Gesamtrisiko

Seminar Quantitatives Risikomanagement

Chen-Hsuan Lee

Mathematisches Institut
der
Universität zu Köln

Wintersemester 09/10
Betreuung: Prof. Schmidli, J. Eisenberg

1 Kohärente Risikomasse

1.1 Kohärenz-Axiome

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und Δ ein Zeitraum. Finanzrisiken bezeichnen wir durch eine Menge von ZV $M \subset L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$, die wir als Verlustportfolios in dem Zeitraum Δ definieren. M sei ein konvexer Kegel, d.h. $L_1 \in M$ und $L_2 \in M$ impliziert $L_1 + L_2 \in M$ und $\lambda L_1 \in M$ für alle $\lambda > 0$. Risikomasse sind reelle Funktionen $\varrho : M \to \mathbb{R}$, die auf solchen Kegeln von ZV definiert sind. Der Kapitalbetrag definieren wir durch $\varrho(L)$, der in eine Position mit Verlust L hinzugefügt werden soll, so dass diese Position akzeptabel für externe und interne Risikokontroller wird. Zur Vereinfachung der Darstellung setzen wir den Zinssatz gleich Null, es gibt also keine Diskontierung.

Axiom 1 (Translationsinvarianz) Für alle $L \in M$ und alle $l \in \mathbb{R}$ gilt $\varrho(L+l) = \varrho(L)+l$ Die Translationseigenschaft sichert, dass das Risiko durch eine zusätzliche sichere Anlage in entsprechender Höhe gemildert wird.

Axiom 2 (Subadditivität) Für alle $L_1, L_2 \in M$ gilt $\varrho(L_1 + L_2) \leq \varrho(L_1) + \varrho(L_2)$ Subadditivität reflektiert die Idee, dass das Risiko durch Diversifikationen reduziert werden kann.

Axiom 3 (Positive Homogenität) Für alle $L \in M$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\varrho(\lambda L) = \lambda \varrho(L)$ Die positive Homogenität besagt, dass doppeltes Risiko durch doppeltes Risikokapital abgesichert werden muss.

Axiom 4 (Monotonie) Für alle $L_1, L_2 \in M$ mit $L_1 \leq L_2$ gilt $\varrho(L_1) \leq \varrho(L_2)$ fast sicher. Die Monotonie besagt, dass höheres Risiko mehr Risikokapital benötigt.

Definition 5 (Kohärente Risikomasse) Ein Risikomass ϱ auf dem konvexen Kegel M heißt kohärent, wenn es die Axiomen 1-4 erfüllt.

Bemerkung 6 (Konvexität) Für alle $L_1, L_2 \in M$ gilt

$$\varrho(\lambda L_1 + (1-\lambda)L_2) \leq \lambda \varrho(L_1) + (1-\lambda)\varrho(L_2), \ \lambda \in [0,1] \tag{1}$$

Die ökonomische Begründung für (1) ist wieder die Idee, dass Risikostreuung Risiko reduziert.

1.2 Value-at-Risk

Aus der Darstellung von VaR als ein Quantil der Verlustverteilung im Abschnitt 2.2.2. folgt, dass VaR translationsinvariant, positiv homogen und monoton auf $L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ist. Jedoch zeigt das folgende Beispiel, dass VaR die subadditive Eigenschaft (Axiom 2) im Allgemeinen nicht hat, also ist VaR kein kohärentes Risikomass.

Beispiel 7 (VaR für ein Portfolio der ausfallbedrohten Anleihen) Betrachte ein Portfolio von $d = 100$ ausfallbedrohten Unternehmensanleihen. Wir nehmen an, dass die Ausfälle der verschiedenen Anleihen unabhängig sind, die Ausfallwahrscheinlichkeit ist identisch für alle Anleihen und ist gleich 2%. Der aktuelle Preis der Anleihe beträgt 100. Wenn es kein Versäumnis gäbe, ein Bond zahlt sich in Periode t+1 eine Summe von 105 zurück, sonst gibt es keine Rückzahlung. Daher ist $L_i =$ (der Verlust der Anleihe i) gleich 100, wenn die Anleihe zahlungsunfähig wird und sonst gleich -5. Y_i wird als Default-Indikator des Unternehmens gekennzeichnet, z.B. Y_i ist gleich 1 falls die Anleihe i Ausfälle in [t,t+1] hat und sonst gleich 0. Wir erhalten $L_i = 100Y_i - 5(1 - Y_i) = 105Y_i - 5$. Daher bilden L_i eine Folge von iid ZV mit $P(L_i = -5) = 0.98$ und $P(L_i = 100) = 0.02$. Wir vergleichen 2 Portfolios, beide mit dem aktuellen Wert 10 000. Portfolio A besteht aus 100 GE der Anleihe 1. Portfolio B ist verteilt, es besteht jeweils aus einem GE von jeder Anleihe. Ökonomische Intuition sagt uns, dass Portfolio B weniger riskant als Portfolio A ist, daher sollte Portfolio B auch geringeren VaR haben. Wir berechnen den VaR für beide Portfolios bei einem Konfidenzniveau von 95%. Für Portfolio A ist der Portfolioverlust gegeben durch $L_A = 100L_1$, so ist $\mathrm{VaR}_{0.95}(L_A) = 100\mathrm{VaR}_{0.95}(L_1)$. Also $P(L_1 \leq -5) = 0.98 \geq 0.95$ und $P(L_1 \leq l) = 0 < 0.95$ für $l < -5$. Daher $\mathrm{VaR}_{0.95}(L_1) = -5$, und somit $\mathrm{VaR}_{0.95}(L_A) = -500$. Das bedeutet, auch mit einer Rückzahlung von 500GE aus dem Risikokapital ist das Portfolio immer noch akzeptabel für ein Risikokontroller, der mit einem VaR zu dem Konfidenzniveau 95% arbeitet.
Für Portfolio B haben wir

$$L_B = \sum_{i=1}^{100} L_i = 105 \sum_{i=1}^{100} Y_i - 500.$$

und daher $\mathrm{VaR}_\alpha(L_B) = 105_{q_\alpha}(\sum_{i=1}^{100} Y_i) - 500$. Die Summe $M := \sum_{i=1}^{100} Y_i$ hat eine Binomialverteilung $M \sim B(100, 0.02)$. Wir erhalten nach der Prüfung $P(M \leq 5) \approx 0.984 \geq 0.95$ und $P(M \leq 4) \approx 0.949 < 0.95$, so ${}_{q0.95}(M) = 5$. Daher $\mathrm{VaR}_{0.95}(L_B) = 525 - 500 = 25$.

In diesem Fall bräuchte die Bank ein zusätzliches Risikokapital in Höhe von 25 GE um das Konfidenzniveau 95% zu erreichen. Der Risikokapitalbedarf für Portfolio B ist deutlich höher als für Portfolio A.

Dies veranschaulicht, dass die Risikomessung mit VaR zu unsinnigen Ergebnissen führen kann. Außerdem zeigt unser Beispiel, dass VaR im Allgemeinen nicht subadditiv ist. Für beliebiges kohärente Risikomass ϱ, das nur von der Verteilung L abhängt, erhalten wir

$$\varrho(\sum_{i=1}^{100} L_i) \leq \sum_{i=1}^{100} \varrho(L_i) = 100\varrho(L_1) = \varrho(100L_1)$$

D.h. jedes kohärente Risikomass, das nur von der Verlustverteilung abhängt, führt zu höherer Risikokapitalanforderung für Portfolio A als für Portfolio B.
Das Beispiel 7 zeigt, dass die Vermögenswerte, die das Portfolio bilden, sehr verzerrte Verteilung haben können, daher ist der VaR nicht subadditiv; solche Situation kann offensichtlich auftreten, wenn wir ausfallbedrohten Anleihen und Optionen in unserem Portfolio haben.

Satz 8 (VaR-Subadditivität bei elliptischen Risikofaktoren) Sei $X \sim E_d(\mu, \Sigma, \psi)$ und M eine Menge der linearen Verlustportfolios der Form:

$$M = \{L : L = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{d} \lambda_i X_i, \lambda_i \in \mathbb{R}\}$$

Dann gilt für zwei beliebige Verluste $L_1, L_2 \in M$ und $0.5 \leq \alpha < 1$,

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L_1 + L_2) \leq \mathrm{VaR}_\alpha(L_1) + \mathrm{VaR}_\alpha(L_2).$$

Proposition 9 Expected Shortfall ist ein kohärentes Risikomass.

1.3 Kohärente Risikomasse als verallgemeinerte Szenarien

Definition 10 Sei P eine Menge von Wahrscheinlichkeitsmassen auf dem Messraum (Ω, F), und setze $M_p := \{L : E^Q(|L|) < \infty$ für alle $Q \in P\}$. Dann ist das durch die verallgemeinerten Szenarien induzierte Risikomass eine Abbildung $\varrho_p : M_p \to R$ mit $\varrho_p(L) := \sup\{E^Q(L) : Q \in P\}$.

Proposition 11 (i) Für eine beliebige Menge P von Wahrscheinlichkeitsmassen auf $(\Omega, \mathcal{F})$ ist das Risikomass ϱ_p kohärent auf M_p.
(ii) Sei Ω eine endliche Menge $\{\omega_1, ..., \omega_d\}$ und sei $M = \{L : \Omega \to \mathbb{R}\}$. Dann gibt es für jedes kohärente Risikomass auf M eine Menge P der Wahrscheinlichkeismasse auf Ω, so dass $\varrho = \varrho_p$.
Beweis: zu (i): Die Eigenschaften Translationsinvarianz, positive Homogenität und Monotonie folgen direkt aus der Definition 10. Für die Subaddivitität gilt,

$$\begin{aligned}\sup\{E^Q(L_1 + L_2) : Q \in P\} &= \sup\{E^Q(L_1) + E^Q(L_2) : Q \in P\} \\ &\leq \sup\{E^Q(L_1) : Q \in P\} + \sup\{E^Q(L_2) : Q \in P\}.\end{aligned}$$

Der Beweis von (ii) ist technischer. Wir starten mit ein paar Notationen. Für $l \in \mathbb{R}^d$ schreiben wir $l \geq 0$ falls $l_i \geq 0$ für alle $1 \leq i \leq d$; wegen $1 \in \mathbb{R}^d$ bezeichnen wir den Vektor $(1, ..., 1)^T$. Da Ω endlich ist, können wir M durch $\mathbb{R}^d$ ersetzen, indem wir eine ZV L mit dem Vektor $l \in \mathbb{R}^d$ gleichsetzen, d.h. $l_i = L(\omega_i), 1 \leq i \leq d$. Analog kann eine lineare Funktion λ auf $\mathbb{R}^d$ mit $\lambda(l) \geq 0$ für alle $l \geq 0$ und $\lambda(1) = 1$ mit einem Wahrscheinlichkeitsmass P_λ auf Ω gleichgesetzt werden $P_\lambda(\omega_i) = \lambda(e_i)$, e_i ist der i-te Einheitsvektor. Nun können wir diese Identifikationen frei benutzen. Die Behauptung (ii) ist bewiesen, wenn wir zeigen können, dass es für jede ZV $L_0 \in$ M ein Wahrscheinlichkeitsmass $Q = Q(L_0)$ existiert, so dass

$$E^Q(L) \leq \varrho(L) \ f.\ a.\ L \in M \text{ und } E^Q(L_0) = \varrho(L_0). \tag{2}$$

In diesem Fall können wir $P = \{Q(L_0) : L_0 \in M\}$ schreiben. Falls (2) diese Beziehung für L_0 und Q gilt, dann gilt diese auch gleichzeitig für alle ZV der Form $aL_0 + b, a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}$. Wir können außerdem annehmen, dass $\varrho(L_0) = 1$ gilt. Definiere $\tilde{U} := \{L \in M : \varrho(L) < 1\}$. Wie oben erklärt können wir $\tilde{U}$ gleich einer Teilmenge U $\subset \mathbb{R}^d$ setzen. Diese Menge U ist offen und konvex; insbesondere gehört l_0 nicht zu U. Wegen dem Trennungssatz der Hyperebene folgern wir, dass es eine lineare Funktion λ auf $\mathbb{R}^d$ gibt mit

$$\lambda(l) < \lambda(l_0) \quad \text{f.a.} \quad l \in U. \tag{3}$$

Wegen $0 \in U$ gilt $0 = \lambda(0) < \lambda(l_0)$, wir können $\lambda(l_0)$ zu 1 normalisieren. Jetzt prüfen wir, ob λ ein Wahrscheinlichkeitsmass induziert, d.h. (a) $\lambda(l) \geq 0$ f.a. $l \geq 0$ und (b) $\lambda(1) = 1$

sind zu zeigen. (3) können wir schreiben als

$$\lambda(l) < 1 \quad \text{f.a. L mit } \varrho(L) < 1. \tag{4}$$

Um (a) zu zeigen wissen wir, dass für $L < 0$ $\varrho(L) < 0$ gilt, daraus folgt $\lambda(l) < 1$. Das heißt für L ≥ 0 und $a > 0$ erhalten wir wegen der Linearität von $\lambda, a\lambda(l) = -\lambda(-al) > -1$, und deshalb $\lambda(l) > -1/a$. Wenn a gegen unendlich läuft, folgt die Behauptung (a).
Um (b) zu zeigen nehmen wir eine Konstante $a < 1$ und wir haben $\varrho(a) = a < 1$, wegen (4) gilt $\lambda(a1) < 1$, also $\lambda(1) \leq 1$. Auf der anderen Seite bekommen wir für $a > 1, \varrho(2L_0 - a) = 2\varrho(L_0) - a = 2 - a < 1$, da $1 > \lambda(2l_0 - a) = 2 - a\lambda(1)$ und da $a\lambda(1) > 1$ gilt $\lambda(1) \geq 1$, daraus folgt (b).

Um zu zeigen, dass Q $:= P_\lambda$ das gesuchte Wahrscheinlichkeitsmass ist, müssen wir zuerst zeigen, dass$E_\lambda(L) \leq \varrho(L)$ für alle $L \in M$ gilt. Dies ist äquivalent zu der Implikation $\varrho(L) < b \Rightarrow \lambda(l) < b$ f.a. $L \in M$, $b \in R$. Wegen der Translationsinvarianz gilt $\varrho(L) < b \Leftrightarrow \varrho(L - (b-1)) = \varrho(L) + 1 - b < 1$. Also erhalten wir wegen (4), dass $1 > E_\lambda(L - (b-1)) = E_\lambda(L) - b + 1$ und $E_\lambda(L) < b$.

2 Schranken für das Gesamtrisiko

2.1 Das allgemeine $Fréchet - Problem$

Wir betrachten einen Zufallsvektor $L = (L_1, ..., L_d)^T$, der Verluste darstellt und eine messbare Funktion $\Psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, die die Operation der Aggregation beschreibt. Die ZV $\Psi(L)$ ist definiert als eine aggregate finanzielle Position, Beispiele dafür sind:

- der Gesamtverlust $S_d = \sum_{k=1}^d L_k$;
- der maximale Verlust $M_d = \max(L_1, ...L_d)$;
- eine kombinierte Position $M_d I_{(S_d > q_\alpha)}$.

Betrachte auch eine reelle Funktion ϱ, die von der Verteilung von $\Psi(L)$ abhängt; ϱ kann ein Risikomass, ein Prämienprinzip oder eine Preisfunktion sein. In idealem Fall würden wir $\varrho(\Psi(L))$ berechnen, aber um dies zu tun brauchen wir eine Verteilungsfunktion von $\Psi(L)$ und somit eine bestimmte Verteilung von dem Zufallsvektor L. In dem ganzen Abschnitt 2 setzen wir voraus, dass wir die Randverteilungsfunktion der Risiken $L_1, ..., L_d$ kennen, diese formulieren wir als folgende Behauptung (A1).

(A1) Die Randverteilungsfunktionen F_i von L_i, $i = 1, ..., d$ sind gegeben.

Beim Fehlen von Informationen über die Abhängigkeit von $L_1, ..., L_d$ können wir $\varrho(\Psi(L))$ nicht berechnen, aber wir können nach numerischen Grenze von (A1) suchen. Für bestimmte Ψ und ϱ besteht das Problem darin, die Ober- und Untergrenze $\varrho_{\max}$ und $\varrho_{\min}$ zu finden, so dass unter (A1) gilt,

$$\varrho_{\min} \leq \varrho(\Psi(L)) \leq \varrho_{\max}. \tag{5}$$

Das Problem der Schrankensuche in (5) mit (A1) kann als ein Paar Optimierungsproblem formuliert werden:

$$\begin{aligned} &\inf\{\varrho(\Psi(L)) : L_i \sim F_i, i = 1, ..., d\} \\ &\sup\{\varrho(\Psi(L)) : L_i \sim F_i, i = 1, ..., d\} \end{aligned} \tag{6}$$

Hier berechnen wir, wo $F_1, ...F_d$ gegeben sind, wobei $L_i \sim F_i$ bedeutet, L_i hat Verteilungsfunktion F_i. Die Lösungen kann man manchmal analytisch bekommen, aber es gibt auch verschiedene numerische Verfahren, die das Problem allgemein lösen können.

2.2 Schranken für den VaR

Proposition 12 (Additivität von VaR für komonotone Risiken) Sei $0 < \alpha < 1$ und $L_1, ..., L_d$ die komonotone ZV mit VF $F_1, ..., F_d$, die stetig und streng monoton sind. Dann gilt

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L_1 + \cdots + L_d) = \mathrm{VaR}_\alpha(L_1) + \cdots + \mathrm{VaR}_\alpha(L_d). \tag{7}$$

Um ein paar Kernlösungen für das Optimierungsproblem (6) zu formulieren brauchen wir einige Extra-Notationen. Sei ein Vektor $x = (x_1, ..., x_d)^T \in \mathbb{R}^d$ gegeben, wir schreiben $x_{-i} = (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_d)^T$. Für einen festen $x_{-d} \in \mathbb{R}^{d-1}$ definieren wir ein $\Psi^{\wedge}_{-d}(s) := \sup\{x_d \in \mathbb{R} : \Psi(x_{-d}, x_d) < s\}$ für $s \in \mathbb{R}$. Sei μ_C als das entsprechende Wahrscheinlichkeitsmass auf $\mathbb{R}^d$ und definiere für $s \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{C,\psi}(F_1, ..., F_d)(s) &:= \mu_C(\Psi(L) < s), \\ \tau_{C,\psi}(F_1, ..., F_d)(s) &:= \sup_{x_1, ..., x_{d-1} \in \mathbb{R}} C(F_1(x_1), ..., F_{d-1}(x_{d-1}), F_d^-(\Psi^{\wedge}_{x_{-d}}(s))), \end{aligned}$$

wobei $F_d^-(x)$ das linksseitige Limit von F_d an der Stelle x ist. Daraus folgt,

$$\begin{aligned} m_\psi(s) &:= \inf\{P(\Psi(L) < s) : L_i \sim F_i, i = 1, ..., d\} \\ &= \inf\{\sigma_{C,\psi}(F_1, ..., F_d)(s) : C \in \mathcal{C}_d\}, \end{aligned}$$

wobei $\mathcal{C}_d$ die Menge aller d-dimensionalen Copulas bezeichnen.

Satz 13 Sei L ein Zufallsvektor in $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$ mit Randverteilungsfunktionen $F_1, ..., F_d$ und Copula C. Angenommen, es existiert eine Copula C_0 mit $C \geq C_0$. Falls $\Psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ wachsend ist, dann gilt für $s \in \mathbb{R}$,

$$\sigma_{C,\psi}(F_1, ..., F_d)(s) \geq \tau_{C_0,\psi}(F_1, ..., F_d)(s). \tag{8}$$

Außerdem falls Ψ rechtsstetig in dem letzten Parameter ist, dann gilt für die Copula,

$$C_t(u) := \begin{cases} \max(t, C_0(u)), & u \in [t, 1]^d, \\ \min\{u_1, ...u_d\}, & \text{sonst}, \end{cases}$$

wobei t $= \tau_{C_0,\psi}(F_1, ..., F_d)(s)$ ist.
Mit der Anwendung der Notation $\mathrm{VaR}_{\alpha,\max} := \tau_{C_0,\psi}(F_1, ..., F_d)^{\leftarrow}(\alpha)$ für die Inverse der Funktion τ in (8) wird der Satz 13 zu

$$\mathrm{VaR}_\alpha(\Psi(L)) \leq \mathrm{VaR}_{\alpha,\max}, \tag{9}$$

für $0 < \alpha < 1$, diese liefert eine obere Grenze. Falls Ψ durch einen Summenoperator gegeben ist, abgekürzt durch $\Psi = +$, dann ist die Schranke

$$\mathrm{VaR}_{\alpha,\max} = \inf_{u \in [0,1]^d, C_0(u) = \alpha} (F_1^{\leftarrow}(u_1) + \cdots + F_d^{\leftarrow}(u_d)). \tag{10}$$

Satz 14 Sei F eine stetige VF auf $\mathbb{R}^+$ und sei $F_1 = \cdots = F_d = F$. Dann gilt für alle $s \geq 0$ und $\bar{F} = 1 - F$,

$$m_+(s) \geq 1 - d \inf_{r \in [0, s/d]} \frac{\int_r^{s-(d-1)r} \bar{F}(x)dx}{s - dr}. \tag{11}$$

3 Kapitalallokation

3.1 Das Allokationsproblem

Seien $L_1, ...L_d$ ZV auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, diese bezeichnen wir als Verluste (oder Gewinne) für d Investitionsmöglichkeiten. Wir betrachten eine offene Menge $\Lambda \subset \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ von Portfoliogewichten und definieren für $\lambda \in \Lambda$ ein Verlust $L(\lambda) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i L_i$; der Verlust von unserem versicherungsmathematischen Portfolio ist narürlich L(1). Sei ϱ ein auf einer Menge M definiertes Risikomass und die Menge M enthalte die ZV $\{L(\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$. Dann definieren wir die dazugehörige Funktion $r_\varrho : \Lambda \to \mathbb{R}$ mit $r_\varrho(\lambda) = \varrho(L(\lambda))$. Somit ist $r_\varrho(\lambda)$ das erforderliche Risikokapital für eine Position λ in der Menge der Investitionsmöglichkeiten.

Definition 15 Sei $r_\varrho(\lambda)$ eine Riskomassfunktion auf einer Menge $\Lambda \subset \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ mit $1 \in \Lambda$. Eine Abbildung $\pi^{r_\varrho} : \Lambda \to \mathbb{R}^d$ heißt Kapital-Allokationsprinzip bzgl. r_ϱ pro Einheit, falls $\forall \lambda \in \Lambda$ gilt,

$$\sum_{i=1}^{d} \lambda_i \pi_i^{r_\varrho}(\lambda) = r_\varrho(\lambda). \tag{12}$$

$\pi_i^{r_\varrho}$ gibt die Höhe des Allokationskapitals pro Einheit der L_i an, wenn der Gesamtverlust gleich $L(\lambda)$ ist.

3.2 Das Eulerprinzip

Definition 16 (Euler-Allokationsprinzip) Wenn r_ϱ eine positiv-homogene Risikomassfunktion ist, die auf der Menge Λ differenzierbar ist, dann ist das Euler-Allokationsprinzip pro Einheit bzgl. r_ϱ eine Abbildung

$$\pi_i^{r_\varrho} : \Lambda \to \mathbb{R}^d, \qquad \pi_i^{r_\varrho}(\lambda) = \frac{\partial r_\varrho}{\partial \lambda_i}(\lambda). \tag{13}$$

Das Euler-Prinzip wird manchmal auch als *Gradientenallokation* genannt, da $\pi_i^{r_\varrho}(\lambda) = \nabla r_\varrho(\lambda)$ ist.

Beispiel: Betrachte eine Risikomassfunktion $r_{SD}(\lambda) = \sqrt{\mathrm{var}(L(\lambda))}$ und schreibe Σ als die Kovarianzmatrix von $(L_1, ...L_d)$. Dann haben wir $r_{SD}(\lambda) = (\lambda^T \Sigma \lambda)^{1/2}$, daraus folgt

$$\pi_i^{r_{SD}}(\lambda) \quad = \frac{\partial r_{SD}}{\partial \lambda_i}(\lambda) = \frac{(\Sigma\lambda)_i}{r_{SD}(\lambda)} \quad = \frac{\sum_{j=1}^d \mathrm{cov}(L_i, L_j)\lambda_j}{r_{SD}(\lambda)} = \frac{\mathrm{cov}(L_i, L(\lambda))}{\sqrt{\mathrm{var}(L(\lambda))}}.$$

Insbesondere gilt für das Originalportfolio der Investitionsmöglichkeiten mit $\lambda = 1$, die Kapitalallokation für die i-te Investitionsmöglichkeit ist

$$AC_i = \pi_i^{r_{SD}}(1) = \frac{\mathrm{cov}(L_i, L)}{\sqrt{\mathrm{var}(L)}}, \qquad L := L(1). \tag{14}$$

Diese Formel ist bekannt als das Kovarianzprinzip.

Korollar 17 Sei $r_\varrho : \Lambda \to \mathbb{R}$ eine Risikomassfunktion eines positiv-homogenen Risikomass ϱ, die nur von der Verlustverteilung abhängt. Sei $L \sim E_d(0, \Sigma, \psi)$. Dann ist die relative Kapitalallokation unter einer Euler-Allokation gegeben durch

$$\frac{AC_i}{AC_j} = \frac{\pi_i^{r_\varrho}(1)}{\pi_j^{r_\varrho}(1)} = \frac{\sum_{k=1}^d \Sigma_{ik}}{\sum_{k=1}^d \Sigma_{jk}}, 1 \leq i, j \leq d. \tag{15}$$

Beweis: Aus dem Beweis von Satz 8 folgern wir, dass es wegen der positiven Homogenität des Risikomasses gilt:

$$r_\varrho(\lambda) = \varrho(L(\lambda)) = \varrho(\sum_{i=1}^d \lambda_i L_i) = \sqrt{\lambda^T \Sigma \lambda}\,\varrho(Y_1),$$

wobei Y_1 die erste Komponente einer sphärischen ZV ist mit dem charakteristischen Generator ψ. Für die Allokation erhalten wir

$$\pi^{r_\varrho}(\lambda) = \nabla r_\varrho(\lambda) = \frac{\Sigma\lambda}{\sqrt{\lambda^T \Sigma \lambda}}\varrho(Y_1),$$

daraus folgt die Behauptung. $\square$

3.3 Ökonomische Begründung des Euler-Prinzips

Definition 18 Sei r_ϱ eine auf Λ differenzierbare Risikomassfunktion und π^{r_ϱ} ein zugehöriges Kapitalallokationsprinzip pro Einheit. π^{r_ϱ} ist dann angemessen für die Leistungsmessung, wenn für $\lambda \in \Lambda$ gilt,

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_i}\left(\frac{-E(L(\lambda))}{r_\varrho(\lambda)}\right)\begin{cases} > 0, & \text{falls } \frac{-E(L_i)}{\pi_i^{r_\varrho}(\lambda)} > \frac{-E(L(\lambda))}{r_\varrho(\lambda)}, \\ < 0, & \text{falls } \frac{-E(L_i)}{\pi_i^{r_\varrho}(\lambda)} < \frac{-E(L(\lambda))}{r_\varrho(\lambda)}. \end{cases}$$

D.h., falls die Leistung der Investitionsmöglichkeiten i, gemessen durch den return pro-Einheit geteilt durch das Risikokapital pro-Einheit $\pi_i^{r_\varrho}$, besser (bzw. schlechter) ist als die Leistung des gesamten Porfolios, dann kann durch das Vergrößern (bzw. Verkleinern) der Gewichte λ_i der Investitionsmöglichkeit um einen kleinen Betrag die gesamte Leistung des Portfolios verbessert werden.

Definition 19 Sei ϱ ein kohärentes Risikomass mit der Risikomassfunktion r_ϱ, ein Kapitalallokationsprinzip π^{r_ϱ} pro Einheit heißt fair, wenn für alle $\lambda \in \Lambda$ und alle $\gamma \in [0,1]^d$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{d} \gamma_i \lambda_i \pi_i^{r_\varrho}(\lambda) \le r_\varrho(\gamma_1\lambda_1, ..., \gamma_d\lambda_d). \tag{16}$$