# Hedging integrierter Risiken

Dipl.-Math., M.Sc. Adem Kahrıman

06.07.2010

# Inhaltsverzeichnis

# Was bedeutet überhaupt „Hedging"?

Der Begriff *Hedgegeschäft* (kurz Hedging; von engl. to *hedge*, absichern) bezeichnet ein Finanzgeschäft zur Absicherung einer Transaktion gegen Risiken und wird im Rahmen des qualitativen Risikomanagements angewendet. Hedging mindert einerseits das Risiko eines Finanzgeschäftes, verringert anderseits aber aufgrund zusätzlicher Kosten auch deren Rendite.

# Was bedeutet überhaupt „Hedging“?

Der Begriff *Hedgegeschäft* (kurz Hedging; von engl. to *hedge*, absichern) bezeichnet ein Finanzgeschäft zur Absicherung einer Transaktion gegen Risiken und wird im Rahmen des qualitativen Risikomanagements angewendet. Hedging mindert einerseits das Risiko eines Finanzgeschäftes, verringert anderseits aber aufgrund zusätzlicher Kosten auch deren Rendite. Nicht bei jedem Geschäft ist daher eine Absicherung durch Hedging sinnvoll.

## Was bedeutet überhaupt „Hedging“?

Der Begriff *Hedgegeschäft* (kurz Hedging; von engl. to *hedge*, absichern) bezeichnet ein Finanzgeschäft zur Absicherung einer Transaktion gegen Risiken und wird im Rahmen des qualitativen Risikomanagements angewendet. Hedging mindert einerseits das Risiko eines Finanzgeschäftes, verringert anderseits aber aufgrund zusätzlicher Kosten auch deren Rendite. Nicht bei jedem Geschäft ist daher eine Absicherung durch Hedging sinnvoll. Es ist jeweils ein Kompromiss zwischen erwarteter Rendite und akzeptablem Risiko zu finden.

## Was bedeutet überhaupt „Hedging“?

Der Begriff *Hedgegeschäft* (kurz Hedging; von engl. to *hedge*, absichern) bezeichnet ein Finanzgeschäft zur Absicherung einer Transaktion gegen Risiken und wird im Rahmen des qualitativen Risikomanagements angewendet. Hedging mindert einerseits das Risiko eines Finanzgeschäftes, verringert anderseits aber aufgrund zusätzlicher Kosten auch deren Rendite. Nicht bei jedem Geschäft ist daher eine Absicherung durch Hedging sinnvoll. Es ist jeweils ein Kompromiss zwischen erwarteter Rendite und akzeptablem Risiko zu finden.

# Ein kleiner Überblick

In einem arbitragefreien, vollständigen Finanzmarkt kann jedes Derivat mit Hilfe einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie nachgebildet werden. In unvollständigen Marktmodellen ist dies im Allgemeinen nicht möglich.

# Ein kleiner Überblick

In einem arbitragefreien, vollständigen Finanzmarkt kann jedes Derivat mit Hilfe einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie nachgebildet werden. In unvollständigen Marktmodellen ist dies im Allgemeinen nicht möglich. Aus diesem Grund ist es sinnvoll, sich Gedanken über Absicherungsstrategien, sog. *Hedgingstrategien* für nicht-erreichbare Derivate zu machen.

# Ein kleiner Überblick

In einem arbitragefreien, vollständigen Finanzmarkt kann jedes Derivat mit Hilfe einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie nachgebildet werden. In unvollständigen Marktmodellen ist dies im Allgemeinen nicht möglich. Aus diesem Grund ist es sinnvoll, sich Gedanken über Absicherungsstrategien, sog. *Hedgingstrategien* für nicht-erreichbare Derivate zu machen.

Wir werden diese Theorien auf ein Portfolio von fondsgebundenen Lebensversicherungen anwenden. Alle Beispiele bauen auf Binomialmärkten auf, sodass jeder rein finanzielle *bedingte Anspruch (oder Derivat, oder engl. contingent claim)* erreichbar ist, d.h. es kann eindeutig bewertet und durch selbstfinanzierende Handelsstrategien perfekt abgesichert werden.

Wir werden diese Theorien auf ein Portfolio von fondsgebundenen Lebensversicherungen anwenden. Alle Beispiele bauen auf Binomialmärkten auf, sodass jeder rein finanzielle *bedingte Anspruch (oder Derivat, oder engl. contingent claim)* erreichbar ist, d.h. es kann eindeutig bewertet und durch selbstfinanzierende Handelsstrategien perfekt abgesichert werden.

# Handelsstrategie

Wir wollen als Erstes die folgende Definition geben, die wir schon z.B. im Vortrag von Vitali Müller, Abschnitt 3.1, gesehen haben.

## Definition

Eine *Handelsstrategie* (kurz: Strategie) ist definiert als ein zweidimensionaler Prozess $h = (h^0, h^1) = (h^0(t), h^1(t))_{t=0,1,\cdots,T}$, wobei $h^0$ adaptiert und $h^1$ vorhersehbar, d.h. $h^1(t)$ ist $\mathcal{F}(t-1)$-messbar. Dabei geben die Komponenten $h^0(t)$ und $h^1(t)$ den Kontostand und die Anzahl an risikobehafteten Wertpapieren an, aus der die Handelsstrategie im Intervall $[t-1, t)$ besteht.

# Was ist überhaupt ein *contingent claim*?

**Definition (contingent claim)**

Ein *contingengt claim* (oder *bedingter Anspruch*) ist eine Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

**Definition (Erreichbarkeit)**

Ein bedingter Anspruch $H$ heißt *erreichbar*, falls es eine zulässige Strategie $h$ gibt mit $V(T, h) = H$, d.h. der Wert des bedingten Anspruchs und der der Handelsstrategie stimmen am Laufzeitende überein.

# Was ist überhaupt ein *contingent claim*?

**Definition (contingent claim)**

Ein *contingengt claim* (oder *bedingter Anspruch*) ist eine Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

**Definition (Erreichbarkeit)**

Ein bedingter Anspruch $H$ heißt *erreichbar*, falls es eine zulässige Strategie $h$ gibt mit $V(T, h) = H$, d.h. der Wert des bedingten Anspruchs und der der Handelsstrategie stimmen am Laufzeitende überein.

# unvollständiger Markt

**Definition (vollständiger Markt)**

Ein Finanzmarktmodell wird *vollständig* genannt, falls jeder bedingter Anspruch (contingent claim) erreichbar ist.

und folglich

# unvollständiger Markt

**Definition (vollständiger Markt)**

Ein Finanzmarktmodell wird *vollständig* genannt, falls jeder bedingter Anspruch (contingent claim) erreichbar ist.

und folglich

**Definition (unvollständiger Markt)**

Ein Finanzmarktmodell wird *unvollständig* genannt, falls es nicht vollständig ist.

# unvollständiger Markt

**Definition (vollständiger Markt)**

Ein Finanzmarktmodell wird *vollständig* genannt, falls jeder bedingter Anspruch (contingent claim) erreichbar ist.

und folglich

**Definition (unvollständiger Markt)**

Ein Finanzmarktmodell wird *unvollständig* genannt, falls es nicht vollständig ist.

# Nochmal das *kombinierte Model*

Wir betrachten nochmal das Versicherungsportfolio mit $\ell_x$ Versicherten des Alters $x$ zum Zeitpunkt 0, und es sei $Y(t)$ die Anzahl der Versicherten, die den Zeitpunkt $t$ erleben. Der Barwert der Verpflichtungen einer $T$-jährigen fondsgebundenen Erlebensfallversicherung zum Zeitpunkt 0 ist gegeben durch

$$H = \frac{Y(t)f(S^1(T))}{S^0(T)}. \tag{1}$$

# Nochmal das *kombinierte Model*

Wir betrachten nochmal das Versicherungsportfolio mit $\ell_x$ Versicherten des Alters $x$ zum Zeitpunkt 0, und es sei $Y(t)$ die Anzahl der Versicherten, die den Zeitpunkt $t$ erleben. Der Barwert der Verpflichtungen einer $T$-jährigen fondsgebundenen Erlebensfallversicherung zum Zeitpunkt 0 ist gegeben durch

$$H = \frac{Y(t) f(S^1(T))}{S^0(T)}. \tag{1}$$

# Nochmal das *kombinierte Model*

Der Finanzmarkt wird durch den Binomialmarkt beschrieben und der Aktienwert $S^1$ zum Zeitpunkt $t$ ist durch die Gleichung

$$S^1(t) = (1 + Z(t))S^1(t-1)$$

gegeben. Dabei ist $S^0(t)$ der Wert einer Einheit investiert in das Bankkonto zum Zeitpunkt $t$ und $Z(t)$ beschreibt die relative Veränderung des Aktienwertes in der Periode $(t-1, t]$.

# Nochmal das *kombinierte Model*

Der Finanzmarkt wird durch den Binomialmarkt beschrieben und der Aktienwert $S^1$ zum Zeitpunkt $t$ ist durch die Gleichung

$$S^1(t) = (1 + Z(t))S^1(t-1)$$

gegeben. Dabei ist $S^0(t)$ der Wert einer Einheit investiert in das Bankkonto zum Zeitpunkt $t$ und $Z(t)$ beschreibt die relative Veränderung des Aktienwertes in der Periode $(t-1, t]$. Ab jetzt nehmen wir an, dass die Funktion $f$ eine nicht-negative Funktion ist. Die Lebensdauern der $\ell_x$ Versicherten werden als identisch verteilt und vom Aktienindex $S^1$ unabhängig angenommen.

## Nochmal das *kombinierte Model*

Der Finanzmarkt wird durch den Binomialmarkt beschrieben und der Aktienwert $S^1$ zum Zeitpunkt $t$ ist durch die Gleichung

$$S^1(t) = (1 + Z(t))S^1(t-1)$$

gegeben. Dabei ist $S^0(t)$ der Wert einer Einheit investiert in das Bankkonto zum Zeitpunkt $t$ und $Z(t)$ beschreibt die relative Veränderung des Aktienwertes in der Periode $(t-1, t]$. Ab jetzt nehmen wir an, dass die Funktion $f$ eine nicht-negative Funktion ist. Die Lebensdauern der $\ell_x$ Versicherten werden als identisch verteilt und vom Aktienindex $S^1$ unabhängig angenommen.

# Für VU verfügbare Informationen

Wir nehmen an, dass das VU Zugang zur Information über die Anzahl von Todesfällen pro Jahr bis zum Zeitpunkt $t$ und Kenntnis über den Wert der Aktie zu den Zeitpunkten $0, 1, \cdots, t$ hat. Dies können wir nun durch die Filtrationen $G = (\mathcal{G}(t))_{t\in\{0,1,\cdots,T\}}$, definiert durch $\mathcal{G}(t) = \sigma\{S^1(1), \cdots, S^1(T)\}$ und $H = (\mathcal{H}(t))_{t\in\{0,1,\cdots,T\}}$, definiert durch $\mathcal{H}(t) = \sigma\{Y^1(1), \cdots, Y^1(T)\}$ formulieren.

# Für VU verfügbare Informationen

Wir nehmen an, dass das VU Zugang zur Information über die Anzahl von Todesfällen pro Jahr bis zum Zeitpunkt $t$ und Kenntnis über den Wert der Aktie zu den Zeitpunkten $0, 1, \cdots, t$ hat. Dies können wir nun durch die Filtrationen $G = (\mathcal{G}(t))_{t \in \{0,1,\cdots,T\}}$, definiert durch $\mathcal{G}(t) = \sigma\{S^1(1), \cdots, S^1(T)\}$ und $H = (\mathcal{H}(t))_{t \in \{0,1,\cdots,T\}}$, definiert durch $\mathcal{H}(t) = \sigma\{Y^1(1), \cdots, Y^1(T)\}$ formulieren. Die erste Filtration $G$ beschreibt den Finanzmarkt und $\mathcal{G}(t)$ ist die Information, die durch die Beobachtung des Aktienpreises $S^1$ bis zum Zeitpunkt $t$ bezieht.

# Für VU verfügbare Informationen

Wir nehmen an, dass das VU Zugang zur Information über die Anzahl von Todesfällen pro Jahr bis zum Zeitpunkt $t$ und Kenntnis über den Wert der Aktie zu den Zeitpunkten $0, 1, \cdots, t$ hat. Dies können wir nun durch die Filtrationen $G = (\mathcal{G}(t))_{t \in \{0,1,\cdots,T\}}$, definiert durch $\mathcal{G}(t) = \sigma\{S^1(1), \cdots, S^1(T)\}$ und $H = (\mathcal{H}(t))_{t \in \{0,1,\cdots,T\}}$, definiert durch $\mathcal{H}(t) = \sigma\{Y^1(1), \cdots, Y^1(T)\}$ formulieren. Die erste Filtration $G$ beschreibt den Finanzmarkt und $\mathcal{G}(t)$ ist die Information, die durch die Beobachtung des Aktienpreises $S^1$ bis zum Zeitpunkt $t$ bezieht. Die zweite Filtration $H$ enthält Informationen über die Anzahl der Überlebenden und $\mathcal{H}(t)$ ist die Kenntnis über die Anzahl der Toten in der Zeit 0 bis $t$.

# Für VU verfügbare Informationen

Wir nehmen an, dass das VU Zugang zur Information über die Anzahl von Todesfällen pro Jahr bis zum Zeitpunkt $t$ und Kenntnis über den Wert der Aktie zu den Zeitpunkten $0, 1, \cdots, t$ hat. Dies können wir nun durch die Filtrationen $G = (\mathcal{G}(t))_{t \in \{0,1,\cdots,T\}}$, definiert durch $\mathcal{G}(t) = \sigma\{S^1(1), \cdots, S^1(T)\}$ und $H = (\mathcal{H}(t))_{t \in \{0,1,\cdots,T\}}$, definiert durch $\mathcal{H}(t) = \sigma\{Y^1(1), \cdots, Y^1(T)\}$ formulieren. Die erste Filtration $G$ beschreibt den Finanzmarkt und $\mathcal{G}(t)$ ist die Information, die durch die Beobachtung des Aktienpreises $S^1$ bis zum Zeitpunkt $t$ bezieht. Die zweite Filtration $H$ enthält Informationen über die Anzahl der Überlebenden und $\mathcal{H}(t)$ ist die Kenntnis über die Anzahl der Toten in der Zeit 0 bis $t$.

# von den Informationen abhängige Strategien

Wir sind an der Konstruktion von Investmentstrategien $h = (h^0, h^1)$ interessiert, die von diesen Informationen anhängen. Um diese aber konstruieren zu können, müssen wir eine dritte Filtration $F = (\mathcal{F}(t))_{t \in \{0,1,\cdots,T\}}$, gegeben durch $\mathcal{F}(t) = \mathcal{G}(t) \vee \mathcal{H}(t)$, einführen.

## von den Informationen abhängige Strategien

Wir sind an der Konstruktion von Investmentstrategien $h = (h^0, h^1)$ interessiert, die von diesen Informationen anhängen. Um diese aber konstruieren zu können, müssen wir eine dritte Filtration $F = (\mathcal{F}(t))_{t \in \{0,1,\cdots,T\}}$, gegeben durch $\mathcal{F}(t) = \mathcal{G}(t) \vee \mathcal{H}(t)$, einführen. Dies bedeutet, dass $\mathcal{F}(t)$ die Information $\mathcal{G}(t)$ und die Information über die Anzahl der Überlebenden $\mathcal{H}(t)$ enthält.

# von den Informationen abhängige Strategien

Wir sind an der Konstruktion von Investmentstrategien $h = (h^0, h^1)$ interessiert, die von diesen Informationen anhängen. Um diese aber konstruieren zu können, müssen wir eine dritte Filtration $F = (\mathcal{F}(t))_{t \in \{0,1,\cdots,T\}}$, gegeben durch $\mathcal{F}(t) = \mathcal{G}(t) \vee \mathcal{H}(t)$, einführen. Dies bedeutet, dass $\mathcal{F}(t)$ die Information $\mathcal{G}(t)$ und die Information über die Anzahl der Überlebenden $\mathcal{H}(t)$ enthält. Das Versicherungsunternehmen kann bei der Bestimmung der Investmentstrategie $h$ die volle Information benutzen.

# von den Informationen abhängige Strategien

Wir sind an der Konstruktion von Investmentstrategien $h = (h^0, h^1)$ interessiert, die von diesen Informationen anhängen. Um diese aber konstruieren zu können, müssen wir eine dritte Filtration $F = (\mathcal{F}(t))_{t \in \{0,1,\cdots,T\}}$, gegeben durch $\mathcal{F}(t) = \mathcal{G}(t) \vee \mathcal{H}(t)$, einführen. Dies bedeutet, dass $\mathcal{F}(t)$ die Information $\mathcal{G}(t)$ und die Information über die Anzahl der Überlebenden $\mathcal{H}(t)$ enthält. Das Versicherungsunternehmen kann bei der Bestimmung der Investmentstrategie $h$ die volle Information benutzen.

# Einführung eines speziellen Martingalmaßes

Wir führen ein spezielles Martingalmaß $Q$ ein, das mit dem Wahrscheinlichkeitsmaß $Q$, das wir im letzten Vortrag von Marco Ehlscheid gesehen haben, eng verknüpft ist. Das hier betrachtete Wahrscheinlichkeitsmaß hat die folgenden Eigenschaften

1. X ist ein Q-Martingal, und unter Q sind $Z(1), \cdots, Z(T)$ unabh. und identisch verteilt mit $Q(Z(1) = b) = \frac{r-a}{b-a}$, $(-1 < a < r < b)$.

# Einführung eines speziellen Martingalmaßes

Wir führen ein spezielles Martingalmaß $Q$ ein, das mit dem Wahrscheinlichkeitsmaß $Q$, das wir im letzten Vortrag von Marco Ehlscheid gesehen haben, eng verknüpft ist. Das hier betrachtete Wahrscheinlichkeitsmaß hat die folgenden Eigenschaften

1. X ist ein Q-Martingal, und unter Q sind $Z(1), \cdots, Z(T)$ unabh. und identisch verteilt mit $Q(Z(1) = b) = \frac{r-a}{b-a}$, $(-1 < a < r < b)$.
2. $T^1, \cdots, T^{\ell_x}$ sind unabh. und identisch verteilt unter Q mit $Q(T^1 > t) = P(T^1 > t) = {}_t p_x$.

# Einführung eines speziellen Martingalmaßes

Wir führen ein spezielles Martingalmaß $Q$ ein, das mit dem Wahrscheinlichkeitsmaß $Q$, das wir im letzten Vortrag von Marco Ehlscheid gesehen haben, eng verknüpft ist. Das hier betrachtete Wahrscheinlichkeitsmaß hat die folgenden Eigenschaften

1. X ist ein Q-Martingal, und unter Q sind $Z(1), \cdots, Z(T)$ unabh. und identisch verteilt mit $Q(Z(1) = b) = \frac{r-a}{b-a}$, $(-1 < a < r < b)$.
2. $T^1, \cdots, T^{\ell_x}$ sind unabh. und identisch verteilt unter Q mit $Q(T^1 > t) = P(T^1 > t) = {}_t p_x$.
3. Die Lebensdauern sind unabhängig vom Finanzmarkt.

# Einführung eines speziellen Martingalmaßes

Wir führen ein spezielles Martingalmaß $Q$ ein, das mit dem Wahrscheinlichkeitsmaß $Q$, das wir im letzten Vortrag von Marco Ehlscheid gesehen haben, eng verknüpft ist. Das hier betrachtete Wahrscheinlichkeitsmaß hat die folgenden Eigenschaften

1. X ist ein Q-Martingal, und unter Q sind $Z(1), \cdots, Z(T)$ unabh. und identisch verteilt mit $Q(Z(1) = b) = \frac{r-a}{b-a}$, $(-1 < a < r < b)$.
2. $T^1, \cdots, T^{\ell_x}$ sind unabh. und identisch verteilt unter Q mit $Q(T^1 > t) = P(T^1 > t) = {}_t p_x$.
3. Die Lebensdauern sind unabhängig vom Finanzmarkt.

# Wiederholen des Ergebnisses aus dem letzten Vortrag

Wir erinnern uns an das Theorem 3.7 von Marco Ehlscheid, das zeigt, dass die eindeutige arbitrage-freie Bewertung des Preises für den reinen finanziellen bedingten Anspruch gegeben ist durch

$$\pi(t,f) := E^Q\left[\frac{f(S^1(t))}{S^0(T)} \mid \mathcal{G}(t)\right] = E^Q\left[\frac{f(S^1(T))}{S^0(T)}\right] + \sum_{j=1}^{t} \alpha(j,f)\Delta X(j) \tag{2}$$

Man kann die Option $f(S^1(T))$ absichern, indem man eine selbstfinanzierende Strategie wählt, die eine Anfangsinvestition $\pi(0,f) = E^Q\left[\frac{f(S^1(T))}{S^0(T)}\right]$ zum Zeitpunkt 0 und $\alpha(t,f)$ Aktien in der Periode $(t-1,t]$ verlangt.

# Wiederholen des Ergebnisses aus dem letzten Vortrag

Wir erinnern uns an das Theorem 3.7 von Marco Ehlscheid, das zeigt, dass die eindeutige arbitrage-freie Bewertung des Preises für den reinen finanziellen bedingten Anspruch gegeben ist durch

$$\pi(t,f) := E^Q\left[\frac{f(S^1(t))}{S^0(T)} \mid \mathcal{G}(t)\right] = E^Q\left[\frac{f(S^1(T))}{S^0(T)}\right] + \sum_{j=1}^{t} \alpha(j,f)\Delta X(j) \tag{2}$$

Man kann die Option $f(S^1(T))$ absichern, indem man eine selbstfinanzierende Strategie wählt, die eine Anfangsinvestition $\pi(0,f) = E^Q\left[\frac{f(S^1(T))}{S^0(T)}\right]$ zum Zeitpunkt 0 und $\alpha(t,f)$ Aktien in der Periode $(t-1,t]$ verlangt.

# Was ist Superhedging?

Für einen bedingten Anspruch, der nicht durch selbstfinanzierende Strategie $h$ perfekt abgesichert werden kann, solche, die nicht sichern kann, dass für alle Szenarien gilt $V(T,h) = H$, könnte man nach Strategien suchen, die die Bedingung

$$V(T,h) \geq H \tag{3}$$

erfüllen.

Ein Vorschlag für die Wahl der Investmentstrategie ist die Idee des *Superhedgings* von El Karoui und Quenez (1995).

Wenn der Verkäufer der Vertrages eine Strategie verwendet, die die Bedingung (3) erfüllt und den Investitionsbetrag aufstocken kann, der als Anfangsinvestition notwendig ist, dann gibt es kein Risiko eines Verlustes, das mit den Verbindlichkeiten des Verkäufer verbunden ist.

Ein Vorschlag für die Wahl der Investmentstrategie ist die Idee des *Superhedgings* von El Karoui und Quenez (1995).

Wenn der Verkäufer der Vertrages eine Strategie verwendet, die die Bedingung (3) erfüllt und den Investitionsbetrag aufstocken kann, der als Anfangsinvestition notwendig ist, dann gibt es kein Risiko eines Verlustes, das mit den Verbindlichkeiten des Verkäufer verbunden ist.

### Problem (Superhedging)

*Suche diejenige selbstfinanzierende Strategie h, die den bedingten Anspruch H dominiert, d.h. die Bedingung (3) P-f.s. erfüllt, und gleichzeitig die geringsten Anfangskosten* $V(0,h)$ *aller dominierenden Strategien aufweist, also* $V(0,h) \to \min$ *für alle Strategien h mit* $V(t,h) \geq H$.

### Definition (Superhedging-Strategie)

Eine Strategie, die das Problem des Superhedgings löst, nennt man *Superhedging-Strategie* und die zugehörigen Anfangskosten *Superhedgingkosten.*

### Problem (Superhedging)

*Suche diejenige selbstfinanzierende Strategie h, die den bedingten Anspruch H dominiert, d.h. die Bedingung (3) P-f.s. erfüllt, und gleichzeitig die geringsten Anfangskosten* $V(0,h)$ *aller dominierenden Strategien aufweist, also* $V(0,h) \to \min$ *für alle Strategien h mit* $V(t,h) \geq H$.

### Definition (Superhedging-Strategie)

Eine Strategie, die das Problem des Superhedgings löst, nennt man *Superhedging-Strategie* und die zugehörigen Anfangskosten *Superhedgingkosten*.

Wir interessieren uns insbesondere für die Schätzung und Hedging von nicht erreichbaren Claims, z.B. im Fall für fondsgebundene Lebensversicherungsverträge. In solchen Situationen gibt es normalerweise viele Martingalmaße und wir setzen $\mathbf{Q}$ als die Menge aller Martingalmaße.

Wir interessieren uns insbesondere für die Schätzung und Hedging von nicht erreichbaren Claims, z.B. im Fall für fondsgebundene Lebensversicherungsverträge. In solchen Situationen gibt es normalerweise viele Martingalmaße und wir setzen $\mathbf{Q}$ als die Menge aller Martingalmaße. Es kann dann gezeigt werden, dass es eine Superhedgings-Strategie für $H$ existiert, dass

$$\sup_{Q' \in \mathbf{Q}} E^{Q'}[H] < \infty, \tag{4}$$

Wir interessieren uns insbesondere für die Schätzung und Hedging von nicht erreichbaren Claims, z.B. im Fall für fondsgebundene Lebensversicherungsverträge. In solchen Situationen gibt es normalerweise viele Martingalmaße und wir setzen $\mathbf{Q}$ als die Menge aller Martingalmaße. Es kann dann gezeigt werden, dass es eine Superhedgings-Strategie für $H$ existiert, dass

$$\sup_{Q' \in \mathbf{Q}} E^{Q'}[H] < \infty, \tag{4}$$

d.h. der Erwartungswert von $H$ ist unter aller Martingalmaße beschränkt.

Wir interessieren uns insbesondere für die Schätzung und Hedging von nicht erreichbaren Claims, z.B. im Fall für fondsgebundene Lebensversicherungsverträge. In solchen Situationen gibt es normalerweise viele Martingalmaße und wir setzen $\mathbf{Q}$ als die Menge aller Martingalmaße. Es kann dann gezeigt werden, dass es eine Superhedgings-Strategie für $H$ existiert, dass

$$\sup_{Q' \in \mathbf{Q}} E^{Q'}[H] < \infty, \tag{4}$$

d.h. der Erwartungswert von $H$ ist unter aller Martingalmaße beschränkt.

Die Lösung des Superhedgings verwendet ziemlich komplizierte Mathematik. Wir wollen hier nur das Ergebnis formulieren, ohne ins Detail zu gehen.

Die Lösung des Superhedgings verwendet ziemlich komplizierte Mathematik. Wir wollen hier nur das Ergebnis formulieren, ohne ins Detail zu gehen. Als erstes betrachten wir den folgenden Prozess

$$\overline{V}(t) = \operatorname{ess.}\sup_{Q' \in \mathbf{Q}} E^{Q'}[H|\mathcal{F}(t)]. \tag{5}$$

Die Lösung des Superhedgings verwendet ziemlich komplizierte Mathematik. Wir wollen hier nur das Ergebnis formulieren, ohne ins Detail zu gehen. Als erstes betrachten wir den folgenden Prozess

$$\overline{V}(t) = \text{ess.} \sup_{Q' \in \mathbf{Q}} E^{Q'}[H|\mathcal{F}(t)]. \tag{5}$$

Dies schließt die Berechnung des Erwartungswertes von $H$ unter der Bedingung des Vorliegens der Information zum Zeitpunkt $t$ unter allen Martingalmaßen aus der Menge $\mathbf{Q}$ ein und $\overline{V}(t)$ wird dann als Supremum aller dieser verschiedenen Erwartungswerte definiert.

Die Lösung des Superhedgings verwendet ziemlich komplizierte Mathematik. Wir wollen hier nur das Ergebnis formulieren, ohne ins Detail zu gehen. Als erstes betrachten wir den folgenden Prozess

$$\overline{V}(t) = \text{ess.} \sup_{Q' \in \mathbf{Q}} E^{Q'}[H|\mathcal{F}(t)]. \tag{5}$$

Dies schließt die Berechnung des Erwartungswertes von $H$ unter der Bedingung des Vorliegens der Information zum Zeitpunkt $t$ unter allen Martingalmaßen aus der Menge $\mathbf{Q}$ ein und $\overline{V}(t)$ wird dann als Supremum aller dieser verschiedenen Erwartungswerte definiert.

Der nächste Schritt ist die Herleitung einer Zerlegung des Prozesses $\overline{V}$ in der Form

$$\overline{V}(t) = \overline{V}(0) + \sum_{j=1}^{t} \overline{h}^1(j) \Delta X(j) - \overline{C}(t), \tag{6}$$

wobei $\overline{C}$ adaptiert und nicht-wachsend und $\overline{h}^1$ vorhersehbar, d.h. $\overline{h}^1(j)$ ist $\mathcal{F}(j-1)$-messbar für $j = 1, \cdots, T$, ist.

Der nächste Schritt ist die Herleitung einer Zerlegung des Prozesses $\overline{V}$ in der Form

$$\overline{V}(t) = \overline{V}(0) + \sum_{j=1}^{t} \overline{h}^1(j)\Delta X(j) - \overline{C}(t), \tag{6}$$

wobei $\overline{C}$ adaptiert und nicht-wachsend und $\overline{h}^1$ vorhersehbar, d.h. $\overline{h}^1(j)$ ist $\mathcal{F}(j-1)$-messbar für $j = 1, \cdots, T$, ist.

Eines der Hauptresultate der Theorie des Superhedgings ist gegeben durch das folgende

**Theorem**

*Vorausgesetzt, dass die Gleichung (4) erfüllt ist, die zugehörigen Superhedgingkosten von $H$ sind dann gegeben durch $\overline{V}(0) = \sup_{Q' \in \mathbf{Q}} E^{Q'}[H]$ und entsprechen dem Supremum aller arbitragefreien Preise für den bedingten Anspruch (contingent claim) $H$. Die Superhedging-Strategie wird bestimmt durch $h^1(t) = \overline{h}^1(t)$.*

# Anwendung der Superhedging-Strategie auf fondsgebundene LV

Nun wollen wir unsere Ergebnisse aus dem letzten Abschnitt auf fondsgebundene Lebensversicherungsverträge anwenden wie sie durch die Gleichung (1) in einem Binomialmarkt gegeben sind. Der erste Schritt ist die Überprüfung der Bedingung (4).

# Anwendung der Superhedging-Strategie auf fondsgebundene LV

Nun wollen wir unsere Ergebnisse aus dem letzten Abschnitt auf fondsgebundene Lebensversicherungsverträge anwenden wie sie durch die Gleichung (1) in einem Binomialmarkt gegeben sind. Der erste Schritt ist die Überprüfung der Bedingung (4). Bemerken wir, dass die Anzahl der Überlebenden zum Zeitpunkt $T$ kleiner als die Anzahl $\ell_x$ der Versicherten zum Zeitpunkt 0 sein muss, sehen wir, dass

$$H = \frac{Y(T)f(S^1(T))}{S^0(T)} \leq \ell_x \frac{f(S^1(T))}{S^0(T)} = H''$$

# Anwendung der Superhedging-Strategie auf fondsgebundene LV

Nun wollen wir unsere Ergebnisse aus dem letzten Abschnitt auf fondsgebundene Lebensversicherungsverträge anwenden wie sie durch die Gleichung (1) in einem Binomialmarkt gegeben sind. Der erste Schritt ist die Überprüfung der Bedingung (4). Bemerken wir, dass die Anzahl der Überlebenden zum Zeitpunkt $T$ kleiner als die Anzahl $\ell_x$ der Versicherten zum Zeitpunkt 0 sein muss, sehen wir, dass

$$H = \frac{Y(T)f(S^1(T))}{S^0(T)} \leq \ell_x \frac{f(S^1(T))}{S^0(T)} = H''$$

Diese einfache Ungleichung ist sehr nützlich, da $H''$ ein rein finanzieller bedingter Anspruch ist, der in einem Binomialmarkt erreichbar ist und deshalb eindeutig durch das Prinzip der Arbitragefreiheit bewertet werden. Außerdem sehen wir, dass aus der Gleichung (2) für $\pi(0, f)$ der Erwartungswert von $H''$ unter allen äquivalenten Martingalmaßen gleich ist und $\ell_x E^Q[\frac{f(S^1(T))}{S^0(T)}]$ entspricht.

Diese einfache Ungleichung ist sehr nützlich, da $H''$ ein rein finanzieller bedingter Anspruch ist, der in einem Binomialmarkt erreichbar ist und deshalb eindeutig durch das Prinzip der Arbitragefreiheit bewertet werden. Außerdem sehen wir, dass aus der Gleichung (2) für $\pi(0, f)$ der Erwartungswert von $H''$ unter allen äquivalenten Martingalmaßen gleich ist und $\ell_x E^Q[\frac{f(S^1(T))}{S^0(T)}]$ entspricht. Somit haben wir gezeigt, dass $\sup_{Q' \in \mathbf{Q}} E^{Q'}[H] \leq E^Q[H''] = \ell_x \pi(0, f)$ endlich ist, vorausgesetzt, dass $\pi(0, f)$ endlich ist (und das ist ja die Bedingung hier). Somit haben wir unsere Bedingung (4) gezeigt.

Diese einfache Ungleichung ist sehr nützlich, da $H''$ ein rein finanzieller bedingter Anspruch ist, der in einem Binomialmarkt erreichbar ist und deshalb eindeutig durch das Prinzip der Arbitragefreiheit bewertet werden. Außerdem sehen wir, dass aus der Gleichung (2) für $\pi(0, f)$ der Erwartungswert von $H''$ unter allen äquivalenten Martingalmaßen gleich ist und $\ell_x E^Q[\frac{f(S^1(T))}{S^0(T)}]$ entspricht. Somit haben wir gezeigt, dass $\sup_{Q' \in \mathbf{Q}} E^{Q'}[H] \leq E^Q[H''] = \ell_x \pi(0, f)$ endlich ist, vorausgesetzt, dass $\pi(0, f)$ endlich ist (und das ist ja die Bedingung hier). Somit haben wir unsere Bedingung (4) gezeigt.

# Hauptresultat dieses Abschnitts

## Satz

*Der Superhedging-Preis für einen fondsgebundenen Lebensversicherungsvertrag ist gegeben durch $\ell_x \pi(0, f)$. Die günstigste selbstfinanzierende Superhedgings-Strategie ist durch*

$$\overline{h}^1(t) = Y(t-1)\alpha(t, f)$$

$$\overline{h}^0(t) = \ell_x \pi(0, f) + \sum_{j=1}^{t} \overline{h}^1(j) \Delta X(j) - \overline{h}^1(t) X(t)$$

*gegeben. Dabei wird $\alpha(t, f)$ aus der Gleichung (2) bestimmt.*

Man fragt sich nun, wo die Überlebenswahrscheinlichkeit all in diesen Berechnungen eingeht. Eine Antwort könnte es sein, dass die Überlebenswahrscheinlichkeit als 1 gesetzt wurde.

Man fragt sich nun, wo die Überlebenswahrscheinlichkeit all in diesen Berechnungen eingeht. Eine Antwort könnte es sein, dass die Überlebenswahrscheinlichkeit als 1 gesetzt wurde. Dies demonstriert wiederum, dass die Idee des Superhedgings nicht das richtige Werkzeug für den Umgang mit integrierten Risiken in einem fondsgebundenen Lebensversicherungsvertrag ist.

Man fragt sich nun, wo die Überlebenswahrscheinlichkeit all in diesen Berechnungen eingeht. Eine Antwort könnte es sein, dass die Überlebenswahrscheinlichkeit als 1 gesetzt wurde. Dies demonstriert wiederum, dass die Idee des Superhedgings nicht das richtige Werkzeug für den Umgang mit integrierten Risiken in einem fondsgebundenen Lebensversicherungsvertrag ist. Die Voraussetzung, dass der Wert des Portfolios zum Zeitpunkt $T$ in jedem Szenario $H$ überschreiten muss, ist eine zu starke Voraussetzung für unsere Anwendungen, da es impliziert, dass wir genügend Kapital haben müssen, um sogar den Fall abdecken zu können, indem alle Versicherte den Zeitpunkt T überleben.

Man fragt sich nun, wo die Überlebenswahrscheinlichkeit all in diesen Berechnungen eingeht. Eine Antwort könnte es sein, dass die Überlebenswahrscheinlichkeit als 1 gesetzt wurde. Dies demonstriert wiederum, dass die Idee des Superhedgings nicht das richtige Werkzeug für den Umgang mit integrierten Risiken in einem fondsgebundenen Lebensversicherungsvertrag ist. Die Voraussetzung, dass der Wert des Portfolios zum Zeitpunkt $T$ in jedem Szenario $H$ überschreiten muss, ist eine zu starke Voraussetzung für unsere Anwendungen, da es impliziert, dass wir genügend Kapital haben müssen, um sogar den Fall abdecken zu können, indem alle Versicherte den Zeitpunkt T überleben.
Deshalb müssen wir nach anderen alternativen Kriterien umsehen.

Man fragt sich nun, wo die Überlebenswahrscheinlichkeit all in diesen Berechnungen eingeht. Eine Antwort könnte es sein, dass die Überlebenswahrscheinlichkeit als 1 gesetzt wurde. Dies demonstriert wiederum, dass die Idee des Superhedgings nicht das richtige Werkzeug für den Umgang mit integrierten Risiken in einem fondsgebundenen Lebensversicherungsvertrag ist. Die Voraussetzung, dass der Wert des Portfolios zum Zeitpunkt $T$ in jedem Szenario $H$ überschreiten muss, ist eine zu starke Voraussetzung für unsere Anwendungen, da es impliziert, dass wir genügend Kapital haben müssen, um sogar den Fall abdecken zu können, indem alle Versicherte den Zeitpunkt T überleben. Deshalb müssen wir nach anderen alternativen Kriterien umsehen.

# Wir betrachten jetzt risikominimierendes Hedging

Die im vorherigen Abschnitt betrachteten Superhedgings-Strategien können sehr hohe Anfangskosten verursachen. Aus diesem Grund sucht Schweizer (1995) bei vorgegebenen Anfangskosten diejenige selbstfinanzierende Strategien deren Liquiditätswert in $T$ vom Derivatwert die kleinste erwartete quadratische (diskontierte) Abweichung aufweist. Föllmer und Sondermann (1986) und Föllmer und Schweizer (1989) haben Hedgingansätze entwickelt, die auf die Bedingung der Selbstfinanzierung verzichten, jedoch die quadratischen Hedgekosten aller Strategien, die das Derivat $H$ nachbilden, minimieren.

# Wir betrachten jetzt risikominimierendes Hedging

Die im vorherigen Abschnitt betrachteten Superhedgings-Strategien können sehr hohe Anfangskosten verursachen. Aus diesem Grund sucht Schweizer (1995) bei vorgegebenen Anfangskosten diejenige selbstfinanzierende Strategien deren Liquiditätswert in $T$ vom Derivatwert die kleinste erwartete quadratische (diskontierte) Abweichung aufweist. Föllmer und Sondermann (1986) und Föllmer und Schweizer (1989) haben Hedginganstäze entwickelt, die auf die Bedingung der Selbstfinanzierung verzichten, jedoch die quadratischen Hedgekosten aller Strategien, die das Derivat $H$ nachbilden, minimieren.

# Problem des risikominimierenden Hedgings

Der Vortrag von Marco Ehlscheid behandelte Risikominimierung in einem Ein-Perioden-Fall. Wir geben in diesem Abschnitt eine Version dieses Verfahrens in einem Mehr-Perioden-Fall.

# Problem des risikominimierenden Hedgings

Der Vortrag von Marco Ehlscheid behandelte Risikominimierung in einem Ein-Perioden-Fall. Wir geben in diesem Abschnitt eine Version dieses Verfahrens in einem Mehr-Perioden-Fall. Für $t \in \{0, 1, \cdots, T-1\}$ definieren wir

$$r(t,h) := E^Q[(C(t+1,h) - C(t,h))^2 | \mathcal{F}(t)] \tag{7}$$

den bedingten Erwartungswert zum Zeitpunkt $t$ der Quadrate der Hedgekosten unter dem Martingalmaß $Q$.

# Problem des risikominimierenden Hedgings

Der Vortrag von Marco Ehlscheid behandelte Risikominimierung in einem Ein-Perioden-Fall. Wir geben in diesem Abschnitt eine Version dieses Verfahrens in einem Mehr-Perioden-Fall. Für $t \in \{0, 1, \cdots, T-1\}$ definieren wir

$$r(t,h) := E^Q[(C(t+1,h) - C(t,h))^2 | \mathcal{F}(t)] \tag{7}$$

den bedingten Erwartungswert zum Zeitpunkt $t$ der Quadrate der Hedgekosten unter dem Martingalmaß $Q$. Im Gegensatz zum vorherigen Abschnitt setzen wir hier voraus, dass $V(T,h) = H$ gilt.

# Problem des risikominimierenden Hedgings

Der Vortrag von Marco Ehlscheid behandelte Risikominimierung in einem Ein-Perioden-Fall. Wir geben in diesem Abschnitt eine Version dieses Verfahrens in einem Mehr-Perioden-Fall. Für $t \in \{0, 1, \cdots, T-1\}$ definieren wir

$$r(t,h) := E^Q[(C(t+1,h) - C(t,h))^2 | \mathcal{F}(t)] \tag{7}$$

den bedingten Erwartungswert zum Zeitpunkt $t$ der Quadrate der Hedgekosten unter dem Martingalmaß $Q$. Im Gegensatz zum vorherigen Abschnitt setzen wir hier voraus, dass $V(T,h) = H$ gilt. Da dies aber im Allgemeinen unter einer selbstfinanzierenden Strategie nicht möglich ist, erlauben wir uns die Möglichkeit des Hinzufügens und der Entnahme des Kapitals zu jedem Zeitpunkt.

# Problem des risikominimierenden Hedgings

Der Vortrag von Marco Ehlscheid behandelte Risikominimierung in einem Ein-Perioden-Fall. Wir geben in diesem Abschnitt eine Version dieses Verfahrens in einem Mehr-Perioden-Fall. Für $t \in \{0, 1, \cdots, T-1\}$ definieren wir

$$r(t, h) := E^Q[(C(t+1, h) - C(t, h))^2 | \mathcal{F}(t)] \tag{7}$$

den bedingten Erwartungswert zum Zeitpunkt $t$ der Quadrate der Hedgekosten unter dem Martingalmaß $Q$. Im Gegensatz zum vorherigen Abschnitt setzen wir hier voraus, dass $V(T, h) = H$ gilt. Da dies aber im Allgemeinen unter einer selbstfinanzierenden Strategie nicht möglich ist, erlauben wir uns die Möglichkeit des Hinzufügens und der Entnahme des Kapitals zu jedem Zeitpunkt.

**Definition (Risikominimierungs-Strategie)**

Minimiere $r(t,h)$ für alle $t$ über $h$ mit $V(T,h) = H$. Das Ergebnis wird *Risikominimierungs-Strategie* genannt.

Minimierung von $r(t,h)$ kann als Verallgemeinerung des Problems (5) im Vortrag von Marco Ehlscheid betrachtet werden. Wir werden sehen, dass $r(t,h)$ zum Zeitpunkt $t$ als eine Funktion von $h^1(t+1)$ und $h^0(t)$, $t \in \{1, \cdots, T\}$, minimiert wird.

**Definition (Risikominimierungs-Strategie)**

Minimiere $r(t,h)$ für alle $t$ über $h$ mit $V(T,h) = H$. Das Ergebnis wird *Risikominimierungs-Strategie* genannt.

Minimierung von $r(t,h)$ kann als Verallgemeinerung des Problems (5) im Vortrag von Marco Ehlscheid betrachtet werden. Wir werden sehen, dass $r(t,h)$ zum Zeitpunkt $t$ als eine Funktion von $h^1(t+1)$ und $h^0(t)$, $t \in \{1, \cdots, T\}$, minimiert wird.

Wir betrachten zunächst den Prozess $V^*$, definiert durch die Gleichung

$$V^*(t) = E^Q[H|\mathcal{F}(t)]. \tag{8}$$

Es kann gezeigt werden, dass dieser Prozess eine eindeutige Zerlegung in folgender Form hat

$$V^*(t) = V^*(0) + \sum_{j=1}^{t} h^1(j,H)\Delta X(j) + L(t,H). \tag{9}$$

wobei $h^1(j,H)$ von der Information zum Zeitpunkt $j-1$ abhängt, und $L(H)$ ein $Q$-Martingal ist, Wir betrachten zunächst den Prozess $V^*$, definiert durch die Gleichung

$$V^*(t) = E^Q[H|\mathcal{F}(t)]. \tag{8}$$

Es kann gezeigt werden, dass dieser Prozess eine eindeutige Zerlegung in folgender Form hat

$$V^*(t) = V^*(0) + \sum_{j=1}^{t} h^1(j,H)\Delta X(j) + L(t,H). \tag{9}$$

wobei $h^1(j,H)$ von der Information zum Zeitpunkt $j-1$ abhängt, und $L(H)$ ein $Q$-Martingal ist,

das außerdem die Eigenschaft hat, dass das Produkt von $X$ und $L(H)$ auch ein $Q$-Martingal ist, d.h.

$$E^Q[X(u)L(u,H)|\mathcal{F}(t)] = X(t)L(t,H)$$

für alle $t \leq u$. Die Zerlegung (9) wird *Kunita-Watanabe-Zerlegung* genannt.

das außerdem die Eigenschaft hat, dass das Produkt von $X$ und $L(H)$ auch ein $Q$-Martingal ist, d.h.

$$E^Q[X(u)L(u,H)|\mathcal{F}(t)] = X(t)L(t,H)$$

für alle $t \leq u$. Die Zerlegung (9) wird *Kunita-Watanabe-Zerlegung* genannt. Diese Zerlegung kann durch die Bestimmung der Gleichung (8) und durch die Untersuchung des Zuwachses

$$\Delta V^*(t) = V^*(t) - V^*(t-1)$$

gefunden werden.

das außerdem die Eigenschaft hat, dass das Produkt von $X$ und $L(H)$ auch ein $Q$-Martingal ist, d.h.

$$E^Q[X(u)L(u,H)|\mathcal{F}(t)] = X(t)L(t,H)$$

für alle $t \leq u$. Die Zerlegung (9) wird *Kunita-Watanabe-Zerlegung* genannt. Diese Zerlegung kann durch die Bestimmung der Gleichung (8) und durch die Untersuchung des Zuwachses

$$\Delta V^*(t) = V^*(t) - V^*(t-1)$$

gefunden werden.

**Lösung (Lösung des risikominimierenden Hedgings)**

*Die Risikominimierungs-Strategie* $\hat{h} = (\hat{h}^0, \hat{h}^1)$, *die (7) für alle t minimiert, ist gegeben durch*

$$\begin{aligned} \hat{h}^1(t) &= h^1(t, H), & (10) \\ \hat{h}^0(t) &= V^*(t) - \hat{h}^1(t)X(t). & (11) \end{aligned}$$

Die risikominimierende Strategie wird durch die Kunita-Watanabe-Zerlegung (9) bestimmt.

Diese Strategie hat die Eigenschaft, dass der Wert zum Zeitpunkt $t$ gegeben ist durch

$$V(t,\hat{h}) = \hat{h}^1(t)X(t) + \hat{h}^0(t) = V^*(t).$$

Wir sehen, dass die Investition, die zum Zeitpunkt 0 getätigt wird, $V^*(0) = E^Q[H]$ ist, und als ein fairer Preis für H interpretiert werden kann. Betrachten wir den Kostenprozess in Definition 3.3 im Vortrag von Marco Ehlscheid, so ist der Kostenprozess unter der risikominimierenden Strategie gegeben ist durch

$$C(t,\hat{h}) = V^*(t) - \sum_{j=1}^{t} \hat{h}^1(j)\Delta X(j) = V^*(0) + L(t,H)$$

Diese Strategie hat die Eigenschaft, dass der Wert zum Zeitpunkt $t$ gegeben ist durch

$$V(t, \hat{h}) = \hat{h}^1(t)X(t) + \hat{h}^0(t) = V^*(t).$$

Wir sehen, dass die Investition, die zum Zeitpunkt 0 getätigt wird, $V^*(0) = E^Q[H]$ ist, und als ein fairer Preis für H interpretiert werden kann. Betrachten wir den Kostenprozess in Definition 3.3 im Vortrag von Marco Ehlscheid, so ist der Kostenprozess unter der risikominimierenden Strategie gegeben ist durch

$$C(t, \hat{h}) = V^*(t) - \sum_{j=1}^{t} \hat{h}^1(j)\Delta X(j) = V^*(0) + L(t, H)$$

und das minimale erreichbare Risiko ist durch

$$r(t, \hat{h}) = E^Q[(\Delta L(t+1, H))^2 | \mathcal{F}(t)]$$

gegeben.

# Anwendung auf fondsgebundene LV

Der Hauptschritt bei der Bestimmung der risikominimierenden Strategie ist die Herleitung der Zerlegung in (9) in einem Markt, den wir im ersten Abschnitt dieses Vortrags eingeführt haben. Um eine bessere Interpretation unserer Ergebnisse geben zu können, führen wir einen Prozess $M$ ein, definiert durch

$$M(t) = E^Q[Y(T)|\mathcal{H}(t)] = Y(t)\,{}_{T-t}p_{x+t}, \tag{12}$$

der die bedingte erwartete Anzahl der überlebenden zum Zeitpunkt T angibt.

# Anwendung auf fondsgebundene LV

Der Hauptschritt bei der Bestimmung der risikominimierenden Strategie ist die Herleitung der Zerlegung in (9) in einem Markt, den wir im ersten Abschnitt dieses Vortrags eingeführt haben. Um eine bessere Interpretation unserer Ergebnisse geben zu können, führen wir einen Prozess $M$ ein, definiert durch

$$M(t) = E^Q[Y(T)|\mathcal{H}(t)] = Y(t)\,{}_{T-t}p_{x+t}, \tag{12}$$

der die bedingte erwartete Anzahl der überlebenden zum Zeitpunkt T angibt. Der Faktor ${}_{T-t}p_{x+t}$ ist die Wahrscheinlichkeit den Zeitpunkt $T$ zu überleben und $Y(t)$ ist die aktuelle Anzahl der überlebenden zum Zeitpunkt $t$.

# Anwendung auf fondsgebundene LV

Der Hauptschritt bei der Bestimmung der risikominimierenden Strategie ist die Herleitung der Zerlegung in (9) in einem Markt, den wir im ersten Abschnitt dieses Vortrags eingeführt haben. Um eine bessere Interpretation unserer Ergebnisse geben zu können, führen wir einen Prozess $M$ ein, definiert durch

$$M(t) = E^Q[Y(T)|\mathcal{H}(t)] = Y(t)\,{}_{T-t}p_{x+t}, \qquad (12)$$

der die bedingte erwartete Anzahl der überlebenden zum Zeitpunkt T angibt. Der Faktor ${}_{T-t}p_{x+t}$ ist die Wahrscheinlichkeit den Zeitpunkt $T$ zu überleben und $Y(t)$ ist die aktuelle Anzahl der überlebenden zum Zeitpunkt $t$.

Man kann nun die Gleichung in (8) für

$$V^*(t) = E^Q\left[Y(t)\frac{f(S^1(T))}{S^0(T)}\mathcal{F}(t)\right]$$

die Zerlegung in Termen von $\pi(f)$ und M ausdrücken. Genauer gesagt, die Zerlegung, die wir benötigen, ist gegeben durch

$$V^*(t) = V^*(0) + \sum_{j=1}^{t} M(j-1)\alpha(j,f)\Delta X(j) + \sum_{j=1}^{t} \pi(j,f)\Delta M(j). \tag{13}$$

Man kann nun die Gleichung in (8) für

$$V^*(t) = E^Q \left[ Y(t) \frac{f(S^1(T))}{S^0(T)} \mathcal{F}(t) \right]$$

die Zerlegung in Termen von $\pi(f)$ und M ausdrücken. Genauer gesagt, die Zerlegung, die wir benötigen, ist gegeben durch

$$V^*(t) = V^*(0) + \sum_{j=1}^{t} M(j-1)\alpha(j,f)\Delta X(j) + \sum_{j=1}^{t} \pi(j,f)\Delta M(j). \tag{13}$$

Dies ergibt sich zunächst mit Hilfe der Unabhängigkeit zwischen $Y$ und $(S^0, S^1)$, um die Gleichung

$$V^*(t) = M(t)\pi(t, f)$$

zu erhalten, die zeigt, dass

$$\Delta V^*(t) = M(t-1)(\pi(t, f) - \pi(t, f-1)) + \pi(t, f)(M(t) - M(t-1)).$$

Benutzt man die Gleichung (2), so erhält man die Zerlegung (13).
Das führt schließlich zum folgenden Ergebnis

Dies ergibt sich zunächst mit Hilfe der Unabhängigkeit zwischen $Y$ und $(S^0, S^1)$, um die Gleichung

$$V^*(t) = M(t)\pi(t, f)$$

zu erhalten, die zeigt, dass

$$\Delta V^*(t) = M(t-1)(\pi(t, f) - \pi(t, f-1)) + \pi(t, f)(M(t) - M(t-1)).$$

Benutzt man die Gleichung (2), so erhält man die Zerlegung (13). Das führt schließlich zum folgenden Ergebnis

### Lösung (Lösung des Problems der risikominimierenden Strategie für fondsgebundene LV)

*Der faire Preis für einen fondsgebundenen Lebensversicherungsvertrag ist gegeben durch* $\ell_{x\,T}p_x\pi(0,f)$*. Die risikominimierende Strategie ist gegeben durch*

$$h^1(t) = Y(t-1)\,{}_{T-(t-1)}p_{x+(t-1)}\alpha(t,f) \quad (14)$$

$$h^0(t) = Y(t)\,{}_{T-t}p_{x+t} - Y(t-1)\,{}_{T-(t-1)}p_{x+(t-1)} \quad (15)$$

*wobei* $\alpha(f)$ *durch die Gleichung (2) bestimmt wird.*

Wenn wir die Überlebenswahrscheinlichkeit ${}_{T-(t-1)}p_{x+(t-1)}$ in der Form

$$ {}_1p_{x+(t-1)} \cdot {}_{T-t}p_{x+t} $$

schreiben, dann kann der Verlust geschrieben werden als

$$ \Delta L(t) = \pi(t,f)\,{}_{T-t}p_{x+t}(Y(t) - Y(t-1)\,{}_1p_{x+(t-1)}). $$

# Ein alternatives Hedging: *mean-variance-hedging*

Ein alternatives Hedgingverfahren ist das Prinzip des sog. *Varianz-Hedging im Mittel* (oder engl. *mean-variance-hedging*, kurz: MVH). Dieses Verfahren benutzt kein spezielles Martingalmaß und verwendet nur selbstfinanzierende Strategien.

# Ein alternatives Hedging: *mean-variance-hedging*

Ein alternatives Hedgingverfahren ist das Prinzip des sog. *Varianz-Hedging im Mittel* (oder engl. *mean-variance-hedging*, kurz: MVH). Dieses Verfahren benutzt kein spezielles Martingalmaß und verwendet nur selbstfinanzierende Strategien. Wie das risikominimierende Hedging ist auch das Varianz-Hedging im Mittel ein symmetrisches Verfahren, d.h. es berücksichtigt die Verluste und Gewinne gleichermaßen.

# Ein alternatives Hedging: *mean-variance-hedging*

Ein alternatives Hedgingverfahren ist das Prinzip des sog. *Varianz-Hedging im Mittel* (oder engl. *mean-variance-hedging*, kurz: MVH). Dieses Verfahren benutzt kein spezielles Martingalmaß und verwendet nur selbstfinanzierende Strategien. Wie das risikominimierende Hedging ist auch das Varianz-Hedging im Mittel ein symmetrisches Verfahren, d.h. es berücksichtigt die Verluste und Gewinne gleichermaßen.

# Ein alternatives Hedging: *mean-variance-hedging*

Ein alternatives Hedgingverfahren ist das Prinzip des sog. *Varianz-Hedging im Mittel* (oder engl. *mean-variance-hedging*, kurz: MVH). Dieses Verfahren benutzt kein spezielles Martingalmaß und verwendet nur selbstfinanzierende Strategien. Wie das risikominimierende Hedging ist auch das Varianz-Hedging im Mittel ein symmetrisches Verfahren, d.h. es berücksichtigt die Verluste und Gewinne gleichermaßen.

### Definition (Varianz-Hedging im Mittel)

Minimiere

$$E[(H - V(H,h))^2]$$

über alle selbstfinanzierenden Strategien $h$.

Das Prinzip des Varianz-Hedgings im Mittel besteht aus der Ermittlung der selbstfinanzierenden Strategie, die so nahe wie möglich an die Verbindlichkeit H kommt im Sinne von $L^2(P)$. Wir erinnern uns, dass der Endwert zum Zeitpunkt T eines Portfolios für eine selbstfinanzierende Strategie gegeben ist durch

$$V(T,h) = V(0,h) + \sum_{j=1}^{T} h^1(j)\Delta X(j).$$

Das Prinzip des Varianz-Hedgings im Mittel besteht aus der Ermittlung der selbstfinanzierenden Strategie, die so nahe wie möglich an die Verbindlichkeit H kommt im Sinne von $L^2(P)$. Wir erinnern uns, dass der Endwert zum Zeitpunkt T eines Portfolios für eine selbstfinanzierende Strategie gegeben ist durch

$$V(T,h) = V(0,h) + \sum_{j=1}^{T} h^1(j)\Delta X(j).$$

So kann das Prinzip des MVH als eine Projektion von H in einen linearen Unterraum interpretiert werden, der alle möglichen Werte der selbstfinanzierenden Strategie enthält.

Das Prinzip des Varianz-Hedgings im Mittel besteht aus der Ermittlung der selbstfinanzierenden Strategie, die so nahe wie möglich an die Verbindlichkeit H kommt im Sinne von $L^2(P)$. Wir erinnern uns, dass der Endwert zum Zeitpunkt T eines Portfolios für eine selbstfinanzierende Strategie gegeben ist durch

$$V(T,h) = V(0,h) + \sum_{j=1}^{T} h^1(j)\Delta X(j).$$

So kann das Prinzip des MVH als eine Projektion von H in einen linearen Unterraum interpretiert werden, der alle möglichen Werte der selbstfinanzierenden Strategie enthält.

Dies können wir noch präziser formulieren, wenn wir die Menge aller dieser möglichen Werte einführen durch

$$\mathcal{A} = \{V(T,h) | h \text{ selbstfinanzierende Strategie}\}. \tag{16}$$

Die Lösung des MVH ist genau die Projektion von H auf $\mathcal{A}$. Das Problem kann auch in einem Hilbert-Raum, z.B. $L^2(P)$, formuliert werden.

Dies können wir noch präziser formulieren, wenn wir die Menge aller dieser möglichen Werte einführen durch

$$\mathcal{A} = \{V(T,h) | h \text{ selbstfinanzierende Strategie}\}. \tag{16}$$

Die Lösung des MVH ist genau die Projektion von H auf $\mathcal{A}$. Das Problem kann auch in einem Hilbert-Raum, z.B. $L^2(P)$, formuliert werden. Aus dem sog.

**Satz (Projektionssatz)**

*Es sei* $\mathbf{H}$ *ein Hilbert-Raum mit dem Skalarprodukt* $< \cdot, \cdot >$ *und* $M \subset \mathbf{H}$ *ein linearer Unterraum. Dann gibt es für alle* $f \in \mathbf{H}$ *genau ein* $f_1 \in M$ *und genau ein* $f_2 \in M^\perp$ *mit* $f = f_1 + f_2$*, wobei* $M^\perp$ *das orthogonale Komplement von* $M$ *ist.*

Dies können wir noch präziser formulieren, wenn wir die Menge aller dieser möglichen Werte einführen durch

$$\mathcal{A} = \{V(T,h) | h \text{ selbstfinanzierende Strategie}\}. \tag{16}$$

Die Lösung des MVH ist genau die Projektion von H auf $\mathcal{A}$. Das Problem kann auch in einem Hilbert-Raum, z.B. $L^2(P)$, formuliert werden. Aus dem sog.

**Satz (Projektionssatz)**

*Es sei* $\mathbf{H}$ *ein Hilbert-Raum mit dem Skalarprodukt* $< \cdot, \cdot >$ *und* $M \subset \mathbf{H}$ *ein linearer Unterraum. Dann gibt es für alle* $f \in \mathbf{H}$ *genau ein* $f_1 \in M$ *und genau ein* $f_2 \in M^\perp$ *mit* $f = f_1 + f_2$*, wobei* $M^\perp$ *das orthogonale Komplement von M ist.*

wissen wir, dass H eindeutig geschrieben werden kann als

$$H = c(H) + \sum_{j=1}^{T} h^1(j,H)\Delta X(j) + N(H) = a(H) + N(H), \quad (17)$$

wobei $a(H) \in \mathcal{A}$ und $N(H)$ orthogonal zu $\mathcal{A}$, im Sinne von, dass gilt $E[N(H)a] = 0$ für alle $a \in \mathcal{A}$. Das Anfangskapital $c(H)$ wird *approximation price* genannt, und bildet zusammen mit $h^1(H)$ die *mean-variance-hedging-Strategie* (kurz: MVH-Strategie), d.h. die selbstfinanzierende Strategie, die den Abstand zu H minimiert. Der zweite Summand $N(H)$ ist der Teil von H, der nicht abgesichert werden kann.

wissen wir, dass H eindeutig geschrieben werden kann als

$$H = c(H) + \sum_{j=1}^{T} h^1(j, H)\Delta X(j) + N(H) = a(H) + N(H), \quad (17)$$

wobei $a(H) \in \mathcal{A}$ und $N(H)$ orthogonal zu $\mathcal{A}$, im Sinne von, dass gilt $E[N(H)a] = 0$ für alle $a \in \mathcal{A}$. Das Anfangskapital $c(H)$ wird *approximation price* genannt, und bildet zusammen mit $h^1(H)$ die *mean-variance-hedging-Strategie* (kurz: MVH-Strategie), d.h. die selbstfinanzierende Strategie, die den Abstand zu H minimiert. Der zweite Summand $N(H)$ ist der Teil von H, der nicht abgesichert werden kann.

Um die Lösung geben zu können, führen wir die Größen

$$\Delta A(t) = E[\Delta X(t)|\mathcal{F}(t-1)]$$

für alle $t = 1, \cdots, T$, die die erwartete Änderung in X im Jahr $t$ berechnet unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß P, und

$$\tilde{\lambda}(t) = \frac{\Delta A(t)}{E[(\Delta X(t))^2|\mathcal{F}(t-1)]}$$

ein.

Um die Lösung geben zu können, führen wir die Größen

$$\Delta A(t) = E[\Delta X(t)|\mathcal{F}(t-1)]$$

für alle $t = 1, \cdots, T$, die die erwartete Änderung in X im Jahr $t$ berechnet unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß P, und

$$\tilde{\lambda}(t) = \frac{\Delta A(t)}{E[(\Delta X(t))^2|\mathcal{F}(t-1)]}$$

ein.

### Definition (Minimales Martingalmaß)

Das durch die *minimale Martingaldichte* $\tilde{Z}(T)$

$$\tilde{Z}(T) = \frac{\mathrm{d}\tilde{P}}{\mathrm{d}P} = \prod_{t=1}^{T} \frac{1 - \tilde{\lambda}(t)\Delta X(t)}{1 - \tilde{\lambda}(t)\Delta A(t)} \tag{18}$$

gegebene Martingalmaß $\tilde{P}$ nennt man *minimales Martingalmaß*.

Wir schreiben hier $\tilde{Z}$ statt $Z^{\tilde{P}}$. Im Allgemeinen kann die Dichte in (18) negative Werte annehmen, was impliziert, dass das Martingalmaß $\tilde{P}$ ein *signiertes Martingalmaß* ist.

### Definition (Minimales Martingalmaß)

Das durch die *minimale Martingaldichte* $\tilde{Z}(T)$

$$\tilde{Z}(T) = \frac{\mathrm{d}\tilde{P}}{\mathrm{d}P} = \prod_{t=1}^{T} \frac{1 - \tilde{\lambda}(t)\Delta X(t)}{1 - \tilde{\lambda}(t)\Delta A(t)} \tag{18}$$

gegebene Martingalmaß $\tilde{P}$ nennt man *minimales Martingalmaß*.

Wir schreiben hier $\tilde{Z}$ statt $Z^{\tilde{P}}$. Im Allgemeinen kann die Dichte in (18) negative Werte annehmen, was impliziert, dass das Martingalmaß $\tilde{P}$ ein *signiertes Martingalmaß* ist.

# signiertes Maß

Wir geben nur zur Erinnerung und Wiederholung die Definition des sog. *signierten Martingalmaßes* an.

**Definition**

Ist Q ein *signiertes Maß*, d.h. Q nimmt mit positiver P-Wahrscheinlichkeit negative Werte an, und bildet den diskontierten Preisprozess X unter Q ein Martingal, so spricht man von einem *signierten Martingalmaß*.

# signiertes Maß

Wir geben nur zur Erinnerung und Wiederholung die Definition des sog. *signierten Martingalmaßes* an.

**Definition**

Ist Q ein *signiertes Maß*, d.h. Q nimmt mit positiver P-Wahrscheinlichkeit negative Werte an, und bildet den diskontierten Preisprozess X unter Q ein Martingal, so spricht man von einem *signierten Martingalmaß*.

Wir bemerken noch, dass in (18) $\tilde{Z}$ strikt positiv ist, und $\tilde{P}$ dem Wahrscheinlichkeitsmaß, das wir im Abschnitt für das kombinierte Model eingeführt haben, entspricht.

## signiertes Maß

Wir geben nur zur Erinnerung und Wiederholung die Definition des sog. *signierten Martingalmaßes* an.

**Definition**

Ist Q ein *signiertes Maß*, d.h. Q nimmt mit positiver P-Wahrscheinlichkeit negative Werte an, und bildet den diskontierten Preisprozess X unter Q ein Martingal, so spricht man von einem *signierten Martingalmaß*.

Wir bemerken noch, dass in (18) $\tilde{Z}$ strikt positiv ist, und $\tilde{P}$ dem Wahrscheinlichkeitsmaß, das wir im Abschnitt für das kombinierte Model eingeführt haben, entspricht.

## signiertes Maß

Wir geben nur zur Erinnerung und Wiederholung die Definition des sog. *signierten Martingalmaßes* an.

### Definition

Ist Q ein *signiertes Maß*, d.h. Q nimmt mit positiver P-Wahrscheinlichkeit negative Werte an, und bildet den diskontierten Preisprozess X unter Q ein Martingal, so spricht man von einem *signierten Martingalmaß*.

Wir bemerken noch, dass in (18) $\tilde{Z}$ strikt positiv ist, und $\tilde{P}$ dem Wahrscheinlichkeitsmaß, das wir im Abschnitt für das kombinierte Model eingeführt haben, entspricht.

# Lösung der MVP-Strategie

## Definition (Lösung der MVH-Strategie)

Die MVH-Strategie $\tilde{h} = (\tilde{h}^0, \tilde{h}^1)$ ist gegeben durch

$$\tilde{h}^1(t) = \tilde{h}^1(t, H) + \tilde{\lambda}(t) \left( \tilde{V}(t-1) - \tilde{V}(0) - \sum_{j=1}^{t-1} \tilde{h}^1(j) \Delta X(j) \right).$$

Sie schließt Prozesse in folgender Zerlegung ein:

$$H = \tilde{H}(0) + \sum_{j=1} \tilde{h}^1(j, H)\Delta X(j) + \tilde{L}(T, H),$$

wobei $\tilde{L}(H)$ ein Martingal unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß P ist.
Der Prozess $\tilde{V}$ wird bestimmt durch

$$\tilde{V}(t) = \tilde{E}[H|\mathcal{F}(t)].$$

Sie schließt Prozesse in folgender Zerlegung ein:

$$H = \tilde{H}(0) + \sum_{j=1} \tilde{h}^1(j, H)\Delta X(j) + \tilde{L}(T, H),$$

wobei $\tilde{L}(H)$ ein Martingal unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß P ist. Der Prozess $\tilde{V}$ wird bestimmt durch

$$\tilde{V}(t) = \tilde{E}[H|\mathcal{F}(t)].$$

Das optimale Anfangskapital (*the approximation price*) ist gegeben durch $\tilde{V}(0) = \tilde{E}[H] = H(0)$.

Sie schließt Prozesse in folgender Zerlegung ein:

$$H = \tilde{H}(0) + \sum_{j=1} \tilde{h}^1(j, H)\Delta X(j) + \tilde{L}(T, H),$$

wobei $\tilde{L}(H)$ ein Martingal unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß P ist. Der Prozess $\tilde{V}$ wird bestimmt durch

$$\tilde{V}(t) = \tilde{E}[H|\mathcal{F}(t)].$$

Das optimale Anfangskapital (*the approximation price*) ist gegeben durch $\tilde{V}(0) = \tilde{E}[H] = H(0)$.

Schließlich erwähnen wir, dass die Varianz der Differenz zwischen der optimalen Investmenstrategie und H gegeben ist durch

$$Var[N(H)] = E[(N(H))^2] = \sum_{t=1}^{T} E[(\Delta\tilde{L}(t,H))^2] \prod_{j=t+1}^{T} (1-\tilde{\lambda}(j)\Delta A(j)).$$

Im letzten Abschnitt geben wir das Varianz-Hedging im Mittel für fondsgebundene Lebensversicherungsverträge, gegeben durch (1), an.

## Satz (MVH für fondsgebundene LV)

*Der approximation price für den fondsgebundenen Lebensversicherungsvertrag ist gegeben durch $\ell_{x\,T}p_x\pi(0,f)$. Die MVH-Strategie ist definiert durch*

$$\begin{aligned}
\tilde{h}^1(t) &= Y(t-1)_{T-(t-1)}p_{x+(t-1)}\alpha(t,f) \\
&\quad +\tilde{\lambda}(t)(Y(t-1)_{T-(t-1)}p_{x+(t-1)}\pi(t-1,f) \\
&\quad -\ell_{x\,T}p_0\pi(0,f) - \sum_{j=1}^{T-1}\tilde{h}^1(j)\Delta X(j)), \\
\tilde{h}^0(t) &= \ell_{x\,T}p_x\pi(0,f) + \sum_{j=1}^{t}\tilde{h}^1(j)\Delta X(j) - \tilde{h}^1(t)X(t).
\end{aligned}$$

Die optimale Anzahl der Aktien $\tilde{h}^1(t)$ im Intervall $(t-1, t]$ wird als die Anzahl der Aktien in der Lösung (14) für die risikominimierende Strategie mit einem zusätzlichen Korrekturfaktor berechnet. Dieser Korrekturfaktor ist rekursiv definiert und vergleicht die Veränderung

$$\tilde{V}(t-1) - \tilde{V}(0) = Y(t-1)\,{}_{T-(t-1)}p_{x+(t-1)}\pi(t-1, f) - \ell_x\,{}_Tp_0\pi(0, f)$$

und die realisierten Gewinne

$$\sum_{j=1}^{t-1} \tilde{h}^1(j)\Delta X(j)$$

in der Periode $[0, t-1]$.

Die optimale Anzahl der Aktien $\tilde{h}^1(t)$ im Intervall $(t-1, t]$ wird als die Anzahl der Aktien in der Lösung (14) für die risikominimierende Strategie mit einem zusätzlichen Korrekturfaktor berechnet. Dieser Korrekturfaktor ist rekursiv definiert und vergleicht die Veränderung

$$\tilde{V}(t-1)-\tilde{V}(0) = Y(t-1)\,{}_{T-(t-1)}p_{x+(t-1)}\pi(t-1, f) - \ell_x\,{}_T p_0 \pi(0, f)$$

und die realisierten Gewinne

$$\sum_{j=1}^{t-1} \tilde{h}^1(j)\Delta X(j)$$

in der Periode $[0, t-1]$.

Zuletzt sei noch bemerkt, dass die MVH-Strategie ein Anfangskapital von $\ell_{x\,T}p_x\pi(0, f)$ verlangt und dass sie eine selbstfinanzierende Strategie ist.

- Ehlscheid, Marco (2010), Seminar Bewertungsmethoden in der Personenversicherungsmathematik, *Aktuarielle und finanzmathematische Bewertung II*, Universität zu Köln.
- Møller, T. und Steffensen, M. (2007). *Market-Valuation Methods in Life and Pension Insurance*. Cambridge University Press, New York.
- Müller, Monika (2008). *Risikominimierendes Hedging von Kreditderivaten*. Verlag Dr. Kovač, Hamburg.
- Lamberton, D. und Lapeyre, B. (2008). *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*. Chapman & Hall, New York, London.
- Wikimedia Foundation Inc., *Wikipedia, Die freie Enzyklopädie*, Stand Juni 2010, http://de.wikipedia.org/wiki/Hedgegesch%C3%A4ft, San Francisco.