Seminar Quantitatives Risikomanagement

Extremwerttheorie II

Ann Schmidt

Mathematisches Institut
der
Universität zu Köln

Wintersemester 09/10
Betreuung: Prof. Schmidli, J. Eisenberg

Inhaltsverzeichnis

1 Multivariate Maxima **1**

1.1 Multivariate Extremwert-Copulas 1

1.2 Copulas für multivariate Minima 3

1.3 Anziehungsbereiche von Copulas 4

1.4 Modellierung multivariater Block-Maxima 7

2 Multivariate Schranken-Überschreitungen **9**

2.1 Schrankenmodelle unter Verwendung von EV-Copulas 9

2.2 Aufstellen eines multivariaten Flankenmodells 10

2.3 Schranken-Copulas und ihre Grenzen 11

2.3.1 Untere Schranken-Copulas und ihre Grenzen 11

2.3.2 Obere Schranken-Copulas und ihre Grenzen 13

2.3.3 Grenzen von Schranken-Copulas in der Praxis 14

Kapitel 1

Multivariate Maxima

1.1 Multivariate Extremwert-Copulas

Seien $\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_n$ iid Zufallsvektoren in $\mathbb{R}^d$ mit gemeinsamer Verteilungsfunktion F und Randverteilungen $F_1, ..., F_d$, $\mathbf{X}_i = (X_{i,1}, ..., X_{i,d})'$. Das Maximum der j-ten Komponente ist definiert als $M_{n,j} = max(X_{1,j}, ..., X_{n,j})$, $j = 1, ..., d$ und der Vektor der komponentenweisen Maxima als $\mathbf{M}_n = (M_{n,1}, ..., M_{n,d})'$.

Frage: Gibt es eine multivariate Grenzverteilung von $\mathbf{M}_n$ (unter geeigneten Normalisierungen), so wie beim univariaten Fall? Wir suchen also einen Grenzwert für $\frac{\mathbf{M}_n - \mathbf{d}_n}{\mathbf{c}_n} = (\frac{M_{n,1}-d_{n,1}}{c_{n,1}}, ..., \frac{M_{n,d}-d_{n,d}}{c_{n,d}})'$, $n \to \infty$, wobei $\mathbf{c}_n = (c_{n,1}, ..., c_{n,d})' > \mathbf{0}$ und $\mathbf{d}_n = (d_{n,1}, ..., d_{n,d})'$ Vektoren aus normalisierenden Konstanten sind.
Antwort: $\frac{\mathbf{M}_n - \mathbf{d}_n}{\mathbf{c}_n}$ konvergiert in Verteilung gegen einen Zufallsvektor mit Verteilungsfunktion H, so dass gilt

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{\mathbf{M}_n - \mathbf{d}_n}{\mathbf{c}_n} \leq x) = \lim_{n\to\infty} F^n(\mathbf{c}_n\mathbf{x} + \mathbf{d}_n) = H(\mathbf{x}) \tag{1.1}$$

Definition 1.1.1 (Multivariate Extremwert-Verteilung und maximaler Anziehungsbereich)
Wenn (1.1) *für beliebige F und H gilt, sagt man F liegt im maximalen Anziehungsbereich von H, geschrieben $F \in MDA(H)$ und H ist eine multivariate Extremwert-Verteilung (MEV).*

Die Konvergenz von multivariaten Maxima ist teilweise schon durch die univariate Theorie gelöst. Wenn H nämlich nicht-entartete Randverteilungen hat, müssen diese univariate EV-Verteilungen vom Fréchet-, Gumbel- oder Weibulltyp sein. Weil diese stetig sind, muss H nach Sklars Theorem eine eindeutige Copula haben.

Theorem 1.1.2 (Extremwert-Copula)
Wenn (1.1) *für beliebige F und H mit GEV-Randverteilung erfüllt ist, dann gilt für die eindeutige Copula C von H*

$$C(\boldsymbol{u}^t) = C^t(\boldsymbol{u}), > 0 \tag{1.2}$$

Jede Copula mit der Eigenschaft (1.2) wird als Extremwert-Copula (EV-Copula) bezeichnet und kann die Copula einer MEV-Verteilung sein. Beispiele für EV-Copulas sind die Unabhängigkeits-, Komonotonie- oder Gumbel-Copula.

Theorem 1.1.3 (Pickands Darstellung)
Eine Copula C ist eine EV-Copula dann und nur dann, wenn sie sich darstellen lässt als

$$C(\boldsymbol{u}) = exp\left\{ B(\frac{\ln u_1}{\sum_{k=1}^{d} \ln u_k}, ..., \frac{\ln u_d}{\sum_{k=1}^{d} \ln u_k}) \sum_{k=1}^{d} \ln u_i \right\} \tag{1.3}$$

Dabei ist $B(\omega) = \int_{S_d} max(x_1\omega_1, ..., x_d\omega_d) dH(x)$ und H ist ein endliches Maß auf der d-dimensionalen Simplex, d.h. der Menge
$S_d = \left\{ x : x_i \geq 0, i = 1, ..., d, \sum_{i=1}^{d} x_i = 1 \right\}$.

Die Funktion $B(\omega)$ wird auch als Abhängigkeits-Funktion der EV-Copula bezeichnet. Im allgemeinen Fall ist es schwierig, solche Funktionen zu visualisieren und mit ihnen zu arbeiten.
Im bivariaten Fall haben sie aber eine einfache Form. Wir definieren $B(\omega)$ neu als eine Funktion mit skalarem Argument, indem wir $A(\omega) = B((\omega, 1-\omega)')$ setzen mit $\omega \in [0, 1]$. Aus Theorem 1.3 folgt, dass eine bivariate Copula eine EV-Copula ist dann und nur dann, wenn sie sich in der Form

$$C(u_1, u_2) = exp\left\{ (\ln u_1 + \ln u_2) A(\frac{\ln u_1}{\ln u_1 + \ln u_2}) \right\} \tag{1.4}$$

schreiben lässt mit $A(\omega) = \int_0^1 max((1-x)\omega, x(1-\omega))dH(x)$ für ein Maß H auf $[0,1]$. Daraus lässt sich ableiten, dass solch eine bivariate Abhängigkeitsfunktion die Gleichung

$$max(\omega, 1-\omega) \leq A(\omega) \leq 1, 0 \leq \omega \leq 1 \tag{1.5}$$

erfüllen muss und außerdem konvex sein muss.
Umgekehrt kann eine differenzierbare konvexe Funktion $A(\omega)$, die (1.5) erfüllt, zur Konstruktion einer EV-Copula unter Verwendung von (1.4) benutzt werden.
Außerdem kann aus der EV-Copula in (1.4) die Abhängigkeitsfunktion als

$$A(\omega) = -\ln C(\exp -\omega, \exp -(1-\omega)), \omega \in [0,1] \tag{1.6}$$

hergeleitet werden.

Beispiel 1.1.4 (Gumbel-Copula)
Wir betrachten die asymmetrische Variante der bivariaten Gumbel-Copula, also $C^{Gu}_{\theta,\alpha,\beta}(u_1,u_2) = u_1^{1-\alpha}u_2^{1-\beta}exp\left\{-((-\alpha\ln u_1)^\theta + (-\beta\ln u_2)^\theta)^{1/\theta}\right\}$. Diese Copula erfüllt (1.2) und ist somit eine EV-Copula. Wir benutzen (1.6) und berechnen die Abhängigkeitsfunktion $A(\omega) = (1-\alpha)\omega + (1-\beta)(1-\omega) + ((\alpha\omega)^\theta + (\beta(1-\omega))^\theta)^{1/\theta}$.
Die Gumbel-Copula wird auch als logistisches Modell bezeichnet.

Beispiel 1.1.5 (Galambos-Copula)
Diesmal beginnen wir mit der Abhängigkeitsfunktion, die gegeben ist durch $A(\omega) = 1-((\alpha\omega)^{-\theta}+(\beta(1-\omega))^{-\theta})^{-1/\theta}$, wobei $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ und $0 < \theta < \infty$. Dies ist eine konvexe Funktion, die $max(\omega, 1-\omega)(\omega) \leq 1$ für $0 \leq \omega \leq 1$ erfüllt, so dass sie benutzt werden kann, um eine EV-Copula nach (1.4) aufzustellen. Wir erhalten die Copula
$C^{Gal}_{\theta,\alpha,\beta}(u_1,u_2) = u_1u_2exp\left\{((-\alpha\ln u_1)^{-\theta} + (-\beta\ln u_2)^{-\theta})^{-1/\theta}\right\}$, die auch als negatives logistisches Modell bezeichnet wird.

1.2 Copulas für multivariate Minima

Grenz-Copulas für multivariate Minima können leicht aus den Grenz-Copulas für multivariate Maxima hergeleitet werden. Dabei gelten die gleichen Überlegungen wie beim univariaten Fall.

C liegt im Copula-Anziehungsbereich von C_0, geschrieben $C \in CDA(C_0)$.

Es gibt eine Reihe von äquivalenten Wegen, um (1.8) zu schreiben. Zuerst benutzen wir die asymptotische Identität $\ln x \approx x - 1$ für $x \to 1$ und erhalten für $\mathbf{u} \in (0,1]^d$

$$\lim_{t\to\infty} t(1 - C(u_1^{1/t}, ..., u_d^{1/t})) = -\ln C_0(u_1, ..., u_d)$$

$$\lim_{s\to 0^+} \frac{1 - C(u_1^s, ..., u_d^s)}{s} = -\ln C_0(u_1, ..., u_d) \tag{1.9}$$

Wenn wir in der letzten Gleichung $u_i = exp(-x_i)$ setzen und $exp(-sx) \approx 1 - sx$ für $s \to 0$ benutzen, erhalten wir für $\mathbf{x} \in [0,\infty)^d$

$$\lim_{s\to 0^+} \frac{1 - C(1 - sx_1, ..., 1 - sx_d)}{s} = -\ln C_0(\exp -x_1, ..., \exp -x_d). \tag{1.10}$$

Beispiel 1.3.3 (Grenz-Copulas für die bivariate Pareto-Verteilung)
Die bivariate Pareto-Verteilung hat univariate Pareto-Ränder $F_i(x) = 1 - (\kappa_i/(\kappa_i + x))^\alpha$ und eine Clayton-Überlebenscopula. Außerdem ist $F_i \in MDA(H_{1/\alpha})$, $i = 1, 2$. Die Clayton-Copula ist $C(u_1, u_2) = u_1 + u_2 - 1 + ((1-u_1)^{-1/\alpha} + (1-u_2)^{-1/\alpha} - 1)^{-\alpha}$. Mit (1.11) lässt sich leicht berechnen, dass $C_0(u_1, u_2) = u_1 u_2 exp(((-\ln u_1)^{-1/\alpha} + (-\ln u_2)^{-1/\alpha})^{-\alpha})$, was die Standard austauschbare Galambos-Copula ist.

In der Theorie der Copula-Anziehungsbereiche spielen auch die Koeffizienten der oberen Flankenabhängigkeit eine wichtige Rolle. Sie können uns dabei helfen, Copulas zu finden, die im Anziehungsbereich der Unabhängigkeits-Copula liegen.

Proposition 1.3.4
Sei C eine bivariate Copula mit oberem Flankenabhängigkeits-Koeffizienten λ_u und nehme an $C \in MDA(C_0)$ für eine EV-Copula C_0. Dann ist λ_u auch der obere Flankenabhängigkeits-Koeffizient von C_0 und beeinflusst dessen Abhängigkeitsfunktion durch $\lambda_u = 2(1 - A(\frac{1}{2}))$.

Beweis. Für den oberen Flankenabhängigkeits-Koeffizienten gilt $\lambda_u = \lim_{q\to 1^-} \frac{\widehat{C}(1-q,1-q)}{1-q} = 2 - \lim_{q\to 1^-} \frac{1-C(q,q)}{1-q}$. Wir benutzen die asymptotische Identität $\ln x \approx x-1$ für $x \to 1$ und die CDA Bedingung (1.9) und berechnen damit

$$\lim_{q\to 1^-} \frac{1-C(q,q)}{1-q} = \lim_{q\to 1^-} \frac{\ln C(q,q)}{\ln q} = \lim_{q\to 1^-} \lim_{s\to 0^+} \frac{1-C(q^s,q^s)}{-s\ln q}$$

$$= \lim_{q\to 1^-} \lim_{s\to 0^+} \frac{1-C(q^s,q^s)}{-\ln q^s} = \lim_{\nu\to 1^-} \frac{1-C(\nu,\nu)}{1-\nu}$$

Das zeigt, dass C und C_0 den gleichen oberen Flankenabhänigkeits-Koeffizienten haben. Mit $\lambda_u = 2 - \lim_{q\to 1^-} \frac{1-C_0(q,q)}{\ln q}$ und der Darstellung (1.4) erhalten wir, dass $\lambda_u = 2(1 - A(\frac{1}{2}))$. ■

Im Fall $\lambda_u = 0$ muss $A(\frac{1}{2}) = 1$ gelten und aus der Konvexität von A folgt, dass $A(\omega) \equiv 1$, also muss C_0 die Unabhängigkeits-Copula sein. Das gilt auch im höher-dimensionalen Fall: Wenn C eine d-dimensionale Copula ist, deren paarweisen oberen Flankenabhängigkeits-Koeffizienten alle gleich Null sind, dann müssen die bivariaten Grenz-Copulas alle die Unabhängigkeits-Copula sein und dafür muss C_0 selbst die d-dimensionale Unabhängigkeits-Copula sein.

Beispiel 1.3.5 (Gauß-Verteilung)
Wir betrachten die Grenzverteilung der multivariaten Maxima von Gaußschen Zufallsvektoren. Weil die paarweisen Flankenabhängigkeits-Koeffizienten von Gaußschen Vektoren 0 sind, ist die Grenzverteilung ein Produkt von marginalen Gumbel-Verteilungen. Die Konvergenz ist sehr langsam, aber letztendlich sind die komponentenweisen normalisierten Maxima in der Grenzverteilung unabhängig.

Beispiel 1.3.6 (t-Verteilung)
Wenn $\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_n$ iid verteilte ZV mit einer gemeinsamen $t_d(\nu, \mu, \Sigma)$-Verteilung sind, werden die univariaten Maxima der einzelnen Komponenten von univariaten Fréchet-Verteilungen mit Parameter $\frac{1}{\nu}$ angezogen. Außerdem wissen wir, dass die Flankenabhängigkeits-Koeffizienten für die t-Copula strikt positiv sind; die Unabhängigkeits-Copula kann also nicht die Grenz-Copula sein.

1.4 Modellierung multivariater Block-Maxima

Man kann eine multivariate Block-Maxima-Methode analog zum univariaten Fall entwickeln, allerdings wird dies kritisiert, weil es nicht der effizienteste Weg ist, um extreme Daten zu verarbeiten.
Wie zuvor teilen wir die zugrundeliegenden Daten in Blöcke und bezeichnen die Realisationen der Block-Maxima-Vektoren mit $\mathbf{M}_{n,1}, ..., \mathbf{M}_{n,m}$, wobei m die Anzahl der Blöcke ist. Das Verteilungsmodell, das von der univariaten und multivariaten Maxima-Theorie vorgeschlagen wird, besteht aus GEV-Rändern verbunden mit einer EV-Copula.

In der multivariaten Theorie ist allerdings eine bestimmte Copula zu verwenden, nämlich die Copula C_0, von der die Copula C der zugrundeliegenden Verteilung der Rohdaten angezogen wird. Die Copula C ist aber unbekannt, daher arbeiten wir im Allgemeinen mit jeder lenkbaren EV-Copula, die für die jeweilige Aufgabe geeignet erscheint. In einer bivariaten Anwendung - wenn wir uns auf austauschbare Copulas beschränken - stehen uns hauptsächlich Gumbel-, Galambos- und t-EV-Copulas zur Verfügung. Die generelle funktionale Form aller dieser Familien ist sehr ähnlich. Es ist sinnvoll, entweder mit Gumbel oder mit Galambos zu arbeiten, da deren Formen eine relativ einfache Berechnung der Copula-Dichte ermöglichen, die wiederum für die Folgerung der Likelihood benötigt wird. Selbst wenn eigentlich eine t-Copula zugrunde läge, würden wir nicht die kompliziertere t-EV-Copula verwenden, da deren Abhängigkeitsfunktion sehr genau von der Abhängigkeitsfunktion einer Gumbel-Copula approximiert werden kann.

Die Gumbel-Copula erlaubt es uns auch, mögliche Asymmetrie zu untersuchen, indem wir die allgemeine nicht-austauschbare Familie verwenden. Für Anwendungen in mehr als zwei Dimensionen können die höher-dimensionalen Erweiterungen von Gumbel nützlich sein.

Fügt man diese Überlegungen zusammen, so können Daten über multivariate Maxima modelliert werden, indem man die Verteilungsfunktion $H_{\xi,\mu,\sigma,\theta,}(x) = C_\theta(H_{\xi_1,\mu_1,\sigma_1,\theta_1,}(x_1), ..., H_{\xi_d,\mu_d,\sigma_d,\theta_d,}(x_d))$ für eine lenkbare parametrische EV-Copula C_θ benutzt. Daraus kann dann die Maximum Likelihood gefolgert

werden. Für die Maximierung müssen alle Parameter geschätzt werden.

Beispiel 1.4.1
Sei $M_{65,1}$ das vierteljährliche Maximum der täglichen prozentualen Verluste des US-$ gegenüber dem Euro und sei $M_{65,2}$ das vierteljährliche Maximum der täglichen prozentualen Verluste des US-$ gegenüber dem japanischen Yen. Wir definieren Stressereignisse für jede dieser täglichen return-Reihen: Für den US-$ gegen den Euro wären wir über eine Abnahme von 4% an einem Tag besorgt und für den US-$ gegen den Yen über eine Abnahme von 5%. Wir wollen die Wahrscheinlichkeit dafür schätzen, dass eines oder beide dieser Stressereignisse in einem Quartal auftreten. Die Wahrscheinlichkeit ist gegeben durch $p = 1 - P(M_{65,1} \leq 4\%, M_{65,2} \leq 5\%)$ und angenähert durch $1 - H_{\xi,\mu,\sigma,\theta,}(0.04, 0.05)$, wobei die Parameter aus den Block-Maxima-Daten geschätzt werden.

Kapitel 2

Multivariate Schranken-Überschreitungen

2.1 Schrankenmodelle unter Verwendung von EV-Copulas

Angenommen $\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_n$ haben eine unbekannte gemeinsame Verteilung $F(\mathbf{x}) = C(F_1(x_1), ..., F_d(x_d))$ für eine unbekannte Copula C und Randverteilungen $F_1, ..., F_d$ und F liegt im Anziehungsbereich einer MEV-Verteilung. Wir wollen die obere Flanke von $F(\mathbf{x})$ über einer Schranke $\mathbf{u} = (u_1, ..., u_d)'$ approximieren. Die univariate Theorie sagt uns, dass für $x_j \geq u_j$ und u_j groß genug die Flanken der Randverteilungen F_j approximiert werden können durch eine GPD-basierte Funktion der Form

$$\widetilde{F_j}(x_j) = 1 - \lambda_j(1 + \xi_j \frac{x_j - u_j}{\beta_j})^{-1/\xi_j}, \tag{2.1}$$

wobei $\lambda_j = \overline{F}(u_j)$. Für $\mathbf{x} \geq \mathbf{u}$ benutzen wir also die Näherung $\widetilde{F}(\mathbf{x}) \approx C(\widetilde{F_1}(x_1), ..., \widetilde{F_d}(x_d))$.

Aber auch C ist unbekannt und muss approximiert werden. Die CDA-Bedingung (1.8) besagt, dass wir für ein $\nu \in (0,1)^d$ und t ausreichend groß die Näherung $C(\nu^{1/t}) \approx C_0^{1/t}(\nu)$ benutzen dürfen. Wenn wir $\omega = \nu^{1/t}$ schreiben, erhalten wir

$$C(\omega) \approx C_0^{1/t}(\omega^t) = C_0(\omega) \tag{2.2}$$

Für $t \to \infty$ gilt $\nu^{1/t} \to 1$, also können wir in der Flanke die Copula C durch ihre EV-Grenz-Copula C_0 ersetzen und erhalten das allgemeine Modell

$$\widetilde{F}(\mathbf{x}) \approx C_0(\widetilde{F_1}(x_1), ..., \widetilde{F_d}(x_d)), \mathbf{x} \geq \mathbf{u}. \tag{2.3}$$

Für C_0 wählen wir dann in der Regel eine flexible und lenkbare parametrische EV-Copula.

2.2 Aufstellen eines multivariaten Flankenmodells

Angenommen wir haben Beobachtungen $\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_n$ mit einer Verteilungsfunktion F, für deren Flanke die Näherung (2.3) möglich ist. Von diesen Beobachtungen liegt wahrscheinlich nur eine kleine Anzahl in der gemeinsamen Flanke ($\mathbf{x} \geq \mathbf{u}$), andere Beobachtungen überschreiten evtl. in einigen Komponenten die individuellen Schranken, liegen aber unter $\mathbf{u}$. Angenommen m_i Komponenten des Datenvektors $\mathbf{X}_i$ überschreiten ihre jeweiligen Schranken im Vektor $\mathbf{u}$. Die übrigen Komponenten bezeichnen wir als zensiert im Wert u_j. Die Beiträge der $\mathbf{X}_i$ zur Likelihood sind gegeben durch

$$L_i = L_i(\xi, \beta, \lambda, \theta, \mathbf{X}_i) = \frac{\partial^{m_i} \widetilde{F}(X_1, ..., X_d)}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_{m_i}}}|_{max(X_i, u)},$$

wobei die Indizes $j_1, ..., j_{m_i}$ diejenigen Komponenten von $\mathbf{X}_i$ bezeichnen, die ihre individuellen Schranken überschreiten.
Die gesamte Likelihood ist ein Produkt solcher Beiträge und wird bezüglich aller Parameter maximiert.

Beispiel 2.2.1 (Bivariates Flankenmodell für Wechselkurs-return-Daten)
Wir betrachten tägliche prozentuale Wertverluste des US-$ gegenüber dem Euro bzw. dem Yen im Zeitraum 1996-2003. Wir haben 2008 tägliche returns uns setzen Schranken bei 0.75% bzw. 1.00%, was 189 bzw. 126 Überschreitungen ergibt.
Bei der Maximierung der Likelihood erhalten wir Schätzungen und Standardfehler für alle Parameter.
Jetzt können wir (2.3) benutzen, um Berechnungen über Stressereignisse

durchzuführen. Z.B. ist ein Schätzer für die Wahrscheinlichkeit, dass an einem Tag der Dollar um mehr als 2.00% gegen die beiden anderen Währungen fällt, gegeben durch $p_1 2 = 1 - \widetilde{F_1}(2.00) - \widetilde{F_2}(2.00) + C_\theta^{Gu}(\widetilde{F_1}(2.00), \widetilde{F_2}(2.00)) = 0,000315$, was bei 250 Handelstagen einem 13-Jahres-Ereignis entspricht. Die marginalen Wahrscheinlichkeiten für Wertverluste dieser Höhe sind $p_1 = 1 - \widetilde{F_1}(2.00) = 0,0014$ und $p_2 = 1 - \widetilde{F_2}(2.00) = 0,0061$. Diese Ergebnisse können wir benutzen für die Berechnung von sogenannten Überschuss-Wahrscheinlichkeiten für das bedingte Auftreten von Stressereignissen. Z.B. kann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der US-$ 2% gegen den Yen fällt, wenn er 2% gegen den Euro fällt, durch $p_1 2/p_1 = 0,23$ geschätzt werden.

2.3 Schranken-Copulas und ihre Grenzen

Ein anderer gebräuchlicher Ansatz für multivariate Extrema schaut explizit auf die Art von Copula, die wir erhalten, wenn wir Beobachtungen darauf bedingen, über oder unter extremen Schranken zu liegen. So wie die GPD ein natürliches Grenzwert-Modell für univariate Schrankenüberschreitungen ist, können wir auch Klassen von Copulas finden, die ein natürliches Grenzwert-Modell für die Abhängigkeitsstruktur von multivariaten Überschreitungen liefern.

Bemerkung 2.3.1
Im Folgenden werden wir uns auf den Fall von bivariaten Copulas konzentrieren. Zudem ist es einfacher, zunächst die untere linke Flanke einer Wahrscheinlichkeitsverteilung zu betrachten und dann zu zeigen, wie sich die Ergebnisse auf die obere rechte Flanke auswirken.

2.3.1 Untere Schranken-Copulas und ihre Grenzen

Wir betrachten einen Zufallsvektor (X_1, X_2) mit stetigen Randverteilungen F_1 und F_2 und eine austauschbare Copula C. Wir suchen die Verteilung von (X_1, X_2) unter der Bedingung, dass beide unter ihren ν-Quantilen liegen. Dieses Ereignis wird beschrieben durch $A_\nu = \{X_1 \leq F_1^{\leftarrow}(\nu), X_2 \leq F_2^{\leftarrow}(\nu)\}$, $0 \leq \nu \leq 1$. Unter der Annahme $C(\nu, \nu) \neq 0$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass X_1 unter seinem x_1-Quantil und X_2 unter seinem x_2-Quantil liegt unter

der Bedingung, dass beide unter ihrem ν-Quantil liegen, gegeben durch

$$P(X_1 \leq F_1^{\leftarrow}(x_1), X_2 \leq F_2^{\leftarrow}(x_2)|A_\nu) = \frac{C(x_1, x_2)}{C(\nu, \nu)}, x_1, x_2 \in [0, \nu]$$

Betrachtet als eine Funktion von x_1 und x_2 definiert dies eine bivariate Verteilungsfunktion auf $[0, \nu]^2$ und nach Sklars Theorem können wir

$$\frac{C(x_1, x_2)}{C(\nu, \nu)} = C_\nu^0(F_{(\nu)}(x_1), F_{(\nu)}(x_2)), x_1, x_2 \in [0, \nu] \tag{2.4}$$

schreiben für eine bestimmte Copula C_ν^0 und stetige Randverteilungen

$$F_{(\nu)}(x) = P(X_1 \leq F_1^{\leftarrow}(x)|A_\nu) = \frac{C(x, \nu)}{C(\nu, \nu)}, 0 \leq x \leq \nu. \tag{2.5}$$

Diese bestimmte Copula kann geschrieben werden als

$$C_\nu^0(u_1, u_2) = \frac{C(F_{(\nu)}^{\leftarrow}(u_1), F_{(\nu)}^{\leftarrow}(u_2))}{C(\nu, \nu)} \tag{2.6}$$

und wird als die untere Schranken-Copula von C auf Höhe ν bezeichnet. Juri und Wüthrich (2002), die diesen Ansatz entwickelt haben, bezeichnen sie als untere Flankenabhängigkeits-Copula (LTDC).
Es ist von Interesse, Grenzwerte für diese Copula für $\nu \to 0$ zu finden. Man bezeichnet eine Copula C als untere Grenz-Schranken-Copula, wenn sie die Gleichung

$$C_\nu^0(u_1, u_2) = C(u_1, u_2) \tag{2.7}$$

für ein beliebiges $0 \leq \nu \leq 1$ erfüllt.

Beispiel 2.3.2 (Die Clayton-Copula als Grenze der unteren Schranken-Copula)
Für die Standard bivariate Clayton-Copula können wir $F_{(\nu)}$ nach (2.5) leicht berechnen als

$$F_{(\nu)}(x) = \frac{(x^{-\theta} + \nu^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}}{(2\nu^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}}, 0 \leq x \leq \nu$$

und die Inverse ist

$$F_{(\nu)}^{\leftarrow}(x) = u(2\nu^{-\theta} - 1 + u^\theta(1 - \nu^{-\theta}))^{-1/\theta}, 0 \leq u \leq 1$$

Also kann die untere Schranken-Copula für die Clayton-Copula aus (2.6) berechnet werden und man kann nachprüfen, dass diese wieder die Clayton-Copula ist. Mit anderen Worten: Die Clayton-Copula ist eine untere Grenz-Schranken-Copula, weil (2.7) erfüllt ist

2.3.2 Obere Schranken-Copulas und ihre Grenzen

Um obere Schranken-Copulas zu definieren, betrachteb wir wieder einen Zufallsvektor (X_1, X_2) mit Copula C und Randverteilungen F_1 und F_2. Diesmal bedingen wir auf das Ereignis $\overline{A}_\nu = \{X_1 > F_1^{\leftarrow}(\nu), X_2 > F_2^{\leftarrow}(\nu)\}, 0 \leq \nu \leq 1$. Wir erhalten die Gleichung

$$P(X_1 > F_1^{\leftarrow}(x_1), X_2 > F_2^{\leftarrow}(x_2)|\overline{A}_\nu) = \frac{\overline{C}(x_1, x_2)}{\overline{C}(\nu, \nu)}, x_1, x_2 \in [\nu, 1].$$

Weil $\frac{\overline{C}(x_1,x_2)}{\overline{C}(\nu,\nu)}$ eine bivariate Überlebensfunktion auf $[\nu, 1]^2$ definiert, können wir

$$\frac{\overline{C}(x_1, x_2)}{\overline{C}(\nu, \nu)} = \widehat{C}_\nu^1(\overline{G}_{(\nu)}(x_1), \overline{G}_{(\nu)}(x_2)), x_1, x_2 \in [\nu, 1] \tag{2.8}$$

schreiben für eine Überlebenscopula $\widehat{C}_\nu^1$ einer Copula C_ν^1 und marginale Überlebensfunktionen

$$\overline{G}_{(\nu)}(x) = P(X_1 > F_1^{\leftarrow}(x)|\overline{A}_\nu) = \frac{\overline{C}(x, \nu)}{\overline{C}(\nu, \nu)}, \nu \leq x \leq 1 \tag{2.9}$$

Die Copula C_ν^1 wird als obere Schranken-Copula auf Höhe ν bezeichnet und es ist nun von Interesse, Grenzwerte für $\nu \to 1$ zu finden, die als obere Grenz-Schranken-Copulas bezeichnet werden. Wie das folgende Lemma zeigt, genügt es eigentlich, entweder nur untere oder nur obere Schranken-Copulas zu betrachten, da aus den Ergebnissen des einen die des anderen folgen.

Lemma 2.3.3

Die Überlebens-Copula der oberen Schranken-Copula von C auf Höhe ν ist die untere Schranken-Copula von $\widehat{C}$ auf Höhe $1 - \nu$.

Beweis. Wir benutzen die Gleichung $\overline{C}(u_1, u_2) = \widehat{C}(1 - u_1, 1 - u_2)$ und (2.9), um (2.8) umzuschreiben zu

$$\frac{\widehat{C}(1 - x_1, 1 - x_2)}{\widehat{C}(1 - \nu, 1 - \nu)} = \widehat{C}_\nu^1(\frac{\widehat{C}(1 - x_1, 1 - \nu)}{\widehat{C}(1 - \nu, 1 - \nu)}, \frac{\widehat{C}(1 - \nu, 1 - x_2)}{\widehat{C}(1 - \nu, 1 - \nu)}).$$

Wenn wir $y_1 = 1 - x_1$, $y_2 = 1 - x_2$ und $\omega = 1 - \nu$ schreiben, haben wir

$$\frac{\widehat{C}(y_1, y_2)}{\widehat{C}(\omega, \omega)} = \widehat{C}_{1-\omega}^1(\frac{\widehat{C}(y_1, \omega)}{\widehat{C}(\omega, \omega)}, \frac{\widehat{C}(\omega, y_2)}{\widehat{C}(\omega, \omega)}), y_1, y_2 \in [0, \omega],$$

und der Vergleich mit (2.4) und (2.5) zeigt, dass $\widehat{C}^1_{1-\omega}$ die untere Schranken-Copula von $\widehat{C}$ auf Höhe $\omega = 1 - \nu$ sein muss. ■

Es folgt, dass die Überlebens-Copulas von unteren Grenz-Schranken-Copulas obere Grenz-Schranken-Copulas sind. Die Clayton-Copula ist also eine obere Grenz-Schranken-Copula.

2.3.3 Grenzen von Schranken-Copulas in der Praxis

Schranken-Copulas und ihre Grenzen in mehr als zwei Dimensionen sind noch nicht ausführlich untersucht worden. Außerdem haben nicht-austauschbare bivariate Copulas meistens keine Grenzwerte. Daher liegt der praktische Nutzen der vorgestellten Ideen weitestgehend bei bivariaten Anwendungen, wobei Schranken bei ungefähr gleichen Quantilen gesetzt werden und eine symmetrische Abhängigkeitsstruktur angenommen wird.