Seminar Bewertungsmethoden in der Personenversicherungsmathematik

Aktuarielle und finanzmathematische Bewertung II

Marco Ehlscheid

Mathematisches Institut
der
Universität zu Köln

Sommersemester 2010

Betreuung: Prof. Dr. Dr. H. Schmidli, Dr. J. Eisenberg

Inhaltsverzeichnis

1 Überblick

Im ersten Teil dieses Vortrags beschäftigen wir uns mit dem an einen fondsgebundenen Versicherungsvertrag anhaftenden kombinierten Versicherungs- und Finanzrisiko im Ein-Perioden-Modell, das dem in Kapitel 4 betrachteten Modell ähnelt. Anschließend werden wir dann Strategien ableiten, die die Varianz der Gesamtkosten des Unternehmens minimieren. Dabei seien die Gesamtkosten definiert als die Verbindlichkeit des Unternehmens abzüglich Prämien und Gewinne aus Kapitalanlagen. Darüber hinaus, betrachten wir nachfolgend Beispiele einiger Modelle, in denen sich das Mortalitätsrisiko nicht durch ein Vergrößern des Portfolios vollständig eliminieren lässt. Im zweiten Teil widmen wir uns dann einem Rückblick auf das bereits in Kapiteln 3 und 4 behandelte Mehr-Perioden-Modell. Im nächsten Vortag wird dann das kombinierte Risiko fondsgebundener Verträge für dieses Modell analysiert.

2 Hedging des integrativen Risikos im Ein-Perioden-Modell

In diesem Abschnitt betrachten wir ein Ein-Perioden-Modell, in dem es möglich ist in eine Aktie und in einen Bond zu nur zwei Zeitpunkten zu investieren: in Zeitpunkt 0 und in Zeitpunkt 1.
Bezeichne mit $S^1(t)$ den Aktienwert im Zeitpunkt $t \in \{0,1\}$, und sei $S^0(t)$ der Wert einer Einheit investiert in das Bankkonto zum Zeitpunkt t. Wir nehmen an, dass $S^0(t) = (1+r)^t$, wobei $r > 0$ der Jahreszins im Zeitraum von 0 bis 1 ist. Darüberhinaus sei dieser zum Zeitpunkt 0 bekannt. Hingegen sei der Wert der Aktie $S^1(1)$ erst zum Zeitpunkt 1 bekannt.
Betrachte nun ein Versicherungsunternehmen, dem eine Verbindlichkeit mit Fälligkeit in 1 gegenübersteht. Bezeichne deren Barwert im Zeitpunkt 0 mit H und nehme an, dass das Versicherungsunternehmen daran interessiert ist, das mit dieser Verbindlichkeit verbundene Risiko bestmöglich zu reduzieren.(Hierbei ist es ist es von Nöten, exakt zu spezifizieren, wie Risiko bemessen werden soll. Wir kommen darauf später zurück.)
Wir beginnen zunächst mit der genaueren Beschreibung der Möglichkeiten des Versicherungsunternehmens im Finanzmarkt. Dies wird wieder formalisiert durch die Einführung einer Anlagestrategie h. Solch eine Anlagestrategie besteht im Ein-Perioden-Modell aus einer Anzahl von Aktien h^1, die zum Zeitpunkt 0 gekauft werden und in der Aktienanlage bis das der neue Preis $S^1(1)$ im Zeitpunkt 1 bekannt gegeben wird verbleiben. Ferner beinhaltet die Strategie den in 0 investierten oder vom Bankkonto entliehenen Betrag $h^0(0)$. Wir arbeiten wieder mit den diskontierten Preisen definiert durch $X(t) = (S^1(t))/(S^0(t))$ bzw. $X^0(t) = (S^0(t))/(S^0(t)) = 1$. Der Diskontwert der Strategie nach dem Erwerb von h^1 Aktien im Zeitpunkt 0 ist gegeben durch

$$V(0,h) = h^1 X(0) + h^0(0).$$

Zum Zeitpunkt 1 verändert sich der Wert der Aktien zu $h^1 X(1)$. Falls sich das Versicherungsunternehmen dafür entscheiden sollte, die Anzahlung auf dem Sparkonto zum Zeitpunkt t von $h^0(0)$ auf $h^0(1)$ zu ändern, wird der Wert des Wertpapierdepots zum Zeitpunkt 1 zu

$$V(1,h) = h^1 X(1) + h^0(1).$$

Um sicherzustellen, dass das Unternehmen im Zeitpunkt 1 in der Lage ist die Verbindlichkeit H durch den Verkauf der Aktien und das Kapital auf dem Sparkonto decken zu können, mag es erforderlich sein zusätzliches Kapital auf das Bankkonto zum Zeitpunkt 1 hinzuzufügen. Ebenso sollte das Unternehmen Kapital aus der Anlagestrategie zur Deckung der Verbindlichkeit entnehmen, falls der Wert der Investitionen die Verbindlichkeiten übersteigt.
Genauer: Wir setzen voraus, dass $h^0(1)$ zum Zeitpunkt 1 so gewählt ist, sodass gilt: $V(1,h) = H$. Föllmer und Sondermann (1986) stellten einen Kosten-Prozess (cost process) für die Strategie h in einem in stetiger Zeit arbeitendem Modell vor. Föllmer und Schweizer (1988) suggerierten eine ähnliche Version in einem diskreten Modell. In dem oben betrachteten Ein-Perioden-Modell ist der Kosten-Prozess definiert durch $C(0,h) = V(0,h)$ und

$$C(1,h) = V(1,h) - h^1(X(1) - X(0)) = H - h^1\Delta X(1), \tag{1}$$

wobei die gewöhnliche Notation $\Delta X(1) := X(1) - X(0)$ verwendet wurde und die zweite Gleichheit aus der Konsequenz $V(1,h) = H$ resultiert.
Genauer: Die Größe $C(t,h)$ stellt die akkumulierten Kosten bis zum Zeitpunkt t dar. Zum Zeitpunkt 0 gleichen die Kosten $C(0,h)$ der Startinvestition $V(0,h)$ bzgl. des Portfolios $(h^0(0), h^1)$. Zum Zeitpunkt 1 entsprechen die Kosten dem Wert $V(1,h) = H$ des neuen Portfolios $(h^0(1), h^1)$ reduziert um den Gewinn aus den Kapitalanlagen $h^1\Delta X(1)$. In der Tat sind die Kosten gegeben in (1) dem Barverlust des Unternehmens

$$\tilde{L} = Y(T)e^{-\int_T^0 r(u)du} f(S^1) - l_x\pi(0) - \Big(l_x\kappa f(S^1)e^{-\int_T^0 r(u)du} - l_x\kappa\pi(0,f)\Big)$$

(vgl. letzter Vortrag) sehr ähnlich. Dort wurde $\tilde{L}$ definiert als die Summe der Nettozahlung an den Versicherungsnehmer (Leistungen - Prämien) und des finanziellen Verlusts resultierend vom Handel auf dem Finanzmarkt.
Das bedeutet, dass sich die Gleichung (1) vom Barverlust $\tilde{L}$ nur durch die im Zeitpunkt 0 gezahlten Prämien unterscheidet.

Varianzminimierung

Ein einfaches Maß für das mit der Verbindlichkeit H und der Anlagestrategie h verbundene Risiko ist die Varianz der akkumulierten Kosten zum Zeitpunkt

1. Eine Möglichkeit ist daher eine Anlagestrategie zu wählen, die das folgende Problem löst:

$$\underset{(h^0(0),h^1)}{\text{minimize}}\ Var[C(1,h)]. \tag{2}$$

Sprich, eine Varianzminderungsstrategie (*variance-minimizing strategy*). Das Problem (2) ist so einfach, dass es sich für eine beliebige Verbindlichkeit ohne zusätzliche Annahmen bzgl. der Verteilung des diskontierten Aktienwertes $X(1)$ zum Zeitpunkt 1 lösen lässt. Direkte Berechnungen zeigen, dass

$$\begin{aligned} Var[C(1,h)] &= Var[H - h^1 \Delta X(1)] \\ &= Var[H] - 2h^1 Cov(H, \Delta X(1)) + (h^1)^2 Var[\Delta X(1)] \\ &=: J(h^1), \end{aligned}$$

wobei h^1 zum Zeitpunkt 0 als konstant gewählt wird.
Die Bedingung $Var[\Delta X(1)] > 0$ liefert $J^{''}(h^1) > 0$. Daher wird J für ein $\hat{h^1}$ mit $J^{'}(\hat{h^1}) = 0$ minimiert; ein solches ist

$$\hat{h^1} = \frac{Cov(H, \Delta X(1))}{Var[\Delta X(1)]}. \tag{3}$$

Durch das Einsetzen dieses Resultats in obige Gleichung erkennt man, dass die minimal erreichbare Varianz durch

$$\begin{aligned} Var[C(1,h)] &= Var[H - h^1 \Delta X(1)] \\ &= Var[H] - \frac{Cov(H, \Delta X(1))^2}{Var[\Delta X(1)]} \end{aligned}$$

$$= Var[H](1 - Corr(H, \Delta X(1))^2) \tag{4}$$

gegeben ist, mit Korrelationskoeffizient $Corr(H, \Delta X(1)) = \frac{Cov(H,\Delta X(1))}{\sqrt{Var[H]Var[\Delta X(1)]}}$ zwischen H und $\Delta X(1)$. Die Lösung $\hat{h^1}$, sowie die daraus resultierende minimale Varianz (4) sind bekannt als die Lösung für das Problem der Minimierung der Varianz eines linearen Schätzers.

Risikominimierung

Ein ähnliches Problem ist die Minimierung des Erwartungswertes der im Zeitintervall (0,1) auftretenden zusätzlichen Kosten, d.h.

$$\underset{(h^0(0),h^1)}{\text{minimize}}\; E[(C(1,h)-C(0,h))^2], \tag{5}$$

als Funktion der Anzahl der Aktien h^1 und der Einzahlung $h^0(0)$ auf das Bankkonto im Zeitpunkt 0.

Da $C(0,h) = V(0,h)$ konstant ist, wird deutlich, dass dieses Problem von einer Strategie $\hat{h}$ mit $C(0,\hat{h}) = E[C(1,\hat{h})]$ gelöst wird, sodass sich das Lösen des Problems (5) wieder auf die Minimierung der Varianz beschränkt. Diese Beobachtung könnte den falschen Eindruck erwecken, dass dieses neue Problem keinen neuen Einblick in das an H anhaftende Risiko liefert. Jedoch ist der Vorteil des neuen Problems (5), dass es auch zu einer optimalen Erstinvestition $V(0,\hat{h})$ führt, die durch

$$V(0,\hat{h}) = C(0,\hat{h}) = E[H-\hat{h}^1\Delta X(1)] = E[H] - \hat{h}^1 E[\Delta X(1)] \tag{6}$$

gegeben ist.

Föllmer und Schweizer (1988) bezeichneten diese Größe als *faire Prämie* (*fair premium*); die Strategie, die das Problem (5) löst wird als *Risikominimierungsstrategie* (*risk-minimizing strategy*) bezeichnet. Unter der Bedingung $E[\Delta X(1)] = 0$, die besagt, dass der diskontierte Preisprozess X ein Martingal ist, entspricht die faire Prämie gerade dem Barwert der Verbindlichkeit, d.h.

$$V(0,\hat{h}) = E[H].$$

Ist jedoch diese Bedingung nicht erfüllt, so unterscheidet sich im Normalfall die Prämie vom erwarteten Barwert der Leistung(Verbindlichkeit).

Risikominimierung eines fondgebundenen Versicherungsvertrags

Betrachten wir als Beispiel ein Portfolio aus reinen fondsgebundenen Erlebensfallversicherungen. Dies sind fondsgebundene Verträge ohne jegliche Garantien, d.h. die Versicherungsnehmer erhalten im Erlebensfall zum Zeitpunkt 1 den Wert $S^1(1)$ einer Einheit des Aktienindex. Der Barwert dieser Leistung zum Zeitpunkt 0 ist durch

$$H = Y(1)X(1), \text{ mit } Y(1) = \sum_{i=1}^{l_x} 1_{\{T^i>1\}}$$

als aktuelle Zahl der Überlebenden zum Zeitpunkt 1, gegeben. An dieser Stelle nehmen wir an, dass die verschiedenen Lebzeiten T^i voneinander unabhängig sind. Wenn wir jedoch zusätzlich voraussetzen, dass die Lebzeiten $(T^1, ..., T^{l_x})$ unabhängig von der Aktie X sind, so erhalten wir durch Nutzen von Standardformeln für bedingte Varianzen:

$$\begin{aligned}
Cov(H, \Delta X(1)) &= Cov(Y(1)X(1), \Delta X(1)) \\
&= E[Cov(Y(1)X(1), \Delta X(1)|X(1))] \\
&+ Cov(E[Y(1)X(1)|X(1)], E[\Delta X(1)|X(1)] \\
&= 0 + Cov(E[Y(1)]X(1), \Delta X(1)) \\
&= E[Y(1)]Var[\Delta X(1)].
\end{aligned}$$

Setzt man dies nun in den Ausdruck (3) ein so erhält man die optimale Anzahl an Aktien:

$$\hat{h^1} = E[Y(1)] = l_x \cdot {}_1p_x = l_{x+1}.$$

Folglich ist es optimal eine Anzahl von Aktien zu erwerben, die der erwarteten Anzahl der Überlebenden entspricht. Der optimale Kapitaleinsatz, gegeben durch Gleichung (6), ist dann

$$\begin{aligned}
V(0, \hat{h}) &= E[H] - \hat{h^1}E[\Delta X(1)] \\
&= E[Y(1)]E[X(1)] - E[Y(1)]E[X(1) - X(0)] \\
&= E[X(1)]X(0).
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis ist änlich der fairen Prämie aus Abschnitt 5.4 (vgl. Vortrag Xiaoying Xu), denn der Preis eines Vertrages zum Zeitpunkt 0, der eine Einheit des Aktienindex zum Zeitpunkt 1 zahlt, ist genau $S^1(0) = X(0)$.
(Kauf der Aktie in $t = 0$ und Verkauf der Aktie in $t = 1$.)
Die minimale Varianz und damit das geringfügigste Risiko verbunden mit der Risikominimierungsstrategie lässt sich nun durch Ausnutzen der Unabhängigkeit von $Y(1)$ und $X(1)$ einfach bestimmen. Mit den Formeln zur Berechnung bedingter Varianzen erhält man:

$$\begin{aligned} Var[H] &= E[Var[Y(1)X(1)|X(1)]] &+& \; Var[E[Y(1)X(1)|X(1)]] \\ &= E[X(1)^2]Var[Y(1)] &+& \; (E[Y(1)])^2 Var[X(1)]. \end{aligned}$$

Setzt man dies nun in die Gleichung (4) (minimal erreichbare Varianz) ein, so erhält man:

$$Var[C(1,\hat{h})] = E[X(1)^2]Var[Y(1)]. \tag{7}$$

Wann ist das Sterberisiko streuungsfähig?

Wir untersuchen nun für steigendes l_x das Verhalten des minimalen Risikos im Falle der standardisierten Leistungspflicht/Verbindlichheit:

$$H = \frac{1}{l_x} Y(1)X(1) = \frac{1}{l_x} \sum_{i=1}^{l_x} 1_{\{T^i > 1\}} X(1). \tag{8}$$

Wir nennen das Sterberisiko *streuungsfähig/streubar*, falls das minimale Risiko der Gleichung (8) für $l_x \to \infty$ gegen Null konvergiert.
Seien beispielsweise die Lebzeiten der Versicherungsnehmer unabhängig vom Aktienindex. Ist dies dann ausreichend für die Streuungsfähigkeit des Sterberisikos? Dieses Problem wollen wir im Folgenden detaillieter untersuchen.

Streuungsfähiges Sterberisiko: unabhängige Lebzeiten

Wenn wir zusätzlich annehmen, dass die Lebenserwartungen $T^1, ..., T^{l_x}$ sowohl i.i.d., als auch vom Aktienindex unabhängig sind, sieht man, dass

$$Y(1) \sim Bin(l_x, {}_1p_x) \text{ und somit } Var[Y(1)] = l_x \cdot {}_1p_x(1 - {}_1p_x).$$

Ersetzt man nun in den Berechnungen, die zur Gleichung (7) führen $Y(1)$ durch $\frac{1}{l_x}Y(1)$, so ist das minimal erreichbare Risiko (4) für (8) gegeben durch:

$$E[X(1)^2] \cdot \tfrac{1}{l_x} \cdot {}_1p_x(1 - {}_1p_x),$$

das in der Tat für $l_x \to \infty$ gegen Null konvergiert. In diesem Fall ist das Sterberisiko also streuungsfähig.

Nicht streuungsfähiges Sterberisiko

Es ist nicht sonderlich schwer einzusehen, dass das Sterberisiko im Allgemeinen nicht streungsfähig ist.
Um dies zu verdeutlichen betrachten wir als triviales Beispiel den Fall, dass alle Lebenserwartungen identisch sind, d.h. $T^i = T^1$ für $i = 1, 2, 3, ...$ In diesem Fall gilt für Gleihung (8):

$$H = 1_{\{T^1>1\}} X(1) \text{ und ist somit unabhängig von } l_x.$$

Ein interessantes Beispiel liefert hingegen die Annahme, die verschiedenen Lebenszeiten seien von einer zu Grunde liegenden Zufallsvariablen θ, die die Intensität der Sterblichkeit darstellt, unabhängig. Man kann beispielsweise annehmen, dass die wahre Sterblichkeitintensität $\tilde{\mu}(x + t)$ unbekannt und von der Form $\theta\mu(x + t)$ ist. Dabei ist $\mu(x + t)$ eine bekannte Funktion und θ eine nicht beobachtbare Zufallsvariable mit gegebener Verteilung. Dieses klassische Glaubwürdigkeitsmodell lässt sich wie folgt beschreiben:

- Gegeben seien $\theta = \vartheta, T^1, T^2, ...$ i.i.d. mit Überlebenswahrscheinlichkeit ${}_1p_x^{(\vartheta)} = P_\vartheta(T^1 > 1) = exp(-\int_0^1 \vartheta\mu_{x+s} ds)$
- θ sowie $T^1, T^2, ...$ seien unabhängig vom Aktienindex X.
- θ folgt einer nicht-ausgearteten (nicht singulären) Verteilung U

Dieses Sterblichkeitsmodell wurde von Norberg (1989) zur Analyse eines Portfolios von Gruppen-Lebensversicherungsverträgen verwendet.
Da der Paramenter θ zum Zeitpunkt 0 unbekannt ist, könnte man also zur Bewertung von Lebensversicherungsverträgen die erwartete Überlebenswahrscheinlichkeit $E[{}_1p_x^{(\theta)}]$ verwenden. Nach dem Gesetz der Großen Zahlen gilt jedoch:

$$\frac{1}{l_x} Y(1) = \frac{1}{l_x} \sum_{i=1}^{l_x} 1_{\{T^i>1\}} \to P_\theta(T^1 > 1) = exp(-\int_0^1 \theta\mu_{x+s} ds), \text{ für } l_x \to \infty.$$

Dieser Grenzwert ist nicht mehr konstant und unterscheidet sich in der Regel von $E[{}_1p_x^{(\theta)}]$. Folglich ist das Problem, dass man bei Verwendung der Überlebenswahrscheinlichkeit $E[{}_1p_x^{(\theta)}]$ systematisch eine falsche Wahrscheinlichkeit gebraucht, wohingegen die wahre bedingte (und auch unabhängige) Wahrscheinlichkeit durch ${}_1p_x^{(\theta)}$ gegeben ist.

Die finanziellen Konsequenzen bei wachsender Größe des Portfolios sind offensichtlich und dramatisch:
Falls die bedingte Überlebenswahrscheinlichkeit die Genutzte übersteigt, so verliert das Versicherungsunternehmen systematisch an Geld.
Ist andererseits die bedingte Wahrscheinlichkeit kleiner als die Genutzte, so wir das Versicherungsunternehmen systematisch Geld generieren. Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass $Y(1)$, gegeben $\theta = \vartheta$, binomialverteilt mit Paramentern $(l_x, {}_1p_x)$ ist, erkennt man mit Hilfe der gängigen Formeln zur Berechnung von bedingten Varianzen, dass gilt:

$$\text{Var[Y(1)]=E[Var[Y(1)}|\theta]] + Var[E[Y(1)|\theta]] = l_x E[{}_1p_x^{(\theta)}(1 - {}_1p_x^{(\theta)})] + l_x^2 Var[{}_1p_x^{(\theta)}]. \tag{9}$$

Um nun das minimal erreichbare Risiko (4) der standadisierten Leistungspflicht, gegeben in (8), zu berechnen, ist demnach $Var[\frac{1}{l_x}Y(1)]$ zu bestimmen. Das minimale Risiko wird in diesem Fall zu

$$E[X(1)^2]\frac{1}{l_x^2}Var[Y(1)] = E[X(1)^2](\frac{1}{l_x}E[{}_1p_x^{(\theta)}(1 - {}_1p_x^{(\theta)})] + Var[{}_1p_x^{(\theta)}]),$$

und konvergiert für $l_x \to \infty$ gegen

$$E[X(1)^2]Var[{}_1p_x^{(\theta)}]. \tag{10}$$

Also bestimmt der letzte Term in (9) das asymptotische Verhalten des Risikos. Wir sehen, dass das relative Risiko des Versicherungsunternehmens nicht gegen Null konvergiert, auch wenn sich das Portfolio vergrößert.
Dies stimmt mit obigen Beobachtungen überein und ist selbstverständlich nicht sonderlich überraschend, da wir hier θ als unbekannt vorausgesetzt haben. Eine ähnliche Beobachtung liefert der Grenzwert des minimalen Risikos in (10), der genau die Unglaubwürdigkeit der Überlebenswahrscheinlichkeit beschreibt.
Das der zu Grunde liegenden Zufälligkeit zugeordnete Risiko wird auch *systematisches Mortalitätsrisiko* (*systematic mortality risk*) genannt, da sich

dieses nicht durch das Vergrößern des Portfolios beseitigen lässt. Dies steht im Gegensatz zum traditionellen Sterberisiko, dem sogenannten *unsystematischen Mortalitätsrisiko* (*unsytematic mortality risk*), das mit wachsender Größe des Portfolios verschwindet.

Das Beispiel lässt sich weiter verallgemeinern durch die Annahme, die Sterbeintensität werde von einem Prozess $\theta = (\theta(t))_{t\geq 0}$ beinflusst derart, dass sie zum Zeitpunkt t eine Funktion von $\theta(t)$ ist. Der Prozess θ bestimmt dabei gesellschaftliche sowie wirtschaftliche Faktoren, die die Sterblichkeit der im Portfolio enthaltenen versicherten Leben beeinflussen. Dazu genügt es im obigen Beispiel die Definition der bedingten Überlebenswahrscheinlichkeit wie folgt zu ändern:

$$ {}_tp_x^{(\theta)} = exp(-\int_0^t \mu_{x+s}(\theta(s))ds). $$

Nicht streuungsfähiges Sterberisiko und Katastrophen

Weitere Beispiele mit nicht streuungsfähigem Risiko lassen sich durch Berücksichtigung einzelner Ereignisse konstruieren, die ggf. den gleichzeitigen Tod eines Teils der versicherten Leben verursachen können (Katastrophen). Ein einfaches Besipiel ist die Situation, in der eine Katastrophe im Zeitintervall (0,1) mit Wahrscheinlichkeit p_0 auftritt, wobei die Anzahl der Toten, verursacht durch diese Katastrophe, binomialverteilt ist mit Parametern (l_x, p), mit p gleichverteilt auf (0,1).

Ist diese Katastrophe die einzige Todursache, so lässt sich leicht zeigen, dass in diesem Fall $Var[\frac{1}{l_x}Y(1)] \nrightarrow 0$, falls $l_x \to \infty$.

Modellierung des systematischen Mortalitätsrisikos

Wie bereits erwähnt sind die wirtschaftlichen Konsequenzen in Gegenwart systematischem Sterberisikos in der Tat dramatisch. Falls wir beispielsweise zu niedrige Überlebenswahrscheinlichkeiten zur Preisbildung von Leibrenten oder Erlebensfallversicherungen verwenden, so verlieren wir systematisch an Kapital. Daher ist es notwendig weitere Modelle zu studieren, die mögliche Veränderungen in der zukünftigen Mortalität in Betrachtung ziehen. Da jedoch die künftige Sterblichkeit von vielen (unvorhersehbaren) Faktoren beeinflusst wird, sollten ausschließlich Modelle verwendet werden, in denen die

zukünftige Sterblichkeit durch stochastische Prozesse modelliert ist.
Verschiedene Ansätze für das Modellieren des systematischen Sterberisikos wurden in der Literatur behandelt. Ein Ansatz ist die sogenannte *Lee-Carter Methode*, bei der die altersabhängigen jährlichen Todesraten von einem zeitunabhängigen Faktor beeinflusst werden, der aus einem Zeitreihen-Modell resultiert.

Der Handel mit Mortalitätsrisiko

In Gegenwart von systematischem Mortalitätsrisiko lässt sich das mit der Sterblichkeit verbundene Risiko nicht durch ein Vergrößern des Portfolios eliminieren. Ein alternativer Weg, um dieses Risiko zu kontrollieren ist sicherlich die Zufuhr von Aktien (Kapital), die mit der Entwicklung der Sterblichkeit in Verbindung stehen und tatkräftig gehandelt werden können.
Eine Möglichkeit könnte sein, Aktive hinzuzufügen, die deutlich vom Verhalten der versicherten Leben im Versicherungsportfolio abhängen. Dies wäre ähnlich den sogenannten "*dynamic reinsurance markets*", aufgestellt von Delbaen und Haezendonck (1989) und Sondermann(1991), und zuletzt genauer von Møller untersucht. Anwendungen in der Lebensversicherung findet man auch in Møller (1998) und Steffensen (2001).
So genannte *Sterblichkeitsanleihen* und der *Sterblichkeitsaustausch* (*mortality bonds* und *mortality swaps*) wurden eingeführt; für detaillierte Beschreibungen ihrer Eigenschaften vgl. beispielsweise Blake, Cairns und Dowd (2006). Ein '*mortality bond*' ist im Wesentlichen eine Anleihe, deren Zahlungen von der Entwicklung der Sterblichkeit in einer speziellen Gruppe abhängen. Betrachte, zum Beispiel, eine bestimmte Gruppe (z.B. alle Personen eines bestimmten Alters eines Landes) und nehme an, alle Zahlungen seien proportional zur aktuellen Anzahl der Überlebenden in dieser Gruppe. In diesem Fall steigen die Zahlungen an den Besitzer der Anleihe, falls die betrachteten Individuen länger leben als erwartet. Das bedeutet also, dass der Markwert des mortality bonds steigt, falls sich die Sterblichkeit verbessert. Demzufolge kann der mortality bond als eine Absicherung gegen einen allgemeinen Abfall der zu Grunde liegenden Sterblichkeit angesehen werden.
Ein so genannter '*mortality swap*' ist von einer ähnlichen Konstruktion.

Hierbei kann ein Versicherer die unsicheren Zahlungen in einem aus Rentenemfängern bestehendem Portfolio gegen einen festgesetzten, sicheren Zahlungsstrom austauschen, indem er einen Mortalitätsswap-Geschäft mit einem Rückversicherer abbschließt.

3 Das Mehr-Perioden-Modell

3.1 Wichtige Begrifflichkeiten

In diesem Abschnitt wollen wir das Mehr-Perioden-Modell aus Kapitel 3 und 4 mit dynamischen Anlagestrategien besprechen.
Diese Modell wird in Abschnitt 5.7 (nachfolgender Vortrag) für die Analyse des Risikos eines aus fondsgebundenen Lebenssversicherungsverträgen bestehenden Portfolios verwendet. Dieser Abschnitt erinnert noch einmal an die Definitionen einer selbstfinanzierenden Strategie, eines Wertschöpfungsprozesses, eines Kostenprozesses, der Arbitrage, der Definition eines Martingalmaßes sowie der Erreichbarkeit.
Der interessierte Leser sei für weitere Details auf Kapitel 4 verwiesen. Wir betrachten zunächsten einen Zeithorizont T und bezeichnen mit $S^1(t)$ den Aktienwert zum Zeitpunkt $t \in \{0, 1, ..., T\}$.
Der Wert einer Einheit im Zeitpunkt t, angelegt auf dem Bankkonto im $t = 0$ sei per Anname gegeben durch $S^0(t) = (1 + r)^t$, mit Jahreszinssatz $r > 0$. Die diskontierten Preise sind definiert durch $X(t) = \frac{S^1(t)}{S^0(t)}$ bzw. $X^0(t) = \frac{S^0(t)}{S^0(t)} = 1$. In diesem Fall schreiben wir für S^1 kein bestimmtes Modell vor, man kann jedoch beispielweise von einem Binomialmarkt ausgehen, in dem die relative Veränderung des Aktienwertes nur zwei verschiedende Werte erreichen kann. Dieses Beispiel wird in Abschnitt 3.3 fortschreitend untersucht.

Definition 3.1
Eine Anlagestrategie (investment strategy) ist ein Prozess $h = (h^0, h^1) = (h^0(t), h^1(t))_{t=0,1,...,T}$, in dem $h^1(t)$ von der im Zeitpunkt $t-1$ verfügbaren Information abhängt und $h^0(t)$ von der Information zum Zeitpunkt t abhängen kann.

Sei $\mathcal{F}(t)$ die zum Zeitpunkt t verfügbare Information und nehme an

$$\mathcal{F}(s) \subseteq \mathcal{F}(t) \text{ für } 0 \leq s \leq t \leq T.$$

Bezeichne mit $h^1(t)$ die Anzahl an Aktien in der Anlagestrategie des Unternehmens im Zeitintervall $[t-1,t]$ und mit $h^0(t)$ die diskontierte Einzahlung auf das Bankkonto zum Zeitpunkt t (eine negative Einzahlung entspricht einer Anleihe).

Definition 3.2
Der Wertschöpfungsprozess (value process) V(h) beschreibt zu jeder Zeit t den aktuellen Wert des Portfolios $(h^0(t), h^1(t))$.
Dieser ist gegeben durch:

$$V(t,h) = (S^0(t))^{-1}(h^1(t)S^1(t) + h^0(t)S^0(t)) = h^1(t)X(t) + h^0(t). \quad (11)$$

In Kapitel 3 und 4 führten wir den Begriff einer *selbsfinanzierenden Strategie* (*self-financing strategy*) auf zwei verschiedene Arten ein. Auf den ersten Blick könnte dies den Eindruck erwecken, dass diese beiden Definitionen wirklich voneinander verschieden sind. Hier wollen wir jedoch zeigen, dass diese tatsächlich äquivalent sind.

Definition 3.3
(Kap.3) Eine Anlagestrategie heit selbstfinanzierend, falls ihr Kostenprozess (cost process)

$$C(t,h) = V(t,h) - \sum_{s=1}^{t} h^1(s)\Delta X(s) \quad (12)$$

konstant (und gleich C(0,h)=V(0,h)) war.

Dies führt zu der Aussage

$$V(t,h) = V(0,h) + \sum_{s=1}^{t} h^1(s)\Delta X(s). \quad (13)$$

Diese lässt sich wie folgt interpretieren:
Falls h selbstfinanzierend ist, so ist der diskonierte Wert des Portfolios $h(t) = (h^0(t), h^1(t))$ zum Zeitpunkt t genau gleich dem Startwert $V(0,h)$ zum Zeitpunkt 0, zu dem die diskonierten Handelserträge der Anlage in den Aktien addiert sind.
Für die Periode $[s-1,s]$ sind die diskontierten Erträge $h^1(s)\Delta X(s)$(die Anzahl $h^1(s)$ der zum Zeitpunkt $s-1$ erworbenen Aktien multipliziert mit der

diskontierten Werteveränderung der Aktie $\Delta X(s) = X(s) - X(s-1)$ im Intervall $[s, s-1]$).
Die akkumlierten Kosten $C(t,h)$ für das Intervall $[0,t]$ sind dann der Wert des Portfolios zum Zeitpunkt t reduziert um vergangene Investitionsgewinne.
Wir sehen nun, dass die Gleichung

$$h^0(t)S^0(t) + h^1(t)S^1(t) = h^0(t+1)S^0(t) + h^1(t+1)S^1(t), t = 1, ..., n-1 \quad (14)$$

(selbstfinanzierende Portfolios, die diese Gleichung erfüllen; vgl. Vortrag Carolin Wilms) aus Kapitel 4 aus dieser Definition folgt. Zunächst bemerken wir, dass Gleichung (13)

$$\Delta V(t+1,h) = V(t+1,h) - V(t,h) = h^1(t+1)\Delta X(t+1)$$

liefert.
Unter Verwendung von Gleichung (11), erhält man:

$$\begin{aligned} V(t+1,h) - V(t,h) = (h^1(t+1) - h^1(t))X(t) &+ h^1(t+1)(X(t+1) - X(t)) \\ &+ (h^0(t+1) - h^0(t)). \end{aligned}$$

Vergleicht man diese beiden Ausdrücke für $\Delta V(t+1,h)$, so folgt:

$$h^1(t+1)X(t) + h^0(t+1) = h^1(t)X(t) + h^0(t).$$

Dies entspricht dann nach beidseitiger Multiplikation mit $S^0(t)$ gerade obiger Gleichung (14) aus Kapitel 4.

Definition 3.4
Eine selbstfinanzierende Strategie h heißt Arbitragestrategie, falls gilt:

- $V(0,h) = 0,$
- $V(T,h) \geq 0 \; P - fast\ sicher,$
- $P(V(T,h) > 0) > 0.$

Definition 3.5
Ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q ist ein äquivalentes Martingalmaß für X, falls für alle $A \in \mathcal{F}$ gilt $P(A) = 0 \Leftrightarrow Q(A) = 0$ und X ein Q-Martingal ist, d.h.

$$E^Q[X(u)|\mathcal{F}(t)] = X(t) \text{ für } 0 \leq t \leq u \leq T. \quad (15)$$

Bemerkung 3.6
Der Term $E^Q[X(u)|\mathcal{F}(t)]$ ist der erwartete diskontierte Aktienwert zum Zeitpunkt u bzgl. des Maßes Q, bedingt unter der Information zum Zeitpunkt t.

Im Vortrag von Vitali Müller (Abschnitt 3.3) haben wir gesehen, dass bei Existenz eines Martingalmaßes Arbitragemöglichkeiten ausgeschlossen sind. Eine Übereinkommen zweier Parteien verursacht eine diskontierte Verbindlichkeit H zum Zeitpunkt T; wir bezeichnen H als einen *bedingten Anspruch*.
Bei gegebenem bedingten Anspruch ist es wichtig, die Existenz einer selbstfinanzierenden Strategie h mit $V(T,h) = H$ zu überprüfen. Ist dies der Fall, so heißt H *erreichbar*.
Dieses Konzept ist wesentlich für unsere anschließende Auseinandersetzung mit der Wahl der Anlagestrategie für integrierte Finanz- und Versicherungsrisiken. Die Voraussetzung der Erreichbarkeit besagt, dass es eine Strategie $h = (h^0, h^1)$ gibt, sodass

$$H = V(T,h) = V(0,h) + \sum_{t=1}^{T} h^1(t)\Delta X(t). \tag{16}$$

Hier bezeichnet $V(0,h)$ den *Nachbildungspreis* (*replication price*), d.h den im Zeitpunkt 0 zu investierenden Betrag.
Folgt der Investor/Kapitalgeber der Strategie h, so kann er bis zum Zeitpunkt T genügend Kapital erwirtschaften, um die Verbindlichkeit H zu decken. Unter Verwendung des Martingalmaßes Q lässt sich $V(0,h)$ wie folgt bestimmen:
Da X ein Q-Martingal ist, liefert die Bildung des Erwartungswertes auf beiden Seiten in Gleichung (16)

$$E^Q[H] = E^Q[V(T,h)] = V(0,h).$$

Wie bereits im Vortrag von V. Müller gesehen, lässt sich also der arbitragefreie Preis der Verbindlichkeit als Erwartungswert der diskontierten Zahlungen unter Q berechnen.

3.2 Unerreichbare Ansprüche

Erreichbarkeit ist eine ganz besondere Eigenschaft. Aus Vortrag 5 (C. Wilms) wissen wir: Ein Modell heißt *vollständig*, falls jeder bedingte Anspruch erreichbar ist. Wichtige Beispiele, die wir bereits kennen gelernt haben sind der *Binomial-* und der *Black-Scholes-Markt*. In diesen beiden Modellen ist jeder bedingte Anspruch erreichbar. Jedoch ist es hierbei in der Definition eines bedingten Anspruchs absolut notwendig, dass die Größe nur vom Risiko im Finanzmarkt abhängt.
Beispielsweise lässt sich eine Europäische Call-Option $(S^1(T)-K)^+$ sowohl in Binomial- als auch in Black-Scholes-Märkten hedgen(absicheren). Um solche Ansprüche von komplizierteren Ansprüchen abgrenzen zu können, benutzen wir auch den Begriff eines *rein finanziellen bedingten Anspruchs* (*purely financial contingent claim*).
Die Situation ändert sich hingegen drastisch, falls wir bedingte Ansprüche betrachten, die auch von anderen Risikoquellen abhängen; z.B. von der Anzahl der Überlebenden eines Vericherungsportfolios. Intuitiv erscheint es ersichtlich, dass sich solche Verbindlichkeiten nicht vollständig durch das Handeln am Finanzmarkt absichern lassen, falls diese bsplw. von der Anzahl der Überlebenden abhängen.
Weiter bezeichnen wir einen Anspruch, der sowohl vom Versicherungsrisiko, als auch vom Finanzrisiko abhängt als einen *eingebundenen* oder auch *integrierten bedingten Anspruch* (*integrated contingent claim*). Typischerweise führt daher die Erweiterung der Menge bedingter Ansprüche zu einem so genannten *unvollständigen Markt*, d.h. zu einem Markt, der nicht vollständig ist, da diese integrierten Ansprüche im Allgemeinen nicht erreichbar sind.
Der Rest dieses Kapitels gibt eine Einführung in die Methoden zur Bestimmung optimaler Anlagestrategien in unvollständigen Märkten im Falle ein nicht erreichbaren Leistungspflicht. Wir beschäftigen uns also mit Situationen, in denen es nicht möglich ist eine Replikationsstratie (angleichende Strategie) für die Verbindlichkeit zu finden. In diesem Fall reicht also das Prinzip der Arbitragefreiheit zur Berechnung eindeutiger Preise oder angleichender Anlagestrategien für die Verbindlichkeit nicht aus. Dies hat zur Folge, dass wir einen eindeutigen Preis eines fondsgebundenen Versicherungsvertrages mittels des vorliegenden Modells nicht bestimmen können, falls wir die An-

nahme des streuungsfähigen Mortalitätsrisikos auslassen. Jedoch gibt es diesbezüglich viele andere Grundsätze (Theorien), die für die Bewertung und das Hedging in solchen Situationen angewendet werden können.
Hier wollen wir eine Einführung in diese Grundsätze geben und illustrieren, wie sie für ein Portfolio aus fondsgebundenen Lebensversicherungsverträgen funktionieren (und wie nicht).

3.3 Das Binomialmodell

In diesem Abschnitt erinnern wir uns wieder an das in Kapitel 4 vorgestellte Binomialmodell. Dieses ist vollständig, sodass alle rein finanziellen Ansprüche erreichbar sind.
Im Binomialmodell ist das dynamische Verhalten der Aktie gegeben durch

$$S^1(t) = (1 + Z(t))S^1(t-1), \tag{17}$$

wobei $Z(1), Z(2), ..., Z(T)$ eine von Folge i.i.d. Zufallsvariablen ist mit $Z(1) \in \{a, b\}$ und $0 < P(Z(1) = b) < 1$. Dabei beschreibt $Z(t)$ die relative Veränderung des Aktienwertes in der Periode $(t-1, t]$. Wir nehmen an, dass diese Größe nicht vor dem Zeitpunkt t bekannt ist.
Wie bereits erwähnt, beschreibt $S^0(t) = (1+r)^t$ das Bankkonto. Weiter setzen wir für die Parameter a, b, r die Bedingung $-1 < a < r < b$ voraus. Das bedeutet, dass die Aktienrendite den Zinsatz mit positiver Wahrscheinlichkeit übersteigt und umgekehrt.
Der diskontierte Preisprozess

$$X(t) = \frac{S^1(t)}{S^0(t)} \text{ ist durch } X(t) = X(t-1)\frac{1+Z(t)}{1+r} \text{ gegeben.}$$

Sei nun $\mathbf{G} = (\mathcal{G}(t))_{t \in \{0,1,2,...,T\}}$ eine Filtration für S^1 mit
$\mathcal{G}(t) = \sigma\{S^1(1), ..., S^1(t)\}$, wobei $\mathcal{G}(0)$ trivial ist. Wiederum kann $\mathcal{G}(t)$ als die Information interpretiert werden, die sich auf die Beobachtung des Aktienpreises S^1 bis zum Zeitpunkt t bezieht.
Wir definieren ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q durch folgende Eigenschaften:

- $Q(Z(1) = b) = \frac{r-a}{b-a} = q$;
- $Z(1), ..., Z(T)$ sind i.i.d. unter Q.

Die Annahme $a < r < b$ liefert $0 < q < 1$, sodass Q in der Tat ein zu P äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß ist. Nutzt man die Unabhängigkeit von $Z(t)$ und $(S^1(1), ..., S^1(t-1))$, so gilt:

$$E^Q[(1 + Z(t))|\mathcal{G}(t-1)] = 1 + E^Q[Z(t)] = 1 + qb + (1-q)a = 1 + r.$$

Dies zeigt, dass der diskontierte Preisprozess X ein $(\mathbf{G}, \mathbf{Q})$-Martingal ist, denn es gilt:

$$E^Q[X(t)|\mathcal{G}(t-1)] = X(t-1)\tfrac{1}{1+r}E^Q[(1 + Z(t))|\mathcal{G}(t-1)] = X(t-1).$$

In Kapitel 4 wurde gezeigt, dass das Binomialmodell vollständig ist. Dies lässt sich nun wie folgt formulieren:

Theorem 3.7
Sei H ein (diskontierter) rein finanziell bedingter Anspruch, der zum Zeitpunkt T fällig wird. Nehme an, der Finanzmarkt sei durch das Binomialmodell modelliert. Dann existiert ein Prozess $\alpha(H)$ derart, dass

$$H = H(0) + \sum_{j=1}^{T} \alpha(j, H)\Delta X(j), \tag{18}$$

wobei $H(0)$ konstant ist und $\alpha(j, H)$ von der zum Zeitpunkt $j-1$ verfügbaren Information abhängt.

Gleichung (18) wird auch *Darstellungsformel* (*representation formula*) genannt, da sie erlaubt H als Summe einer Konstanten $H(0)$ und einigen Termen der Fom $\alpha(j, H)\Delta X(j)$ darzustellen. Wir betonen an dieser Stelle, dass diese Repräsentationseigenschaft für das Binomialmodell sehr besonders ist. Falls wir beispielsweise die Größen $Z(1), ..., Z(T)$ in Gleichung (17) durch Zufallsvariablen, die drei verschiedene Werte (ein dreigliedriges Modell) annehmen können, ersetzt hätten, so würde dieses Resultat nicht länger gelten. Im dreiteiligeen Modell ist es üblicherweise nicht möglich, eine Darstellung dieser einfachen Form für einen bedingten Anspruch zu finden.
Ein weiteres bedeutendes Beispiel, für das sich solche Darstellungsresultate erstellen lassen, ist ein bedingter Anspruch, der von einer zusätzlichen Risikoquelle abhängt, z.B. von der Anzahl an Überlebenden eines Portfolios aus versicherten Leben.

Theorem 3.7 lässt sich zur Herleitung einer selbstfinanzierenden Strategie $h = (h^0, h^1)$ verwenden, die einen rein finanziell bedingten Anspruch H nachbildet.
Wenn wir $h^1(t) = \alpha(t, H)$ zulassen und $h^0(t)$ durch

$$V(t,h) = h^1(t)X(t) + h^0(t) = H(0) + \sum_{j=1}^{t} \alpha(j,H)\Delta X(j)$$

definieren, so folgt, dass h selbstfinanzierend ist und $V(T,h) = H$ gilt.
Wir haben also eine selbstfinanzierende Strategie konstruiert, die H nachbildet. Diese selbstfinanzierende Strategie benötigt einen Kapitaleinsatz von $H(0)$ zum Zeitpunkt 0. Sprich, H(0) ist der Nachbildungspreis für H.
In Kapitel 4 wurde $\alpha(H)$ für eine Europäische Call-Option hergeleitet, d.h.

$$H = \tfrac{f(S^1(T))}{S^0(T)},$$

mit $f(S^1(T)) = (S^1(T) - K)^+$. Im Binomialmodell lässt sich $\alpha(t,H)$ im Allgemeinen durch die Einführung des folgenden Prozess bestimmen:

$$V^*(t) = E^Q[H|\mathcal{G}(t)]$$

und man definiert dann $\alpha(H)$ durch

$$\alpha(t,H) = \frac{Cov^Q(\Delta V^*(t), \Delta X(t)|\mathcal{G}(t-1))}{Var^Q[\Delta X(t)|\mathcal{G}(t-1)]}. \tag{19}$$