Seminar Versicherungsrisiko und Ruin

Extremwerttheorie (EVT)

Chen Hong

Mathematisches Institut
der
Universität zu Köln

Sommersemester 2009

Betreuung: Prof. Schmidli, J. Eisenberg

Contents

Chapter 1

Maxima

1.1 Die Verallgemeinerte Extremwertverteilung (GEV)

Konvergenz von Summe
Die Rolle von GEV in EVT ist ähnlich wie die Normal Verteilung in der Zentraler Grenzwertsatz für Summe von ZV'en
Seien X_n i.i.d. Zufallsvariablen mit $0 < \mathrm{Var}(X_1) < \infty$. Dann gilt:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - E(X_i))}{\sqrt{nVar(X_1)}} \to N(0,1) \tag{1.1}$$

Konvergenz von Maxima
Sei $M := \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ Block Maxima
Die einzige mögliche nicht-deterministische Grenzverteilung für normalisierte Block Maxima sind in der GEV Familie.

Definition 1.1.1 (Die Verallgemeinerte Extremwertverteilung)
Die (standard) Dichtefunktion von GEV ist gegeben durch

$$H_\xi(x) = \begin{cases} \exp(-(1+\xi x))^{-\frac{1}{\xi}}, & \xi \neq 0 \\ \exp(-\exp(-x)), & \xi = 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

wobei $1 + \xi x > 0$
Wie definieren $H_{\xi,\mu,\sigma} := H_\xi((x-\mu)/\sigma)$
mit $\mu \in \mathbb{R}$ *Ortsparameter und* $\sigma > 0$ *Skalierungsparameter,* ξ *Formparameter*

H_ξ bezeichnet eine Familie von Verteilungsfunktionen, die bis auf Ortsparameter und Skalierungsparameter bestimmt sind.

Bemerkung 1.1.2
Die Extremwertverteilung kann in drei Klassen unterteilt werden
Für $\xi > 0$ Fréchet Verteilung
Für $\xi = 0$ Gumbel Verteilung
Für $\xi < 0$ Weibull Verteilung
$lim_{\xi \to 0} H_\xi(x) = H_0(x)$ für fest x stetig in ξ

Angenommen $M := \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ Block-Maxima konvergieren in Verteilung unter einer angemessenen Normalisierung
Das heißt, es existiert reelle Konstanten d_n und $c_n > 0$ für alle n, so dass

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}((M_n - d_n)/c_n \leq x) = \lim_{n\to\infty} F^n(c_n x + d_n) = H(x) \tag{1.3}$$

für irgendeine nicht deterministische Verteilungsfunktion.

Definition 1.1.3 (Maximum-Anziehungsbereich von H)
Wenn (1.3) *gilt für irgendeine nicht deterministische Verteilungsfunktion. Dann sagen wir, F liegt in dem Maximum Anziehungsbereich von H. Notation: $F \in MDA(H)$*

Theorem 1.1.4 (Fischer-Tippett, Gnedenko)
Wenn $F \in \mathrm{MDA}(H)$ für irgendeine nicht deterministische Verteilungsfunktion , dann muss H eine Verteilung vom Typ H_ξ sein, nämlich GEV Verteilung.

Bemerkung 1.1.5
Sollten die normalisierten Maxima tatsächlich konvergieren, dann ist der Typ der Grenzverteilung eindeutig bestimmt. μ,σ hängen vor c_n,d_n ab. Aber wir können c_n,d_n immer so wählen, dass $H_{\xi,\mu,\sigma}$ mit $\mu = 0, \sigma = 1$

Beispiel 1.1.6 (Exponential Funktion)
Seien $(X_i)_{i\in N}$ mit Verteilungsfunktion $F(x) = 1 - \exp(-\beta x)$ für $\beta > 0, x \geq 0$ dann wählen wir $c_n = 1/\beta$, $d_n = \ln n/\beta$

$$F^n(c_n x + d_n) = (1 - 1/n \exp(-x))^n, x > -\ln n \tag{1.4}$$

$$\lim_{n\to\infty} F^n(c_n x + d_n) = \exp(-\exp(-x)), x \in R \tag{1.5}$$

daher $F \in \mathrm{MDA}(H_0)$

Beispiel 1.1.7 (Pareto Verteilung)
Seien $(X_i)_{i\in N}$ Pareto-verteilte ZV'en mit Verteilungsfunktion $F(x) = (1 - k/(k+x))^{\alpha}$ für $\alpha > 0, k > 0, x \geq 0$ dann wählen wir $c_n = kn^{1/\alpha}/\alpha$, $d_n = kn^{1/\alpha} - k$

$$F^n(c_n x + d_n) = (1 - 1/n(1 + x/\alpha)^{-\alpha}\}^n, \quad 1 + \frac{x}{\alpha} \geq n^{1/\alpha} \tag{1.6}$$

$$\lim_{n\to\infty} F^n(c_n x + d_n) = \exp(-(1 + x/\alpha)^{-\alpha}), \quad 1 + \frac{x}{\alpha} \geq 0 \tag{1.7}$$

daher $F \in \mathrm{MDA}(H_{1/\alpha})$

Konvergenz von Minima
Da $\min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} = -\max\{-X_1, -X_2, \ldots, -X_n\}$
Seien $(X_i)_{i\in N}$ i.i.d. mit Verteilungsfunktion F
Dann sind $(-X_i)_{i\in N}$ i.i.d. mit Verteilungsfunktion $\widetilde{F}(x) = 1 - F(-x)$
Sei $M_n^* := \max\{-X_1, -X_2, \ldots, -X_n\}$
angenommen $\widetilde{F} \in \mathrm{MDA}(H_\xi)$
wir haben dann
$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\frac{M_n^* - d_n}{c_n} \leq x) = H_\xi(x)$,
woraus folgt
$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\frac{\min\{X_1, X_2 \ldots X_n\}) + d_n}{c_n} \leq x) = 1 - H_\xi(-x)$.

1.2 Maximum-Anziehungsbereich

Alle stetige Verteilungsfunktionen, die wir üblicherweise in der Statistik oder Versicherungsmathematik benutzt werden, sind in $\mathrm{MDA}(H_\xi)$ für einen ξ.
Im diesem Abschnitt untersuchen wir welche Verteilungsfunktionen konvergiert zu welchen Grenzverteilungsfunktion für Maxima führen.
Der Fréchet Fall $(\xi > 0)$
Alle Verteilungsfunktionen, die zur Fréchet Verteilung konvergieren, haben eine elegante Charakterisierung.

Definition 1.2.1 (langsam variierende und regulär variierende Funktionen)
(a) Eine positive, Lebesgue-messbare Funktion L auf $(0, \infty)$ heißt langsam variierend bei ∞,wenn

$$\lim_{x\to\infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1, \quad t > 0 \tag{1.8}$$

(b) Eine positive, Lebesgue-messbare Funktion h auf $(0, \infty)$ heißt regulär variierend bei ∞ mit Index $\rho \in R$ wenn

$$\lim_{x \to \infty} \frac{h(tx)}{h(x)} = t^{\rho}, \quad t > 0 \tag{1.9}$$

Die langsam variierende Funktionen sind Funktion, die sich ganz langsam ändern, wenn x groß ist.
Beispiel:
$L(x) = \ln x$ ist langsam variierend.
Sei $h(x)$ eine regulär variierende Funktion mit Index ρ, dann $\exists$ langsam variierend Funktion $L(x)$, sodass

$$h(x) = x^p L(x) \tag{1.10}$$

Theorem 1.2.2 (Fréchet MDA, Gnedenko)
Für $\xi > 0$

$$F \in \mathrm{MDA}(H_\xi) \Leftrightarrow \bar{F}(x) = x^{-1/\xi} L(x) \tag{1.11}$$

für eine langsam variierende Funktion L bei ∞, $\alpha = 1/\xi$ heißt Flankenindex

Dieser Fall ist wichtig, weil die Verteilungsfunktion eine schwere Flanke und unendliche höhere Momente hat.
wenn X eine nicht-negativ ZV und F in $\mathrm{MDA}(H_\xi)$ für ein $\xi > 0$
Man kann zeigen dass $E[x^k] = \infty$ für $k > \frac{1}{\xi}$
Beispiele: Fréchet, Student t, Loggamma Verteilung

Beispiel 1.2.3 (Student t Verteilung)
Student t Verteilung mit Parameter $\upsilon \geq 1$ hat eine Dichte der Form $f_\upsilon(x) = x^{-(\upsilon+1)} L(x)$ nach Karamata Theorie

$$\bar{F}_\upsilon(x) = \int_x^\infty y^{-(\upsilon+1)} L(y) dy \Leftrightarrow \upsilon^{-1} x^{-\upsilon} L(x), \quad x \to \infty \tag{1.12}$$

Das heißt $\bar{F}_\upsilon$ von einem Student t Verteilung hat Flankenindex υ und
$F_\upsilon \in \mathrm{MDA}(H_{1/\upsilon})$.

Beispiel 1.2.4 (inverse Gamma Verteilung)
Inverse Gamma-Verteilung mit Parameter α, β hat eine Dichte der Form

$f_{\alpha,\beta}(x) = x^{-(\alpha+1)}L(x)$, da $\exp(-\beta/x) \to 1$, für $x \to \infty$ Mit dem gleichen Trick schließen wir
inverse Gamma-Verteilung hat Flankenindex α und
$F_{\alpha,\beta} \in \mathrm{MDA}(H_{1/\alpha})$

Der Gumbel Fall ($\xi = 0$)
Die Charakterisierung dieser Klasse ist wesentlich komplexer als der Fréchet-Klasse.
Eine positive ZV mit einer Verteilungsfunktion in $\mathrm{MDA}(H_0)$ hat endliche Momente, nämlich $E[X^k] < \infty$ für alle $k > 0$
Beispiele: die Gamma, Gumbel-Verteilung
Die mathematische Charakterisierung der Gumbel-Klasse ist, dass es sich aus den sogenannten von Mises Verteilungsfunktion oder andere Verteilungsfunktion, die zu von Mises Verteilungsfunktion Flankenäqivalent sind, zusammensetzt.
Wir geben die beiden Definition.

Definition 1.2.5 (von Mises Verteilungsfunktion)
Wenn es ein $z < x_F$ existiert, sodass F hat die Darstellung

$$\bar{F}(x) = c\exp(-\int_z^x \frac{1}{a(t)}dt), \quad z < x < x_F, \tag{1.13}$$

wobei c eine Konstante, $a(t)$ ist eine positive und absolut stetige Funktion mit Dichte a' und $\lim_{x\to x_F} a'(x) = 0$. Dann ist F die sogenannte von Mises Verteilungsfunktion.

Definition 1.2.6 (Flankenäqivalenz)
Zwei Verteilungsfunktion sind sogenannte Flankenäqivalent, wenn sie die gleichen rechten Endpunkte haben und $\lim_{x\to x_F} \bar{F}(x)/\bar{G}(x) = c$ für eine Konstante $0 < c < \infty$

Um zu entscheiden, ob eine konkrete Verteilungsfunktion eine von Mises Verteilungsfunktion ist, ist die folgende Bedingung nützlich. Angenommen, es existiert ein $z < x_F$, so dass F zweimal differenzierbar in (z, x_F) mit Dichte $f = F'$ und $F'' < 0$ in (z, x_F). Dann ist F eine von Mises Verteilungsfunktion genau dann, wenn

$$\lim_{x\to x_F} \frac{\bar{F}(x)F''(x)}{f^2(x)} = -1 \tag{1.14}$$

wir wenden jetzt diese Bedingung bei Beispiel an.

Beispiel 1.2.7 (Gamma-Verteilung)
Die Dichte $f = f_{\alpha,\beta}$, $F''(x) = -f(x)(\beta+(1-\alpha)/x) < 0$, wenn $x > \max((\alpha-1)/\beta, 0)$. Offenbar, $\lim_{x\to x_F} \frac{F''(x)}{f(x)} = -\beta$, mit h'Hopital bekommen wir $\lim_{x\to x_F} \frac{\bar{F}(x)}{f(x)} = \lim_{x\to x_F} \frac{-f(x)}{f'(x)} = \beta^{-1}$

Der Weibull Fall ($\xi < 0$)
Das ist ein unwichtiger Fall, denn die Verteilungsfunktionen in dieser Klasse haben alle endliche rechte Endpunkte.

Theorem 1.2.8 (Weibull MDA Gnedenko)
Für $\xi < 0$

$$F \in \mathrm{MDA}(H_{1/\xi}) \Leftrightarrow x_F < \infty \quad \textit{und} \quad \bar{F}(x_F - x^{-1}) = x^{1/\xi} L(x) \tag{1.15}$$

für eine langsam variierende Funktion L

Beispiel: $f_{\alpha,\beta}$ beta Verteilung in $\mathrm{MDA}(H_{-1/\beta})$

1.3 Maxima von streng stationären Zeitreihen

Sei $(X_i)_{i\in N}$ eine streng stationäre Zeitreihe mit stationärer Verteilung F und $(\tilde{X}_i)_{i\in N}$ der assoziierte iid. Process, nämlich starkes weißes Rauschen Process mit der gleichen Verteilung F. Sei $M_n := \max\{X_1, X_2 \ldots X_n\}$ und $\tilde{M}_n := \max\{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \ldots, \tilde{X}_n\}$
Für viele Processe $(X_i)_{i\in N}$, kann man zeigen, dass es eine reelle Zahl θ in $(0, 1]$ gibt, so dass

$$\lim_{n\to\infty} P[(\tilde{M}_n - d_n)/c_n \leq x] = H(x) \tag{1.16}$$

für eine nicht-deterministische Grenze $H(x)$ genau dann wenn

$$\lim_{n\to\infty} P[(M_n - d_n)/c_n \leq x] = H^\theta(x) \tag{1.17}$$

θ heißt dann Extremalindex
Sei $\mu = c_n x + d_n$ für große n haben wir

$$P(M_n \leq \mu) \approx P^\theta(\tilde{M}_n \leq \mu) = F^{n\theta}(\mu). \tag{1.18}$$

1.4 Die Block Maxima Methode

Schätzung der GEV Verteilung

Angenommen, wir haben Daten von irgendeiner ZV mit VF F, die in MDA(H_ξ) liegt. Wir bezeichnen das Block-Maximum von dem j-ten Block mit M_{nj}, so haben wir Daten $M_{n1}, \cdots, M_{nm}$.

Die GEV Verteilung kann mit verschiedenen Methoden geschätzt werden. Wir benutzen hier die Likelihood Methode.

Wenn n groß genug ist, dann können wir davon ausgehen, dass $M_{n1}, \cdots, M_{nm}$ unabhängig sind.

In diesem Fall schreiben wir $h_{\xi,\mu,\sigma}$ für die Dichte von GEV Verteilung die log-Likelihood ist dann

$$L = \sum_{i=1}^{m} \ln h_{\xi,\mu,\sigma}(M_{ni}) \tag{1.19}$$

$$\begin{aligned} &= -m \ln \sigma - (1 + \frac{1}{\xi} \sum_{i=1}^{m}) \ln(1 + \xi \frac{M_{ni} - \mu}{\sigma}) \\ &\qquad - \sum_{i=1}^{m} \ln(1 + \xi \frac{M_{ni} - \mu}{\sigma})^{-1/\xi} \end{aligned} \tag{1.20}$$

Das wird dann maximiert unter Einschränkung dass $\sigma > 0$ und $1 + \xi(M_{ni} - \mu)/\sigma > 0$ für alle i

Wenn die Daten abhängig sind, sollte mann ein großes n wählen. Denn die effektive Daten sind dann θn

Return level und Stressverlust

Die geschätzten GEV können wir für Analyse von Verlustfunktion einsetzen. Hier betrachten wir zwei Größen

Definition 1.4.1 (return level)
Sei H die wahre VF von n-Block Maxima. Die k n-Block return level ist $r_{n,k} = q_{1-1/k}(H)$, nämlich die $(1 - 1/k)$ Quantile vom H.

Das kann in unserem Modell geschätzt werden mit

$$\hat{r}_{n,k} = H^{-1}_{\hat{\xi},\hat{\mu},\hat{\sigma}}(1 - \frac{1}{k}) \tag{1.21}$$

$$= \hat{\mu} + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}}((-\ln(1 - \frac{1}{k}))^{-\hat{\xi}} - 1) \tag{1.22}$$

Definition 1.4.2 (return Periode)
Sei H die wahre VF von n-Block Maxima. Die return Periode vom Ereignis $M_n > \mu$ ist gegeben durch $k_{n,u} = 1/\bar{H}(\mu)$

Das kann in unserem Modell geschätzt werden mit
$\hat{k}_{n,\mu} = 1/H_{\hat{\xi},\hat{\mu},\hat{\sigma}}$.

Chapter 2

Schranken-Überschreitungen

2.1 Verallgemeinerte Pareto Verteilung (GDP)

Definition 2.1.1 (Verallgemeinerte Pareto Verteilung)
Die Dichtefunktion von GDP ist gegeben durch

$$G_{\xi,\beta}(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi x/\beta)^{-1/\xi}, & \xi \neq 0 \\ 1 - \exp(-x/\beta), & \xi = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

wobei $\beta > 0$, *und* $x \geq 0$ *wenn* $\xi \geq 0$;
$0 \leq x \leq -\beta/\xi$ *wenn* $\xi < 0$.
β *Skalierungsparameter,* ξ *Formparameter*

Bemerkung 2.1.2
Wenn $\xi < 0$ hat die Verteilung kurz Flanke
$\xi = 0$ Exponential-Verteilung
für festes x hat man $lim_{\xi \to 0} G_{\xi,\beta}(x) = G_{0,\beta}(x)$

In bezug auf Maximum-Anziehungsbereich haben wir
$G_{\xi,\beta} \in MDA(H_\xi)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$
Das kann man durch die Charakterisierung für Fälle $\xi < 0$ und $\xi > 0$ nachprüfen.
In den Fall ($\xi > 0$), i.e. die Flanke ist schwer, gilt $E[X^k] = \infty$ für $k \geq \frac{1}{\xi}$
$E[X] = \beta/(1 - \xi)$ wenn $\xi < 1$
Die Rolle von GPD ist in EVT ist als natürliches Model für die Excess Verteilung über eine Schranke

Definition 2.1.3 (Excess-Verteilung über eine hoche Schranke)
Sei X ein Zufallsvariable mit dicht Funktion F, Die Excess Verteilung über die Schranke μ ist gegeben durch

$$F_\mu(x) = P(X - \mu \leq x \mid X > \mu) = \frac{F(x+\mu) - F(\mu)}{1 - F(\mu)} \tag{2.2}$$

Für $0 \leq x < x_F - \mu$, wobei $x_F \leq \infty$ ist der rechte Endpunkt von F

Definition 2.1.4 (Die erwartete Excess-Funktion)
Die erwartete Excess Funktion von einer ZV X mit endlicher Erwartung ist gegeben durch

$$e(x) = E(X - \mu \mid X > \mu) \tag{2.3}$$

Beispiel 2.1.5 (Excess-Funktion von Exponentialverteilung und GDP)
(a) X ist exponential-verteilte ZV mit F. Dann für alle x

$$F_\mu(x) = F(x) \tag{2.4}$$

(b) X ist Pareto-verteilte ZV mit $F = G_{\xi,\beta}$

$$F_\mu(x) = G_{\xi,\beta(\mu)}, \quad \beta(\mu) = \beta + \xi\mu \tag{2.5}$$

wobei $x \geq 0$ wenn $\xi \geq 0$;
$0 \leq x \leq -(\beta/\xi) - \mu$ wenn $\xi < 0$

Das heißt die Excess-Verteilung ist immer noch ein GPD Verteilung mit der gleiche parameter ξ aber mit einer Scale, die wächst lineare mit Schranke μ. Dann

$$e(\mu) = \frac{\beta(\mu)}{1-\xi} = \frac{\beta + \xi\mu}{1-\xi} \tag{2.6}$$

wobei $\mu \geq 0$ wenn $0 \leq \xi < 1$
$0 \leq \mu \leq -\beta/\xi$ wenn $\xi < 0$
$e(\mu)$ ist Linear in der Schranke μ
Das ist eine charakterisierende Eigenschaft von GPD.
Durch diese Beispiele bemerken wir, dass GDP eine gewisse Stabilität im Bezug auf Excess Verteilung hat.

die nächste Theorie sagt GDP ist ein natürlich Modell für Excess-Verteilung für viele Verteilung. die kann man auch als eine Charakterisierung von $MDA(H_\xi)$ auffassen.

Theorem 2.1.6 (Die erwartete Excess-Funktion)
Wir können immer eine (positive-messbare) Funktion $\beta(x)$ finden so dass

$$\lim_{\mu \to x_F} \sup_{0 \leq x < x_F - \mu} \mid F_\mu(x) - G_{\xi,\beta(\mu)}(x) \mid = 0 \tag{2.7}$$

genau dann gilt, wenn $F \in MDA(H_\xi), \xi \in \mathbb{R}$

Alle Verteilungen in $MDA(H_\xi)$ bilden eine Menge von Verteilungen, deren Excess-Verteilung gegen GDP konvergieren, wenn die Schranke gegen ∞ geht. Wobei die GDP und GEV haben die gleichen Formparameter.

2.2 Schätzung der Excess Verlust

Annahme 2.2.1
Sei F eine Verlustverteilung mit x_F und für μ ganz groß haben wir

$$F_\mu(x) = G_{\xi,\beta}(x), \quad 0 \leq x < x_F - \mu \tag{2.8}$$

für ein $\xi \in \mathbb{R}, \beta > 0$

Das ist ein Ideal Fall, in Allgemein $F_\mu(x) \approx G_{\xi,\beta}(x)$
Die Methode
Seien X_i mit VF F, N_μ die zufällige Anzahl der μ-Überschreitungen.
Wir können dann $\tilde{X}_1, \cdots \tilde{X}_{N_\mu}$ umnummerieren
Sei $Y_i = \tilde{X}_i - \mu$ Sei $g_{\xi,\beta}$ die Dichtefunktion von GDP, Die Log-Likelihood dann einfach berechnet werden als

$$\begin{aligned} \ln L(\xi, \beta, Y_1, \cdots Y_{N_\mu}) &= \Sigma_{j=1}^{N_\mu} \ln(g_{\xi,\beta}(Y_j)) \\ &= -N_\mu \ln \beta - (1 + \frac{1}{\xi}) \Sigma_{j=1}^{N_\mu} \ln(1 + \xi \frac{Y_j}{\beta}) \end{aligned}$$

Das wird dann maximiert unter Einschränkung $\beta > 0$ und $1 + \xi \frac{Y_j}{\beta} > 0$ für alle j
$G_{\hat{\xi},\hat{\beta}}$ für F_μ

Lemma 2.2.2
Unter Annahme 2.2.1 gilt $F_\nu(x) = G_{\xi,\beta+\xi(\nu-\mu)}(x)$ *für alle* $\nu \geq \mu$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\bar{F}_\nu(x) &= \frac{\bar{F}(\nu+x)}{\bar{F}(\nu)} = \frac{\bar{F}(\mu+(\nu+x-\mu))}{\bar{F}(\mu)} \frac{\bar{F}(\mu)}{\bar{F}(\mu+\nu-\mu)} \\
&= \frac{\bar{F}(x+\nu-\mu)}{\bar{F}(\nu-\mu)} = \frac{\bar{G}_{\xi,\beta}(x+\nu-\mu)}{\bar{G}_{\xi,\beta}(\nu-\mu)} \\
&= \bar{G}_{\xi,\beta+\xi(\nu-\mu)}(x)
\end{aligned}$$

■

wobei $0 \leq x < x_F - \mu$
für $\xi < 1$

$$e(\nu) = \frac{\beta+\xi(\nu-\mu)}{1-\xi} = \frac{\xi\nu}{1-\xi} + \frac{\beta-\xi\mu}{1-\xi} \tag{2.9}$$

wobei $\mu \leq \nu < \infty$ wenn $0 \leq \xi < 1$
$\mu \leq \nu < \mu - \beta/\xi$ wenn $\xi < 0$

2.3 Flankenmodellierung und FlankenRisikomessung

Flanke Wahrscheinlichkeit und Risiko Management Wir bemerken zuerst unter Annahme 2.2.1 haben wir für $x \geq \mu$

$$\begin{aligned}
\bar{F}(x) &= \mathbb{P}(X > \mu)\mathbb{P}(X > x \mid X > \mu) \\
&= \bar{F}(\mu)\bar{F}_\mu(x-\mu) \\
&= \bar{F}(\mu)(1+\xi\frac{x-\mu}{\beta})^{-1/\xi}
\end{aligned}$$

wenn wir $\bar{F}(\mu)$ wissen, dann können wir $\bar{F}(x)$ schätzen. Das interpretieren wir als VaR für $\alpha \geq F(\mu)$ haben wir

$$VaR_\alpha = q_\alpha(F) = \mu + \frac{\beta}{\xi}[(\frac{1-\alpha}{\bar{F}(\mu)})^{-\xi} - 1] \tag{2.10}$$

angenommen dass $\xi < 1$ dann ist assoziierte expect shortfall

$$ES_\alpha = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 q_x(F)dx = \frac{VaR_\alpha}{1-\xi} + \frac{\beta - \xi\mu}{1-\xi} \tag{2.11}$$

wir können auch anders berechnen mit

$$F_{VaR_\alpha} = G_{\xi,\beta+\xi(VaR_\alpha-\mu)}, \quad ES_\alpha = VaR_\alpha + e(VaR_\alpha)$$

es ist interessant zu wissen

$$\lim_{\alpha\to 1}\frac{ES_\alpha}{VaR_\alpha} = \begin{cases}(1-\xi)^{-1}, & \xi \neq 0\\ 1, & \xi < 0\end{cases} \tag{2.12}$$

Schätzung in der Praxis
Flanke Wahrscheinlichkeit und VaR und expected shortfall sind alle darstellbar durch $g(\xi, \beta, \bar{F}(\mu))$
wir haben

$$\hat{\bar{F}} = \frac{N_\mu}{n}(1 + \hat{\xi}\frac{x-\mu}{\hat{\beta}})^{-1/\hat{\xi}} \tag{2.13}$$

und dass nur Sinn macht wenn $x \geq \mu$
für $\alpha \geq 1 - N_\mu/n$ kann mann noch VaR und expected shortfall berechnen.

2.4 Die Hill Methode

Die GDP Methode ist nicht die einzige Methode um die Flanke Wahrscheinlichkeit zu schätzen und als eine Alternative haben wir die Hill Methode
Schätzen des Flankenindex
sei $\bar{F}(x) = L(x) * x^{-\alpha}$ für eine langsam variierend Funktion L und ein positive parameter α das Ziel ist ein Schätzer für α zu finden anhand der i.i.d. Daten
Die Hill Schätzer kann mit verschiedenen Methode hergeleitet werden. Wir betrachten die eleganteste Methode
betrachten die Excess-Funktion von dem Logarithmus von X ,

$$\begin{aligned} e^*(\ln\mu) &= E[\ln X - \ln\mu | \ln X > \ln\mu]\\ &= \frac{1}{\bar{F}(\mu)}\int_\mu^\infty L(x)x^{-(\alpha+1)}dx \end{aligned}$$

Für μ groß genug $L(x)$ für $x \geq \mu$ kann als eine Konstante aus dem Integral ausgezogen werden.

$$e^*(\ln\mu) \sim \frac{L(\mu)\mu^{-\alpha}\alpha^{-1}}{\bar{F}(\mu)} = \alpha^{-1}, u \to \infty \tag{2.14}$$

so dass $\lim_{\mu\to\infty} \alpha e^*(\ln\mu) = 1$
Wir hoffen $e^*(\ln X_{k,n}) \approx \alpha^{-1}$ für n groß und k klein genug
wobei $X_{n,n} \leq \cdots \leq X_{1,n}$ die Ordnungstatistik

$\hat{\alpha}_{k,n}^{(H)} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(\ln X_{i,n} - \ln X_{k,n})^{-1}$
$2 \leq k < n$

Hill-basierte Flanken Schätzung

Wir geben ein heuristisches Argument für eine Schätzung für Flanke, VaR und expected shortfall basierend auf Hill Methode
Annahme $\bar{F}(x) = Cx^{-\alpha}, x \geq \mu > 0$, für μ groß
Für geeignete k haben wie Schätzer $\hat{\alpha}_{k,n}$ für α
μ ist dann ersetzt durch $X_{k,n}$
Da $C = \mu^{\alpha}\bar{F}(\mu)$ können wir auch C schäzten, $\bar{F}(\mu)$ durch $\frac{k}{n}$
packen wir alles zusammen haben wir

$$\hat{\bar{F}}(x) = \frac{k}{n}(\frac{x}{x_{k,n}})^{-\hat{\alpha}_{k,n}} \tag{2.15}$$

durch umformen haben

$$\hat{\bar{F}} = \frac{N_\mu}{n}(1 + \hat{\xi}^H \frac{x-\mu}{\hat{\xi}^H\mu})^{-1/\hat{\xi}^H} \tag{2.16}$$

Daraus können wir weiter die Schätzer für VaR und expected shortfall berechnen