zufallsvektor  $(X_1, \dots, X_d)$  mit stetigen Randverteilungen und perfekter positiver Abhängigkeit, d.h.  $X_i = T_i(X_1)$  für alle anderen  $i$  und monoton steigende Funktionen  $T_i$ . Die Komonotonie-Copula repräsentiert also perfekte Abhängigkeit.

c) Die **Kontramotonie-Copula** ist die zweidimensionale untere Frechet-Grenze, also

$$C(u_1, u_2) = W(u_1, u_2) = \max\{u_1 + u_2 - 1, 0\} \quad (7)$$

Diese Copula bezeichnet perfekte negative Abhängigkeit und gehört zur ZV  $(\mathbf{U}, \mathbf{1}-\mathbf{U})$ , wobei  $\mathbf{U}$  wieder standard gleichverteilt ist. Dieses Konzept kann nicht auf höhere Dimensionen als zwei ausgeweitet werden.

Die Frechet-Grenzen implizieren sofort, dass jede bivariate Copula zwischen den Oberflächen von Beispiel b) und c) liegt.



**Figure 5.1.** (a)–(c) Perspective plots and (d)–(f) contour plots of the three fundamental copulas: (a), (d) countermonotonicity, (b), (e) independence and (c), (f) comonotonicity. Note that these are plots of distribution functions.

d) Sei  $\mathbf{Y} \sim N_d(\mu, \Sigma)$  eine Gauss-Verteilte ZV, dann ist die zugehörige Copula eine s.g. **Gauß-Copula**. Nach Korollar 6 besitzt  $\mathbf{Y}$  dieselbe Copula wie  $\mathbf{X} \sim N_d(0, P)$  wobei  $P = \vartheta(\Sigma)$  Die Gauß-Copula ist also gegeben durch

$$C_P^{Ga}(u) = P(\Phi(X_1) \leq u_1, \dots, \Phi(X_d) \leq u_d) = \Phi_P(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_d)) \quad (8)$$

wobei  $\Phi$  VF einer standard normal verteilten ZV ist und  $\Phi_P$  die gemeinsame VF der ZV  $\mathbf{X}$ . Die Notation  $C_P^{Ga}$  legt nahe, dass die Copula durch die  $\frac{1}{2}d(d-1)$  Parameter der Korrelationsmatrix bestimmt wird. Im bivariaten Fall schreiben wir  $C_\rho^{Ga}$ , wobei  $\rho = \rho(X_1, X_2)$  Die Gauß-Copula hat keine geschlossene Form, kann jedoch über ein Integral über die Dichte von  $\mathbf{X}$  ausgedrückt werden. Der Parameter  $\rho$  drückt die Strenge der Abhängigkeit aus.

e) Die **t-Copula** ist gegeben durch

$$C_{v,P}^t(\mathbf{u}) = t_{v,P}(t_v^{-1}(u_1), \dots, t_v^{-1}(u_d)) \quad (9)$$

wobei  $t_v$  VF einer standard univariaten t-Verteilung,  $t_{v,P}$  gemeinsame VF des Zufallsvektors  $\mathbf{X} \sim t_d(v, 0, P)$  und P Korrelationsmatrix.

f) Die bivariate **Gumbel-Copula** ist gegeben durch

$$C_\theta^{Gu}(u_1, u_2) = \exp\{-((-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta)^{1/\theta}\} \quad (10)$$

wobei für den Parameter  $\theta$  gilt:  $1 \leq \theta < \infty$ . Hier steht  $\theta = 1$  für Unabhängigkeit.

g) Die **Clayton-Copula** ist gegeben durch

$$C_\theta^{Cl}(u_1, u_2) = (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-1/\theta} \quad (11)$$

Die Gauß- und t-Copula haben jeweils keine geschlossene Form. Für die Gumbel- und Clayton Copula existiert eine geschlossene Form. Letztere gehören zum Familie der Archimedischen Copulas, siehe Kapitel 4.

### 1.3 Meta Verteilungen

Die Umkehrung von Sklars Theorem stellt eine sehr starke Technik zur Verfügung, um multivariate Verteilungen mit beliebigen Randverteilungen und

Copulas zu konstruieren. Zu beliebigen Randverteilungen  $F_1, \dots, F_d$  und einer Copula  $C$  definiert man als gemeinsame VF  $F(\mathbf{x}) := C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))$ . Das Ergebnis  $\mathbf{x}$  hat Copula  $C$  und Randverteilungen  $F_1, \dots, F_d$ . Ein Modell mit beliebigen Randverteilungen und Gauss-Copula ist bekannt als meta-Gauss Verteilung etc. für beliebige andere Copulas.

#### 1.4 Weitere Eigenschaften

Sei  $X$  Zufallsvektor mit multivariater Überlebensfunktion  $\bar{F}$ , mit Randverteilungsfunktionen  $F_1, \dots, F_d$  und Randüberlebensfunktionen  $\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_d$  z.B.  $\bar{F} = 1 - F_i$  Dann gilt

$$\bar{F}(x_1, \dots, x_d) = \hat{C}(\bar{F}_1(x_1), \dots, \bar{F}_d(x_d)) \quad (12)$$

für eine Copula  $\hat{C}$ , genannt Überlebenscopula. Für stetige Randverteilungen ist dies gegeben durch  $\bar{F}(x_1, \dots, x_d) = P(X_1 > x_1, \dots, X_d > x_d) = P(1 - F_1(X_1) \leq \bar{F}_1(x_1), \dots, 1 - F_d(X_d) \leq \bar{F}_d(x_d))$  und schreibe  $\hat{C}$  für die VF von  $\mathbf{1-U}$ , wobei  $\mathbf{U} := (F_1(X_1), \dots, F_d(X_d))$ . Im Allgemeinen bezeichnet die Überlebenscopula die VF von  $\mathbf{1-U}$ , wenn  $C$  Copula zu  $\mathbf{U}$  ist.

#### Definition 1.8

Ein Zufallsvektor  $\mathbf{X}$  ist radial-symmetrisch bzgl.  $\mathbf{a}$ , falls:

$$\mathbf{X} - \mathbf{a} \stackrel{d}{=} \mathbf{a} - \mathbf{X}$$

Ein elliptischer Zufallsvektor  $X \sim E_d(\mu, \Sigma, \Psi)$  ist offensichtlich radial-symmetrisch bzgl.  $\mu$ . Falls  $\mathbf{U}$  VF  $C$  hat,  $C$  ist Copula, dann ist  $(0.5, \dots, 0.5)$  das einzige mögliche Zentrum der Symmetrie, also gilt für eine radial-symmetrische Copula:

$$(U_1 - 0.5, \dots, U_d - 0.5) \stackrel{d}{=} (0.5 - U_1, \dots, 0.5 - U_d) \Leftrightarrow \mathbf{U} \stackrel{d}{=} \mathbf{1-U}$$

Dies impliziert für eine radial-symmetrische Copula  $C$  und ihre Überlebenscopula  $\hat{C} = C$ .

## 1.5 Perfekte Abhängigkeit

In Abschnitt 1.2 haben wir gesehen, dass stetig verteilte ZVen, welche jeweils streng monoton wachsende Funktionen einer anderen sind, als Copula die obere Frechet-Grenze besitzen.

### Definition 1.9

Die ZV  $X_1, \dots, X_d$  ist komonoton, falls sie die obere Frechet-Grenze als Copula besitzt.

### Korollar 1.10

ZV  $X_1, \dots, X_d$  ist genau dann komonoton, falls gilt:

$$(X_1, \dots, X_d) \stackrel{d}{=} (v_1(Z), \dots, v_d(Z)) \quad (13)$$

für eine ZV  $Z$ .

Bemerkung: Eine wichtige Eigenschaft von komonotonen Risiken ist, dass ihre Quantile additiv sind.

### Definition 1.11

Die zweidimensionale ZV  $(X_1, X_2)$  ist kontramonoton falls die untere Frechet-Grenze eine passende Copula ist.

### Korollar 1.12

ZV  $(X_1, X_2)$  ist genau dann kontramonoton, falls gilt

$$(X_1, X_2) \stackrel{d}{=} (v_1(Z), v_2(Z))$$

für eine ZV  $Z$  und eine steigende Funktion  $v_1$  und fallende Funktion  $v_2$  (oder andersherum).

### Beispiel 1.13

Sei  $X_1$  positive ZV und  $X_2 = \frac{1}{X_1}$ ,  $X_3 = e^{-X_1}$ . Offensichtlich sind  $(X_1, X_2)$  und  $(X_1, X_3)$  kontramonotone Zufallsvektoren, jedoch  $(X_2, X_3)$  komonoton und die zu  $(X_1, X_2, X_3)$  gehörende Copula ist die VF zum Zufallsvektor  $(U, 1 - U, 1 - U)$ , d.h.  $C(u_1, u_2, u_3) = \max\{\min\{u_2, u_3\} + u_1 - 1, 0\}$

## 2 Abhängigkeitsmaße

Wir betrachten drei verschiedene Arten, um Abhängigkeiten zu messen: Der lineare Korrelationskoeffizient nach Pearson, die Rangkorrelation und die Koeffizienten der Flankenabhängigkeit.

Alle drei Methoden liefern einen skalaren Wert, der die Abhängigkeit eines Paares von Zufallsvariablen  $X_1$  und  $X_2$  beschreibt, obwohl diese Methoden unterschiedliche Eigenschaften besitzen.

Im Risikomanagement und in der Finanzmathematik spielen Korrelationen eine wichtige Rolle.

Wie gesehen werden elliptische Verteilungen bereits vollständig durch ihren Erwartungswert(vektor), die Kovarianzmatrix sowie eine charakteristische Funktion beschrieben. Da Erwartungswert und Varianz durch die Randverteilungen bestimmt sind, hängen Copulas von elliptischen Verteilungen nur von Kovarianzmatrix und charakteristischer Funktion ab. In allgemeineren Verteilungen ist dies nicht mehr gegeben. Hier werden Copulas nützlich sein, um Korrelationen zu beschreiben.

Die anderen beiden Methoden, Rangkorrelation und Flankenabhängigkeit, basieren auf den jeweiligen Copulas.

### 2.1 Lineare Korrelation

Die Korrelation  $\rho(X_1, X_2)$  zwischen zwei ZVen  $X_1$  und  $X_2$  misst lineare Abhängigkeit und nimmt Werte zwischen -1 und 1 an. Bei Unabhängigkeit folgt  $\rho = 0$ . Die Rückrichtung ist hier falsch (siehe Beispiele in der Vorlesung Einführung in die Stochastik). Falls  $|\rho| = 1$  sind  $X_1$  und  $X_2$  perfekt linear abhängig, d.h. es existieren  $a$  und  $b \in \mathbb{R}$  so das  $X_1 = a + bX_2$ . Für  $\rho = 1$  ist  $b > 0$  und es handelt sich um perfekte positive lineare Abhängigkeit, für  $\rho = -1$  ist  $b < 0$  und es handelt sich um perfekte negative lineare Abhängigkeit. Für positive Konstanten  $b_1, b_2 > 0$  gilt sogar

$$\rho(a_1 + b_1X_1, a_2 + b_2X_2) = \rho(X_1, X_2)$$

D.h. die Korrelation ist invariant unter streng monoton steigender linearer Transformation. Für beliebig streng monoton steigende Funktionen ist dies im Allgemeinen falsch. Diese Korrelation ist nur für endliche Varianzen definiert, was bei heavy-tailed Verteilungen zu Problemen führt.

Wir zeigen noch zwei Trugschlüsse auf:

**Trugschluss 1:** Die Randverteilungen und paarweise Korrelation einer mehrdimensionalen ZV bestimmen die gemeinsame VF.

Seien  $X_1$  und  $X_2$  ZVen mit FVen  $F_1$  und  $F_2$ . Die gemeinsame VF sei  $C((F_1(x_1), F_2(x_2)))$  wobei  $C$  eine Copula bezeichnet. Der lineare Korrelationskoeffizient sei  $\rho$ . Es ist immer möglich, eine zweite Copula  $C_2$  ungleich  $C$  und einen Zufallsvektor  $(Y_1, Y_2)$  zu konstruieren, sodass  $Y_i$  die gleiche Randverteilung wie  $X_i$  besitzen, ihre gemeinsame VF jedoch durch  $C_2$  gegeben ist. Das folgende Beispiel veranschaulicht dies:

### Beispiel 2.1

Wir betrachten zwei ZVen, die Gewinne und Verluste von zwei Portfolios bezeichnen. Angenommen, beide ZVen seien standard normalverteilt mit Korrelation Null. Zunächst erfüllt der Zufallsvektor  $\mathbf{X} \sim N_2(\mathbf{0}, I_2)$  dieses Szenario. Sei  $V$  nun eine von  $X$  unabhängige ZV mit  $P(V = 1) = P(V = -1) = 0.5$ . Dann ist  $Y = (Y_1, Y_2) = (X_1, V \cdot X_1)$  ebenfalls unkorreliert mit standard normalen Randverteilungen. Diese Copula ist gegeben durch

$$C(u_1, u_2) = 0.5 \cdot \max\{u_1 + u_2 - 1, 0\} + 0.5 \cdot \min\{u_1, u_2\}$$

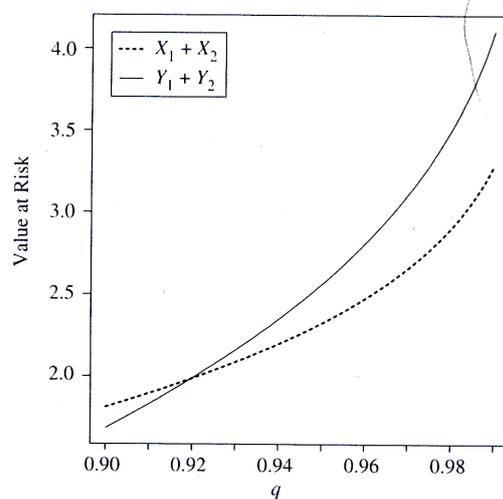
. Dieses zweite Modell bedeutet, dass wir bei Gewinn im 1. Fall mit jeweils WKT 0,5 einen Gewinn bzw. Verlust im zweiten Fall in gleicher Höhe einfahren. Wir können die gemeinsame VF für den Gesamtschaden  $X_1 + X_2$  bzw.  $Y_1 + Y_2$  berechnen:

$$P(X_1 + X_2 > k) = \bar{\phi}(k/\sqrt{2}), \quad P(Y_1 + Y_2 > k) = \frac{1}{2} \bar{\phi}\left(\frac{1}{2}k\right)$$

für  $\alpha > 0.75$  gilt

$$F_{X_1+X_2}^{\leftarrow}(\alpha) = \sqrt{2}\phi^{-1}(\alpha), \quad F_{Y_1+Y_2}^{\leftarrow}(\alpha) = 2\phi^{-1}(2\alpha - 1)$$

In unterer Abbildung ist der VaR für Quantile zwischen 0.9 und 0.99 abgebildet. Hier sieht man, dass extrem hohe Schäden im Modell 2 viel wahrscheinlicher sind als im ersten Modell, was jeden Finanz- und Versicherungsmathematiker beunruhigen sollte. Hieraus wird ebenfalls ersichtlich, dass der VaR einer Summe von Schäden nicht durch bekannte Randverteilungsfunktionen und paarweise Korrelationen bestimmt ist.



**Figure 5.7.** VaR for the risks  $X_1 + X_2$  and  $Y_1 + Y_2$  as described in Example 5.23. Both these pairs have standard normal margins and a correlation of zero;  $X_1$  and  $X_2$  are independent, whereas  $Y_1$  and  $Y_2$  are dependent.

**Trugschluss 2:** Für gegebene univariate VFn  $F_1$  und  $F_2$  und beliebigen Korrelationskoeffizienten  $\rho$  in  $[-1, 1]$  kann stets eine gemeinsame VF mit Randverteilungen  $F_1$  und  $F_2$  und Korrelation  $\rho$  erzeugt werden.

Falls  $F_1$  und  $F_2$  Randverteilungen einer elliptischen Verteilung sind, so ist diese Aussage wahr. Im Allgemeinen jedoch können die „erreichbaren Korrelationskoeffizienten“ ein Teilintervall von  $[-1, 1]$  bilden.

### Lemma 2.2

Angenommen  $(X_1, X_2)$  haben die gemeinsame VF  $F$  und Randverteilungen  $F_1$  und  $F_2$ . Dann ist die Kovarianz, sofern endlich, gegeben durch Formel:

$$\text{cov}(X_1, X_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (F(x_1, x_2) - F_1(x_1)F_2(x_2)) dx_1 dx_2 \quad (14)$$

### Theorem 2.3

Sei  $X$  ein Zufallsvektor mit Randverteilungsfunktionen  $F$  mit endlichen jedoch positiven Varianzen und unbekannter gemeinsamer VF  $F$ . Dann gilt:

1. Die erreichbaren Korrelationen bilden ein Intervall  $[\rho_{\min}, \rho_{\max}]$  wobei  $\rho_{\min} \leq 0 \leq \rho_{\max}$
2. Die minimale Korrelation wird genau dann angenommen, wenn  $X_1$  und  $X_2$  kontramontan sind, die maximale Korrelation genau dann, wenn sie komonoton sind.

3.  $\rho_{\min} = -1$  genau dann, wenn  $X_1$  und  $-X_2$  die gleiche Art von Verteilung haben, analog ist  $\rho_{\max} = 1$  äquivalent dazu, dass  $X_1$  und  $X_2$  die gleiche Art von Verteilung besitzen.

*Beweis.* Wir zeigen ii) unter Benutzung von Lemma 2.2. Die Fréchet-Grenzen sagen uns, dass für beliebige VF  $F$  gilt:

$$\max\{F_1(x_1) + F_2(x_2) - 1, 0\} \leq F(x_1, x_2) \leq \min\{F_1(x_1), F_2(x_2)\}$$

Für feste Randverteilungen  $F_1$  und  $F_2$  ist der Integrand in Formel (10) punktweise maximal, wenn  $X_1$  und  $X_2$  die Copula der oberen Fréchet-Grenze besitzen. Dies bedeutet genau, dass  $X_1$  und  $X_2$  komonoton sind. Analog ist der Integrand minimal sofern  $X_1$  und  $X_2$  kontramonoton sind. Zu i): Natürlich gilt  $\rho_{\max} \geq 0$ . Der Fall  $\rho_{\max} = 0$  kann ausgeschlossen werden, da nach ii) dann  $\min\{F_1(x_1), F_2(x_2)\} = F_1(x_1) \cdot F_2(x_2)$  gelten müsste, was im Widerspruch zu positiver Varianz steht. Analog folgt  $\rho_{\min} < 0$ . iii) ist klar, da  $|\rho| = 1$  äquivalent zu linearer Abhängigkeit von  $X_1$  und  $X_2$  ist. ■

## 2.2 Rangkorrelation

Rangkorrelationen sind ebenfalls skalare Messungen der Abhängigkeit, hängen jedoch nur von der Copula einer bivariaten Verteilung ab und nicht mehr von den Randverteilungen. Der standard empirische Schätzer der Rangkorrelation hängt nur noch von der Ordnung der Daten ab. D.h. die Daten werden bzgl. einer Skala geordnet und eine Stichprobe wird nach Einordnung in diese Skala geschätzt. Die genauen numerischen Werte sind nicht mehr von Interesse. Der größte Vorteil der Rangkorrelation ist, dass dadurch Copulas bzgl. gegebener Daten kalibriert werden können. Wir betrachten Rangkorrelation nach Spearman und nach Kendall. Beide Methoden haben bessere Eigenschaften als die lineare Korrelation.

Wir betrachten zwei Punkte in  $\mathbb{R}^2$ , bezeichnet mit  $(X_1, X_2)$  und  $(\bar{X}_1, \bar{X}_2)$ : Wir sagen, die Punkte sind übereinstimmend, falls  $(x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2) > 0$ . Sei nun  $X$  Zufallsvektor und  $\bar{X}$  eine unabhängige Kopie. Wenn  $X_2$  dazu tendiert, mit  $X_1$  zu steigen, ist die WKT für Übereinstimmung gegenüber der WKT von Nicht-Übereinstimmung groß. Falls  $X_2$  bei steigendem  $X_1$  dazu tendiert, zu fallen, erhalten wir das Gegenteil. Dies ist Kendalls Rangkorrelation:

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = P((X_1 - \bar{X}_1)(X_2 - \bar{X}_2) > 0) - P((X_1 - \bar{X}_1)(X_2 - \bar{X}_2) < 0)$$

**Definition 2.4**

Zu zwei ZVen  $X_1$  und  $X_2$  ist Kendall's  $\tau$  gegeben durch:

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = E(\text{sign}((X_1 - \bar{X}_1)(X_2 - \bar{X}_2)))$$

wobei  $\bar{X}_1, \bar{X}_2$  eine unabhängige Kopie von  $X_1$  und  $X_2$  ist.

**Definition 2.5**

Spearman's Rho ist definiert als

$$\rho_s(X_1, X_2) = \rho(F_1(X_1), F_2(X_2))$$

Also ist Spearman's Rho die lineare Korrelation der durch die VFn transformierten ZVen, also bei stetigen VFn die lineare Korrelation ihrer eindeutigen Copula.

Viele Eigenschaften haben die beiden Methoden gemeinsam. Sie nehmen jeweils Werte im Intervall  $[-1, 1]$  an und sind Null für unabhängige ZVen. Eine Rangkorrelation von Null impliziert (auch hier) nicht die Unabhängigkeit. Anders als bei linearer Korrelation kann man zeigen, dass der Wert 1 angenommen wird, wenn  $X_1$  und  $X_2$  komonoton sind und -1 für Kontramotonie.

Wir zeigen, dass für stetige Randverteilungen beide Rangkorrelationen nur von der eindeutigen Copula abhängen. Daraus folgt sofort die Invarianz der Rangkorrelationen unter streng monoton steigenden Transformationen.

**Korollar 2.6**

Seien  $X_1$  und  $X_2$  ZVen mit stetigen Randverteilungen und eindeutiger Copula  $C$ . Dann sind die Rangkorrelationen gegeben durch:

$$\rho_s(X_1, X_2) = 12 \int_0^1 \int_0^1 (C(u_1, u_2) - u_1 u_2) du_1 du_2 \quad (15)$$

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) dC(u_1, u_2) - 1 \quad (16)$$

Trugschluss 1 aus Kapitel 2.1 bleibt weiterhin gültig: Randverteilungen und paarweise Rangkorrelationen implizieren noch nicht die gemeinsame VF  $F$ . Trugschluss 2 jedoch kann nun ausgeschlossen werden: Für jede Wahl von stetigen Randverteilungen kann eine bestimmte bivariate Verteilung mit beliebiger Rangkorrelation in  $[-1, 1]$  konstruiert werden. Eine einfache Möglichkeit ist es,

$$F(x_1, x_2) = \lambda W(F_1(x_1), F_2(x_2)) + (1 - \lambda)M(F_1(x_1), F_2(x_2)) \quad (17)$$

als gemeinsame VF für  $(X_1, X_2)$  zu nehmen. Die Korrelation von Spearman bzw. Kendall sind in diesem Fall

$$\rho_S(X_1, X_2) = \rho_\tau(X_1, X_2) = (1 - 2\lambda) \quad (18)$$

### 2.3 Koeffizienten der Flankenabhängigkeit

Wie die Rangkorrelation werden die Koeffizienten der Flankenabhängigkeit durch paarweise Abhängigkeit gemessen, welche nur von der Copula eines Paares von ZVen  $(X_1, X_2)$  mit stetigen Randverteilungen abhängt. Der Vorteil dieser Abhängigkeit ist, dass sie Auskunft über die Abhängigkeit in extremen Werten gibt (sog. Flanken). Zum Beispiel ist dies besonders interessant im Risikomanagement (VaR, ES). Im Fall der oberen Flankenabhängigkeit betrachten wir die WKT, dass  $X_2$  sein  $q$ -Quantil überschreitet unter der Bedingung, dass  $X_1$  sein  $q$ -Quantil überschreitet. Betrachte dann den Limes  $q$  gegen 1. Formal gilt:

$$\lambda_u := \lambda_u(X_1, X_2) = \lim_{q \rightarrow 1^-} P(X_2 > F_2^{*-}(q) | X_1 > F_1^{*-}(q)),$$

vorausgesetzt  $\lambda_u$  existiert. Falls  $\lambda_u > 0$  sagt man,  $X_1$  und  $X_2$  zeigen Abhängigkeit in der rechten Flanke, für  $\lambda_u = 0$  sind sie asymptotisch unabhängig. Analog wird der Koeffizient für untere Flankenabhängigkeit ( $\lambda_l$ ) definiert. Sofern  $X_1$  und  $X_2$  stetige Randverteilungen sind, erhalten wir einfache Ausdrücke für  $\lambda_l$  und  $\lambda_u$  mit der eindeutigen Copula  $C$ :

$$\lambda_l := \lambda_l(X_1, X_2) = \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{P(X_2 \leq F_2^{*-}(q), X_1 \leq F_1^{*-}(q))}{P(X_1 \leq F_1^{*-}(q))} = \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{C(q, q)}{q}$$

### 3 Flankenabhängigkeit bei Normal Gemischten Copulas

Betrachte ein Paar gleichverteilter ZVen  $(U_1, U_2)$  dessen Verteilung  $C(u_1, u_2)$  eine normal gemischte Copula ist. Dank der Radial-Symmetrie von  $C$  reicht es aus, den Koeffizienten für untere Flankenabhängigkeit zu betrachten. Es gilt

$$\lambda = \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{dC(q, q)}{dq} = 2 \lim_{q \rightarrow 0^+} P(U_2 \leq q | U_1 = q) \quad (19)$$

#### Beispiel 3.1

Betrachte die ZV  $(X_1, X_2) := (\Phi^{-1}(U_1), \Phi^{-1}(U_2))$  mit Copula  $C_\rho^{Ga}$  sodass  $(X_1, X_2)$  eine bivariate Normalverteilung mit standard normalen Randverteilungen und Korrelation  $\rho$  ist. Es folgt mit obiger Formel

$$\lambda = 2 \lim_{q \rightarrow 0^+} P(\phi^{-1}(U_2) \leq \phi^{-1}(q) | \phi^{-1}(U_1) = \phi^{-1}(q)) \quad (20)$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} P(X_2 \leq x | X_1 = x) \quad (21)$$

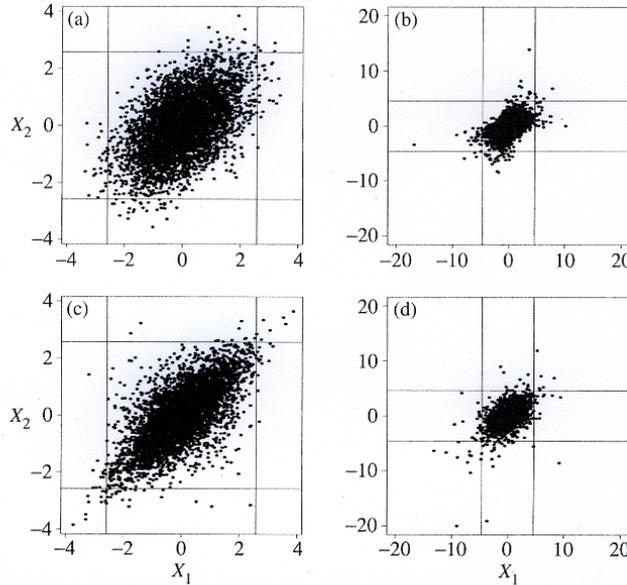
Dies konvergiert gegen Null!

Man kann zeigen, dass für eine t-Copula wir sowohl untere als auch obere Flankenabhängigkeit erhalten hätten (vorausgesetzt  $\rho > -1$ ).

In Abbildung 5.9 sind jeweils 5000 Punkte simuliert mit standard normalen Randverteilungen [a) und c)] bzw. t-Randverteilungen [b) und d)] und der Gauß-Copula [a) und b)] bzw. der t-Copula [c) und d)]. In den Abbildungen c) und d) erkennt man sowohl untere als auch obere Flankenabhängigkeit, bei a) und b) ist dies nicht gegeben.

#### Beispiel 3.2

Angenommen wir hätten tägliche Daten von 5 Aktien und wir sind unsicher, welches die beste multivariate elliptische Verteilung ist. Wie gehen von einer paarweisen Korrelation von  $\rho = 0.5$  für jeden Tag aus. Wenn die Daten also einer multivariaten Gauß-Verteilung folgen würden, ist die WKT dafür, dass an einem Tag alle Daten unter ihrem  $0.01$ -Quantil liegen, bei  $0.0000748$ . Dies passiert statistisch gesehen einmal alle 51.4 Jahre. Andererseits, wenn



**Figure 5.9.** Five thousand simulated points from four distributions. (a) Standard bivariate normal with correlation parameter  $\rho = 0.5$ . (b) Meta-Gaussian distribution with copula  $C_{\rho}^{\text{Ga}}$  and Student  $t$  margins with four degrees of freedom. (c) Meta- $t$  distribution with copula  $C_{4,\rho}^t$  and standard normal margins. (d) Standard bivariate  $t$  distribution with four degrees of freedom and correlation parameter  $\rho = 0.5$ . Horizontal and vertical lines mark the 0.005 and 0.995 quantiles. See Section 5.3.1 for a commentary.

wir eine multivariate  $t$ -Verteilung ansetzen mit 4 Freiheitsgraden, läge die WKT für obiges Ereignis 7.68 mal höher, was einer Dauer von alle 6.7 Jahre entspricht. Dies sind für einen Risk-Manager wesentliche Unterschiede.

## 4 Archimedische Copulas

Die Gumbel- und Clayton-Copula gehören zur Familie der Archimedischen Copulas. Copulas dieser Form sind sehr nützlich, um Portfolio Kreditrisiken zu modellieren.

### 4.1 Bivariate Archimedische Copulas

Wir kennen bereits die Gumbel- und Clayton-Copula, die zu dieser Familie gehören. Sie sind beide von der Form

$$C(u_1, u_2) = \phi^{-1}(\phi(u_1) + \phi(u_2)) \quad (22)$$

wobei  $\phi$  eine fallende Funktion von  $[0, 1]$  nach  $[0, \infty]$  ist mit  $\phi(0) = \infty$ . Solch eine Funktion wird auch Erzeuger der Copula genannt. Der Erzeuger zur

Gumbel-Copula ist z.B.  $\phi(t) = (-\ln t)^\theta$ , der Erzeuger zur Clayton-Copula ist  $\phi = \frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$

**Definition 4.1**

Sei  $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$  eine stetige und streng monoton fallende Funktion mit  $\phi(1) = 0$  und  $\phi(0) = \infty$  Wir definieren eine Pseudo-Inverse mit Definitionsbereich  $[0, \infty]$  durch

$$\phi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \phi^{-1}(t) & 0 \leq t \leq \phi(0) \\ 0, & \phi(0) < t \leq \infty \end{cases} \quad (23)$$

**Theorem 4.2**

Sei  $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$  eine stetige und streng monoton fallende Funktion mit Pseudo-Inverse  $\phi^{[-1]}(t)$  im Sinne der Definition 4.1 Dann ist

$$C(u_1, u_2) = \phi^{[-1]}(\phi(u_1) + \phi(u_2)) \quad (24)$$

genau dann eine Copula, wenn  $\phi$  konvex ist.

*Beweis.* Siehe Nelson (1999, Seite 91-92) ■

Alle nach diesem Prinzip konstruierten Copulas gehören zu den archimedischen Copulas.

**Bemerkung 4.3**

Die Kontramonotonie-Copula ist ein weiteres Beispiel für eine archimedische Copula. Der Erzeuger ist  $\phi = 1 - t$ .

Kendalls Rangkorrelation kann für Archimedische Copulas direkt aus dem Erzeuger berechnet werden:

Sei  $X_1$  und  $X_2$  stetige ZVen mit eindeutiger archimedischen Copula  $C$  erzeugt von  $\phi$ . Dann ist

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\phi(t)}{\phi'(t)} dt \quad (25)$$

*Beweis.* Siehe Nelson (1999, Seite 130) ■

## 4.2 Multivariate Archimedische Copulas

Es erscheint logisch, geschlossene Copulas der archimedischen Familie im mehrdimensionalen als  $C(u_1, \dots, u_d) = \phi^{[-1]}(\phi(u_1), \dots, \phi(u_d))$  zu definieren. Dies funktioniert im Allgemeinen aber nicht. Ein Beispiel wäre für  $d > 2$  der Erzeuger  $\phi = 1 - t$ , der nicht streng ist. Hier wäre das Ergebnis die untere Frechet-Grenze, welche im mehr als zweidimensionalen Fall keine Copula mehr ist.