Seminar Bewertungsmethoden in der Personenversicherungsmathematik

Aktuarielle und finanzmathmatische Bewertung I

Xiaoying Xu

Mathematisches Institut

der

Universität zu Köln

Sommersemester 2010

Betreuung: Prof Schmidli, Dr. Eisenberg

1.1 Die Unit-linked Versicherung

Die Unit-linked Lebensversicherung als bedingter Anspruch

S^1(t) : der Wert des Indexes zur Zeitpunkt t mit t $\in [0, T]$

S^1 : der Wert des Indexes zum Fälligkeitszeit

Wir nehmen an, daß es l_x Versicherungnehmer gibt. Wir bezeichnen die Lebenszeit von Versicherungsnehmern mit $T^1, \ldots, T^{l_x}$. Und die Lebenszeiten sind identisch, unabhängig verteilt.

$\pi(0)$ ist die Prämie zur Zeit 0.

$f(S^1)$ ist der zahlbaren Betrag, wenn der Versicherungsnehmer zur Zeit t noch überlebt.Und es ist abhängig von der Entwicklung des Indexes.

Wir konzentieren uns zuerst auf die Bewertung von Gewinn des Indexes.

Der Wert der Verpflichtung des versicherungsunternehmens beim Versicherungsnehmer zur Zeit 0 ist die diskontierte zukünftige Bezahlung:

$$H = \sum_{i=1}^{l_x} 1_{\{T^i > T\}} f(S^1) e^{-\int_0^T r(u)du} \qquad (1.1)$$

mit r :Zinssatz

Die Formel (1.1) kann als bedingter Anspruch betrachtet werden. Und er ist abhängig von dem Index und der Anzahl der Überlebenden.

Beispiel: 1) $f(S^1)$ ist abhängig nur von Wert der Aktie zur Zeit T :

$$f(S^1) = S^1(T)$$

2) Oder ist $f(S^1)$ ist mit einer Garantie K :

$$f(S^1) = max(S^1(T), K)$$

Wir können die zufällige Lebenszeit durch deren Erwartungswert ersetzen. Dann kriegen wir

$$H' = l_x \, {}_T p_x f(S^1) e^{-\int_0^T r(u)du} = l_{x+T} f(S^1) e^{-\int_0^T r(u)du}$$

mit ${}_T p_x = P(T^1 > T)$ und $l_{x+T} = l_x \, {}_T p_x$

1.2 Das Konto von Versicherungsnehmer

$\pi(0), \pi(1), \ldots, \pi(T-1)$ sind die Prämienzahlungen (brutto). Die Nettoprämie zur Zeit t ist $\big(1-\gamma(t)\big)\pi(t)$.

$V^*(t)$ ist der Wert des Kontos von Versicherungsnehmern nach der Bezahlung von Nettoprämie $\big(1-\gamma(t)\big)\pi(t)$ zur Zeit t.

Wir investieren die Prämien in die zugrundliegende Aktie (oder Portfolio), deren Wert zur Zeit t gleich $S^1(t)$ ist.

Die Rendite von diesem Index im Zeitraum $(t-1, t]$ ist definiert als

$$\varepsilon(t) = \frac{S^1(t) - S^1(t-1)}{S^1(t-1)}$$

$b^{ad}(t)$ ist die zahlbare Summe zur Zeit t , wenn der Versicherter im Zeitinterval $(t-1, t]$ stirbt.

Die grundlegende Idee ist: der Versicherter bekommt $V^*(T)$, wenn er den Zeitpunkt T überlebt.

Der Kontostand von Versicherungsnehmer ist gegeben duch folgende Formel:

Kontostand am Anfang + Rendite aus dem Investment + Prämie- Kosten – Bezahlung für die Gatantie – Risikoprämie = Kontostand am Ende

Der Wert des Kontos zur Zeit 0 für ein Portfolio mit l_x Versicherungsnehmer ist

$$V^{*port}(0) = l_x V^*(0) = l_x\big(1-\gamma(0)\big)\pi(0)$$

Und die Entwicklung des Kontos können wir durch die folgende rekursive Formel darstellen:

$$V^{*port}(t) = \big(1+\tilde{\varepsilon}(t)\big)V^{*port}(t-1) + l_{x+t}\big(1-\gamma(t)\big)\pi(t) - l_{x+t-1}\nu(t) - d_{x+t-1}b^{ad}(t) \quad (1.2)$$

wobei $d_{x+t-1} = l_{x+t-1} - l_{x+t}$ die erwartete Anzahl der Versicherter , die im Jahre t -1 tot sterben, bezeichnet ist.

$\nu(t)$ ist der Wert der jährlichen oder Schlussgarantie. $\tilde{\varepsilon}(t)$ ist die Rendite, die dem Konto von Versicherter gutgeschrieben werden soll.

Wir dividieren $V^{*port}(t)$ durch die aktuelle Anzahl von Überlebenden l_{x+t} zur Zeit t und setzen (1.2) ein, kriegen wir (1.3)

$$
\begin{aligned}
V^*(t) = \frac{V^{*port}(t)}{l_{x+t}} \\
&= \left(1+\tilde{\varepsilon}(t)\right)\frac{l_{x+t-1}}{l_{x+t}}\frac{V^{*port}(t-1)}{l_{x+t-1}} + \left(1-\gamma(t)\right)\pi(t) - \frac{l_{x+t-1}}{l_{x+t}}\nu(t) \\
&- \frac{d_{x+t-1}}{l_{x+t}} b^{ad}(t) \\
&= \left(1+\tilde{\varepsilon}(t)\right)V^*(t-1) + \left(1-\gamma(t)\right)\pi(t) - \frac{l_{x+t-1}}{l_{x+t}}\nu(t) \\
&+ \left(1+\tilde{\varepsilon}(t)\right)\left(\frac{l_{x+t-1}}{l_{x+t}} - 1\right)V^*(t-1) - \frac{d_{x+t-1}}{l_{x+t}} b^{ad}(t)
\end{aligned}
$$

Wir definieren

$$\check{\mu}(x+t) = \frac{d_{x+t-1}}{l_{x+t}} \qquad (1.4)$$

und die Risikosumme

$$\check{R}(t) = b^{ad}(t) - \left(V^*(t-1)\left(1+\tilde{\varepsilon}(t)\right) - \nu(t)\right) \qquad (1.5)$$

Wir setzen (1.4) und (1.5) in (1.3) ein und erhalten:

$$V^*(t) = \left(1+\tilde{\varepsilon}(t)\right)V^*(t-1) + \left(1-\gamma(t)\right)\pi(t) - \nu(t) - \check{\mu}(x+t)\check{R}(t)$$
(1.6)

1.2.1 Der Finanzmarkt

Wir benutzen hier das Black-Scholes Modell von dem letzten Kapitel.

Wir betrachten zwei Aktiven: ein riskantes Aktiv S^1 und eine risikolose Geldanlage S^0

Die Dynamik ist gegeben durch

$$S^1(t) = exp\left(\left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)\right)$$

$$S^0(t) = e^{rt}$$

wobei $W = \left(W(t)\right)_{t\in[0,T]}$ eine standard Brownsche Bewegung ist.

$\mathcal{F}(t) = \sigma\{S^1(u) | u \leq t\}$ ist eine σ-algebra, die die Informationen und die Entwicklung von S^1 bis zur Zeit t enthält. Sei Q ein Matigalmaß für ${S^1}/{S^0}$, so dass

$$S^1(t) = exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W^Q(t)\right)$$

wobei α durch r und W durch eine Q –Standard BB ersetzt werden sind.

Dann für $t \leq u$

$$E^Q\left[e^{-r(u-t)}S^1(u)|\mathcal{F}(t)\right] = S^1(t) \qquad (1.7)$$

1.2.2 Jährliche Garantien und Prämien

Es existiert eine jährliche Garantierendite $\delta(t)$ und $\tilde{\varepsilon}(t) = max\big(\varepsilon(t), \delta(t)\big)$. Dann die rekursive Formel des Kontos von Versicherungsnehmer wird

$$V^*(t) = V^*(t-1)\big(1+\varepsilon(t)\big) + \big(\delta(t)-\varepsilon(t)\big)^+ V^*(t-1) + \big(1-\gamma(t)\big)\pi(t) - \nu(t) - \breve{\mu}(x+t)\breve{R}(t) \qquad (1.8)$$

Wir suchen jetzt die Bezahlung $\nu(t)$ für die Garantie im Jahr t, dann

$$V^*(t-1) = e^{-r}E^Q\left[V^*(t) - \pi(t)\big(1-\gamma(t)\big) + \breve{\mu}(x+t)\breve{R}(t)\ |\mathcal{F}(t-1)\right] \qquad (1.9)$$

d.h. der Wert des Kontos zum Zeitpunkt t -1 entspricht dem Wet des Kontos zum Zeitpunkt t minus die Nettoprämie zur Zeit t plus die Risikoprämie.

Einsetzen von (1.8) in (1.9), ergibt:

$$e^r V^*(t-1)$$
$$= V^*(t-1)\left(E^Q\left[\big(1+\varepsilon(t)\big)|\mathcal{F}(t-1)\right] + E^Q\left[\big(\delta(t)-\varepsilon(t)\big)^+ |\mathcal{F}(t-1)\right]\right) - \nu(t) \qquad (1.10)$$

wobei $\nu(t)$ bereits in t -1 gewählt, d.h. $\nu(t)$ ist $\mathcal{F}(t-1)$-messbar.

Nach (1.7)

$$E^Q\left[\big(1+\varepsilon(t)\big)|\mathcal{F}(t-1)\right] = 1 + E^Q\left[\frac{S^1(t)-S^1(t-1)}{S^1(t-1)}\ |\mathcal{F}(t-1)\right] = 1 + e^r - 1$$
$$= e^r$$

Einsetzen in (1.10) ein , erhalten wir eine Darstellung für $\nu(t)$:

$$\nu(t) = V^*(t-1)E^Q\left[\big(\delta(t)-\varepsilon(t)\big)^+ |\mathcal{F}(t-1)\right]$$

Explizite Darstellung für den Garantiepreis

Der Preis $\nu(t)$ kann mit Hilfe der Black-Scholes-Formel explizit bestimmt werden.

Wir nehmen an, dass $\delta(t)$ in t -1 gewählt worden ist , d.h. $\delta(t)$ ist $\mathcal{F}(t-1)$-messbar. Wir bemerken, dass

$$\big(\delta(t)-\varepsilon(t)\big)^{+} = \left(\big(1+\delta(t)\big)-\frac{S^1(t)}{S^1(t-1)}\right)^{+}$$

Nach der Black-Scholes-Formel, bekommen wir

$$E^Q\left[\frac{S^0(t-1)}{S^0(t)}\left(\big(1+\delta(t)\big)-\frac{S^1(t)}{S^1(t-1)}\right)^{+} |S^1(t-1)\right]$$
$$= \big(1+\delta(t)\big)e^{-r}\Phi\big(-z_2(t)\big)-\Phi\big(-z_1(t)\big)$$

mit

$$z_1(t) = \frac{-log\big(1+\delta(t)\big)+\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma}$$

$$z_2(t) = \frac{-log\big(1+\delta(t)\big)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma}$$

wobei Φ eine Standardnormalverteilung ist.

Und der faire Preis der Garantie im Zeitraum $(t-1,t]$ ist

$$\nu(t) = V^*(t-1)\left(\big(1+\delta(t)\big)\Phi\big(-z_2(t)\big)-e^{r}\Phi\big(-z_1(t)\big)\right)$$

Wert des Todesfallzahlungskontos

Wir nehmen $\breve{R}(t)$ = 0 an, d.h.

$$b^{ad}(t) = V^*(t-1)\big(1+\tilde{\varepsilon}(t)\big)-\nu(t)$$

Unter dieser Annahme, erhalten wir eine Vereinfachung der rekursiven Formel für den Wert des Kontos:

$$V^*(t) = V^*(t-1)\big(1+\varepsilon(t)\big)+\big(\delta(t)-\varepsilon(t)\big)^{+}V^*(t-1)+\big(1-\gamma(t)\big)\pi(t)-\nu(t)$$
$$=\sum_{j=0}^{t}\pi(j)\big(1-\gamma(j)\big)\prod_{s=j+1}^{t}\big(1+\varepsilon(s)\big)$$
$$+\sum_{j=1}^{t}\left(\big(\delta(j)-\varepsilon(j)\big)^{+}V^*(j-1)-\nu(j)\right)\prod_{s=j+1}^{t}\big(1+\varepsilon(s)\big)$$

für t =1,..., T

1.2.3 Schlussgarantie

$\varepsilon(t)$ ist die Rendite, die dem Konto von Versicherungsnehmer gutgeschrieben wird.

Der zahlbaren Betrag zur Fälligkeit ist $max\left(V^*(T), G(T)\right)$ und $\check{R}(t) = 0$

Dann bekommen wir :

$$V^*(t) = V^*(t-1)\left(1+\varepsilon(t)\right) + \left(1-\gamma(t)\right)\pi(t) - \nu(t)$$
$$= \sum_{j=0}^{t} \pi(j)\left(1-\gamma(j)\right) \prod_{s=j+1}^{t}\left(1+\varepsilon(s)\right) - \sum_{j=1}^{t} \nu(j) \prod_{s=j+1}^{t}\left(1+\varepsilon(s)\right)$$

Die Frage ist , wie können wir $\nu(1)$,..., $\nu(T)$ wählen, damit der Vertrag fair ist.

Wir suchen jetzt solche $\nu(1)$,..., $\nu(T)$, dass der Marktwert des Gewinns auf die Prämie abgestimmt ist.

Wir bekommen die folgende Gleichung:

$$\sum_{j=0}^{T-1} e^{-rj}\ {}_{j}p_x\left(1-\gamma(j)\right)\pi(j)$$
$$= E^Q\left[\sum_{j=1}^{T} {}_{j-1}p_x\ {}_{1}q_{x+j+1} e^{-rj}\, b^{ad}(j) + {}_{T}p_x e^{-rT} max\left(V^*(T), G(T)\right)\right]$$

Wir wählen $\nu(t) = \nu(constant)$, kriegen wir

$$E^Q\left[e^{-rT} max\left(V^*(T), G(T)\right)\right]$$
$$= E^Q\left[e^{-rT} max\left(\sum_{j=0}^{T}\left(\pi(j)\left(1-\gamma(j)\right) - \nu\right) \prod_{s=j+1}^{T}\left(1+\varepsilon(s)\right), G(T)\right)\right]$$

wobei $\pi(T) = 0$.

Die Gleichung kann man durch Simulation lösen.

1.2.4 Erlebensfallversicherung mit Einmalprämie

Die Prämie wird nur zur Zeit $t = 0$ bezahlt, d.h. $\pi(1)$=...= $\pi(T-1)$=0 und $b^{ad}(1)$=...=$b^{ad}(T)$=0.

Der Vertrag ist fair, wenn der Marktwert des Gewinns gleich dem Marktwert der Prämie ist.

d.h. wenn

$$\big(1-\gamma(0)\big)\pi(0) = {}_Tp_x E^Q\left[e^{-rT} max\big(V^*(T), G(T)\big)\right]$$

wobei $V^*(T)$ durch rekursive Formel (1.6) definiert ist.

Der Wert $V^*(T)$ ist abhängig von der Entwicklung der Aktie, der einzigen Nettoprämie $\big(1-\gamma(0)\big)\pi(0)$ und dem Wert der Garantie ν.

1.3 Absicherung der integrierten Risiken durch Diversifikation

$\pi(0,f)$ ist der Preis der Option zur Zeit 0 . Und die Option hat den Wert $f(S^1)$ zur Zeit T.

Wir nehmen an , dass die Versicherungsunternehmen zur Zeit 0 κ Optionen für jeden Versicherten kaufen, insgesamt $l_x\kappa$ Optionen. Die Investition bringt $l_x\kappa f(S^1)$ zur Zeit T.

Der Nettoverlust des Versicherungsunternehmens zur Zeit 0 ist:

$$\tilde{L} = Y(T)e^{-\int_0^T r(u)du} f(S^1) - l_x\pi(0) - \left(l_x\kappa f(S^1)e^{-\int_0^T r(u)du} - l_x\kappa\pi(0,f)\right)$$

mit $Y(t) = \sum_{i=1}^{l_x} 1_{\{T^i>t\}}$ = Anzahl der Überlebenden zur Zeit $t \in [0,T]$

Der Nettoverlust können wir umschreiben:

$$\tilde{L} = (Y(T) - l_x\kappa)e^{-\int_0^T r(u)du} f(S^1) - l_x\big(\kappa\pi(0,f) - \pi(0)\big)$$

und

$$E[\tilde{L}] = (l_x\, {}_Tp_x - l_x\kappa)E\left[e^{-\int_0^T r(u)du} f(S^1)\right] + l_x\big(\kappa\pi(0,f) - \pi(0)\big)$$

Für $E[\tilde{L}] = 0$ bekommen wir

$$\pi(0) = {}_Tp_x\pi(0,f)$$

und $\kappa = {}_Tp_x$.