Seminar: Versicherungsrisiko und Ruin - Weitere Nutzentheorie

Matthias Jonsson

Mathematisches Institut
der
Universität zu Köln

Sommersemester 2009

Prof.Dr. H. Schmidli
Dipl.Math. N. Scheer & Dipl.Math. J. Eisenberg

1 Einleitung (Wiederholung)

Wie bereits im Vortrag zur Nutzentheorie betrachten wir im folgenden ein Individuum (Person, Unternehmen), welches sich gegen gewisse Risiken versichern möchte. Dazu sei w (*wealth*) das anfängliche Vermögen des Individuums und X eine Zufallsvariable, die den von diesem Risiko ausgelösten Schaden beschreibt. Dazu gilt also $X \geq 0$.

Gegen diesen möglichen Verlust kann sich das Individuum mit einem Versicherungsvertrag absichern. Dieser ist gekennzeichnet durch die eine **Kompensationsfunktion** $r : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. Sie gibt an, in welcher Höhe der Versicherer insgesamt an dem Schaden X beteiligt wird. Er deckt also $r(X)$ des Schadens ab und der Versicherungsnehmer selber trägt den Rest $X - r(X)$ des Gesamtschadens. Man definiert dazu $s(x) = x - r(x)$ als die **Selbstversicherungsfunktion** oder auch **Franchise** genannt.

Für die Selbstversicherungsfunktion $r(X)$ gelte $0 \leq r(x) \leq x$, da einerseits der Versicherte bei einem Schaden entschädigt werden will und er sich andererseits durch einen Schaden nicht bereichern soll.

Dieser Versicherung steht natürlich auch eine Prämie π gegenüber, die vom Versicherungsnehmer an das Versicherungsunternehmen zu leisten ist. Damit ist ein Versicherungsvertrag (auch Police) charakterisiert durch $(\pi, r(x))$. Ein Individuum wird nach einer Periode immer den Betrag $Y = w - \pi - s(x)$ als Kapital haben.

Aus der bereits im letzten Vortrag eingeführten Diskussion leitet sich folgendes Konzept ab: Jedes Individuum hat bzgl. einer Geldmenge einen eigenen Wert, der über die **Nutzenfunktion** ausgedrückt wird. Diese Funktion wird beschrieben als

$u : I \to \mathbb{R}$, wobei I nicht einelementig sei. Das Entscheidungskriterium eines Versicherungsnehmers für Y_1 ist $\mathbb{E}[u(Y_1)] > \mathbb{E}[u(Y_2)]$.

Wichtige Eigenschaften dieser Nutzenfunktion sind:

1. $u(x)$ streng monoton steigend (höheres Vermögen impliziert höheren Nutzen).
2. Da alle von uns betrachteten Individuen **risikoavers** sind, muss die Funktion $y \mapsto u(y+h) - u(y)$ streng monoton fallend $\forall h > 0$ sein.
   (Beispiel: Ein Millionär nimmt einen Verlust von €500 kaum wahr, ein Student hingegen spürt diese €500 deutlich).

Erinnerung. Wichtige Nutzenfunktionen im Versicherungswesen sind die *quadratische*, die *exponentielle*, die *logarithmische* sowie die *fractional Power* Nutzenfunktionen.

Theorem 1. *Eine strengmonoton wachsende Funktion $u(y)$ ist eine Nutzenfunktion $\Leftrightarrow$ $u(y)$ ist streng konkav.*

2 Die Null-Nutzen-Prämie

Angenommen ein Versicherungsnehmer stehe nun vor der Entscheidung eine Versicherung $(\pi, r(X))$ abzuschließen oder nicht. Dann hat er bei Abschluss der Versicherung am Ende der Periode das Vermögen $w - \pi - s(X)$ bei Abschluss der Versicherung und das Vermögen $w - X$ bei Nichtabschluss der Versicherung. Er wird sich anhand des Erwartungsnutzenkriteriums für die Versicherung entscheiden, wenn

$$\underbrace{\mathbb{E}[u(w - \pi - s(X)]}_{(*)} \geq \mathbb{E}[u(w - X)].$$

(*) ist stetig und streng monoton fallend in π. Der größte Wert wird angenommen für $\pi = 0$. Für die untere Grenze existiert ein $\pi_r(w)$, sodass:

$$\mathbb{E}[u(w - \pi_r - s(X)] = \mathbb{E}[u(w - X)].$$

Die Prämie π_r ist hier die größte Prämie, die der Versicherungsnehmer bereit ist, für die Versicherung zu zahlen. Sie heißt die **Null-Nutzen-Prämie**. Diese ist in den meisten Fällen größer als die *faire Prämie*, welche dem Erwartungswert von $r(X)$ entspricht.

Theorem 2. *Wenn die Kompensationsfunktion $r(x)$ und der Selbstbehalt $s(x)$ beide steigend sind und $\mathbb{V}ar[r(X)] > 0$ dann $\pi_r(w) > \mathbb{E}[r(X)]$.*

Theorem 3. *Sei $r(x) = x$. Wenn die Risikoaversionsfunktion fallend (steigend) ist, dann ist die Null-Nutzen-Prämie $\pi(w)$ fallend (steigend).*

3 Optimale Versicherung

Betrachten wir nun ein Individuum, das mehrere Risiken, die wir mit $X_1, ..., X_n$ bezeichnen, trägt. Das Gesamtrisiko ist also $X = X_1 + ... + X_n$. Die Kompensationsfunktion ist demzufolge $r(X_1, ..., X_n)$ und die Selbstbehaltsfunktion $s(X_1, ..., X_n) = X - r(X_1, ..., X_n)$.

Definition 1. *Man nennt einen Versicherungsvertrag **global**, wenn $r(X_1, ..., X_n)$ und somit auch $s(X_1, ..., X_n)$ nur vom Gesamtrisiko X abhängen. Sonst nennt man den Vertrag **lokal**.*

Wir wollen jetzt zeigen, dass globale Versicherungsverträge optimal für das Individuum sind.

Theorem 4. ***(Pesonen-Ohlin)*** *Wenn die Prämie nur auf der reinen Nettoprämie basiert, dann existiert zu jedem lokalen Versicherungsvertrag ein globaler Vertrag mit gleicher Prämie, aber einem höheren Erwartungsnutzen.*

Bemerkung 1. *Pesonen-Ohlin besagt nicht, dass ein globaler Vertrag optimal ist, sondern, dass es reicht sich bei der Suche nach guten Verträgen auf die globalen zu beschränken.*

Theorem 5. ***(Arrow-Ohlin)*** *Angenommen die Prämie basiere nur auf der reinen Nettoprämie und sei $(\pi, r(x))$ ein Versicherungsvertrag mit $\mathbb{E}[r(X)] > 0$. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Selbstbeteiligung b, derart dass die Selbstbeteiligungsversicherung $r_b(x) = (x-b)^+$ die gleiche Prämie hat. Wenn außerdem $\mathbb{P}[r(X) \neq r_b(X)] > 0$, dann erwirtschaftet der Vertrag $(\pi, r_b(x))$ einen höheren Nutzen.*

4 Die Position des Versicherers

Wir betrachten jetzt, im Gegensatz zu vorher, die Position des Versicherers. Dazu bezeichnen wir mit $\mathbf{\bar{u}(x)}$ die Nutzenfunktion und $\bar{w}$ das Anfangskapital des Versicherers. Für den Versicherungsvertrag $(\pi, r(x))$ ist der Erwartungsnutzen $\mathbb{E}[\bar{u}(\bar{w}+\pi-r(X))]$ und der Nullnutzen $\bar{\pi}_r(\bar{w})$ des Versicherers ist die Lösung der Gleichung

$$\mathbb{E}[\bar{u}(\bar{w}+\bar{\pi}_r(\bar{w})-r(X))] = \bar{u}(\bar{w}).$$

Der Versicherer übernimmt ein Risiko genau dann, wenn $\pi \geq \bar{\pi}_r(\bar{w})$. Bei gleichem Erwartungsnutzen ist er trotzdem an dem Vertrag interessiert, da ohne diesen Vertrag auch die Chance auf dessen Gewinn entfallen würde.
Mit Jensen folgt außerdem:

$$\bar{u}(\bar{w}) = \mathbb{E}[\bar{u}(\bar{w}+\bar{\pi}_r(\bar{w})-r(X))] < \bar{u}(\bar{w}+\bar{\pi}_r(\bar{w})-\mathbb{E}[r(X)])$$

was $\bar{\pi}_r(\bar{w}) - \mathbb{E}[r(X)] > 0$ liefert.

Insgesamt lässt sich also schließen, dass ein Versicherungsvertrag $(\pi, r(x))$ genau dann zustande kommt, wenn $\bar{\pi}_r(\bar{w}) \leq \pi \leq \pi_r(w)$.

Analog zu Pesonen-Ohlin bevorzugt auch der Versicherer globale Versicherungsverträge. Ersetzt man in Arrow-Ohlin $s(x)$ durch $r(x)$, so folgt, dass der Versicherer, im Gegensatz zum Versicherten einen Erstrisiko-Selbstbehalt bevorzugt. Die Interessen von Versicherer und Versicherten sind also genau entgegengesetzt.

Betrachten wir nun Versicherungsformen, die die Interessen der Versicherten berücksichtigen. Solch ein Interesse ist z.B. dass mit größerem Schaden auch der Anteil des vom Versicherers steigt, damit das Risiko des Versicherten möglichst begrenzt bleibt.

Definition 2. *Eine Kompensationsfunktion $r(x)$ heißt* ***Vajda Kompensationsfunktion****, wenn $r(x)/x$ eine wachsende Funktion in x ist.*

Weil $r_b(x) = (x-b)^+$ eine Vajda Kompensationsfunktion ist, ist klar welches $r(x)$ der Versicherte wählen würde.

Theorem 6. *Anngenommen die Prämie basiere nur auf der reinen Nettoprämie. Für jeden Vajda-Versicherungsvertrag $(\pi, r(x))$ mit $\mathbb{E}[r(X)] > 0$ existiert ein proportionaler Versicherungsvertrag $r_k(x) = (1-k)x$ mit der gleichen Prämie. Außerdem, wenn $\mathbb{P}[r(X) \neq r_k(X)] > 0$ dann erwirtschaftet $(\pi, r_k(x))$ einen höheren Nutzen für den Versicherer.*

5 Pareto-Optimaler Risikoaustausch

Betrachte jetzt einen Markt mit n Individuen (Versicherte, Versicherer, Rückversicherer). Dann trägt jedes Individuum ein gewisses Risiko. Insgesamt sind das $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ Risiken. Mit Versicherungsverträgen werden diese einzelnen Risiken jetzt 'umverteilt'.

Definition 3. *Ein **Risikoaustausch** ist eine Funktion*

$$\boldsymbol{f} = (f_1, ..., f_n)^T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

so, dass

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Letztere Bedingung stellt hier sicher, dass das ganze Risiko gedeckt ist.

Der Risikoaustausch bedeutet also, dass jedes Individuum i nach dem Risikoaustausch das Risiko $f_i(\mathbf{X})$ deckt. Jedes Indiviuum hat nun ein Kapital w_i und eine Nutzenfunktion $u_i(x)$. Der erwartete Endnutzen jedes Einzelnen ist $V_i(\mathbf{f}) = \mathbb{E}[u_i(w_i - f_i(\mathbf{X}))]$. Da natürlich die Interessen der einzelnen Individuen gegensätzlich sind, gibt es keinen Risikoaustausch f, der optimal für alle Individuen ist. Allerdings wird jeder einem bestimmten Risikoaustausch $\mathbf{f}$ zustimmen, wenn $V_i(\mathbf{f}) \geq \mathbb{E}[u_i(w_i - X_i)]$. Aufgrund dessen basiert jeder Risikoaustausch auf Verhandlungen.

Definition 4. *Ein Risikoaustausch bzw. Risikotransfer $\boldsymbol{f}$ heißt **Pareto-optimal**, wenn für alle Risikotransfers $\tilde{\boldsymbol{f}}$ mit*

$$V_i(\boldsymbol{f}) \leq V_i(\tilde{\boldsymbol{f}}) \quad \text{folgt, dass } V_i(\boldsymbol{f}) = V_i(\tilde{\boldsymbol{f}}) \quad \forall i.$$

Für einen nicht pareto-optimalen Risikoaustausch f existiert immer ein anderer Risikoaustausch $\tilde{f}$, der für alle Individuen mindestens genauso gut und für mindestens ein Individuum besser ist. Daher reicht es für Verhandlungen aus, sich auf die Pareto-optimalen Risikoaustausche zu beschränken.
Allerdings ist dieses Konzept ein rein theoretisches, da in der Realität meist weder die eigene noch die Nutzenfunktion anderer Individuen bekannt ist.

Die Frage, ob ein bestimmter Risikoaustausch Pareto-optimal ist, scheint auf den ersten Blick schwer zu beantworten. Abhilfe liefert folgendes Kriterium.

Theorem 7. ***(Borch/du Mouchel)*** *Angenommen, die Nutzenfunktionen $u_i(x)$ seien differentierbar. Ein Risikoaustausch $\boldsymbol{f}$ ist Pareto-optimal dann und nur dann, wenn eine Zahl θ_i existiert, sodass fast sicher*

$$u_i'(w_i - f_i(\boldsymbol{X})) = \theta_i u_1'(w_1 - f_1(\boldsymbol{X})).$$

Um also einen Pareto-optimalen Risikoaustausch zu finden, reicht es die obige Gleichung zu lösen.
Man bemerke, dass für Pareto-Optimalität nur die Verteilung von $\mathbf{X}$ einen Einfluss hat. Man kann also Pareto-Optimalität bekommen, ohne nach der Risikoverteilung oder den Abhängigkeiten unter den Einzelrisiken suchen zu müssen.

Bemerkung 2. *Beachte, dass notwendigerweise $\theta_1 = 1$ und $\theta_i > 0$ weil $u_i(x) > 0$. Beachte außerdem, dass wir auch Vergleiche mit dem Individuum j anstatt mit dem Individuum 1 machen können. Dazu müssen wir nur θ_i durch θ_j dividieren. Zum Beispiel würde θ_1 durch θ_j^{-1} ersetzt.*

Durch lösen des expliziten Problems für einen Pareto-optimalen Risikoaustausch bekommen wir folgende Aussage:

Theorem 8. *Ein Pareto-optimaler Risikoaustausch ist ein Pool, in den jedes Individuum seinen Anteil beisteuert, der nur auf dem gesamten Schaden der Gruppe basiert. Darüber hinaus muss jedes Individuum einen Anteil eines Anstiegs des Gesamtverlustes des Kollektivs decken. Wenn alle Nutzenfunktionen differenzierbar sind, dann sind alle einzelnen Anteile stetige Funktionen, abhängig vom Totalverlust.*