Zinsratenmodelle in stetiger Zeit: Teil I

Jasmin Bahlo

---

1. Ein-Faktor-Modelle für den risikolosen Zinssatz

Ziel: Ein-Faktor-Modelle für die Laufzeitstruktur der Zinsraten in einem stetigen Zeitraum

Wir wollen überlegen, wie man für Bonds die Preise setzt, wenn ein Ein-Faktor-Diffusionsmodell für den risikolosen Zinssatz r(t) gegeben ist, d.h. wir nehmen dafür an, dass r(t) ein Itô-Prozess ist.
Die Annäherung an die Bondpreise erfolgt über verschiedene Modelle, die uns erlauben, den Abstand zu überbrücken zwischen der gegebenen stochastischen Differentialgleichung für r(t) und einer Reihe von Preisdynamiken, die gerade keine Arbitrage zulassen.

Allgemein:

Es gibt drei Hauptmerkmale, die für die Entwicklung eines Laufzeitstrukturmodells wünschenswert sind:

i. Positive Zinsraten
ii. r(t) autoregressiv
iii. Einfache Formel für die Preisbildung .

Im Gegensatz zu den ersten beiden Punkten, stellt der letzte Punkt eine rechenbetonte Annehmlichkeit dar und kein ökonomisches Prinzip.
Die Existenz einer eleganten Formel beweist nicht den Wert von einem Modell.

Weitere wünschenswerte Eigenschaften eines Modells für die Laufzeitstruktur implizieren folgende Fragen:

- Sind Preise der Bonds und Derivaten eindeutig und numerisch leicht zu berechnen?
- Ist das Modell flexibel genug, um mit den neuen immer komplexeren Derivaten fertig zu werden?
- Ist das Modell ein Equilibrium?

2. Der Martingalansatz

Wir betrachten im Folgenden ein Laufzeitstrukturmodell mit einer 1-dimensionalen Standard Brownschen Bewegung (BB) unter dem natürlichen Weltmaß P als die einzige Quelle der Zufälligkeit.

Uns ist gegeben:

- risikoloser Zinssatz r(t)
- Preis P(t,T) eines Zerobonds zur Zeit t mit Fälligkeit T
- SDGL: $\mathbf{dr(t) = a(t)dt + b(t)dW(t)}$ (1)

$$\mathbf{dP(t,T) = P(t,T)[m(t,T)dt + S(t,T)dW(t)]}. \qquad (2)$$

Wobei

- a(t), b(t) previsible Prozesse
- $\{W_t\}$ *Standard Brownsche Bewegung* unter dem Maß *P* mit Filtration $\mathcal{F}_t = \sigma(\{W(s) : s \le t\})$
- S(t,T) : *Volatilität* von P(t,T)
- m(t,T) : *Risikoprämie*
- *Risikomarktpreis* $\gamma(t)$: previsibler Prozess mit

  $$\boldsymbol{\gamma}\mathbf{(t) = \frac{m(t,T) - r(t)}{S(t,T)}}$$

- B(t): *Bankkontoprozess* mit SDGL:

  $$\mathbf{dB(t) = r(t)B(t)dt}$$

  $$\mathbf{B(t) = B(0)\exp\left(\int_0^t r(u)du\right)}$$

Wir betrachten nun ein Zinsderivat, das einen Betrag X_S zu einem Zeitpunkt $S < T$ entrichtet (X_S ist $\mathcal{F}_S$ - messbar)

Frage: *„Was ist der faire (arbitragefreie) Preis V(t), zur Zeit $t < S$ für diesen Kontrakt, wenn uns die Gleichungen (1) und (2) gegeben sind?“*

Auf diese Frage gibt der folgende Satz Antwort:

Satz Es existiert ein zu P äquivalentes Maß Q mit

$$V(t)= E_Q\left[\exp\left(-\int_t^S r(u)du \right) X_S \mid \mathcal{F}_t \right]$$

mit $dr(t) = ((a(t) - \gamma(t))dt + b(t)d\widetilde{W}(t)$

und $\widetilde{W}(t)$ ist eine Standard B.B. unter dem Maß Q

Die Eindeutigkeit von V(t) geht dabei aus folgenden Punkten hervor:

- Wir betrachten ein Ein-Faktor-Modell
- Insbesondere: Die Verwendung Brownscher Bewegungen garantiert, dass wir einen vollständigen Markt haben.

Korollar Für alle Zeitpunkte S mit $0 < S < T$ gilt:

$$P(t,S) = E_Q\left[\exp\left(-\int_t^S r(u)du \right) \mid \mathcal{F}_t \right]$$

Definition Der erwartete Überschuss der Wachstumsrate von Wertpapieren oder Derivaten unter dem Maß Π wird *Marktrisikoprämie* oder einfach *Risikoprämie* genannt.

Zur Herleitung:

$$\begin{aligned} dV(t) &= \phi(t)dP(t,T) + \psi(t)dB(t) \\ &= [\phi(t)P(t,T) + \psi(t)B(t)]r(t)dt + \phi(t)P(t,T)S(t,T)d\widetilde{W}(t) \\ &= V(t)[r(t)dt + \sigma_V(t)d\widetilde{W}(t)] \end{aligned}$$

mit $V(t)\sigma_V(t) = \phi(t)P(t,T)S(t,T)$

Betrachte nun die Preisdynamik unter dem Maß P:

$$\begin{aligned} dV(t) &= V(t)[r(t)dt + \sigma_V(t)(dW(t) + \gamma(t)dt)] \\ &= V(t)[(r(t) + \gamma(t)\sigma_V(t))dt + \sigma_V(t)dW(t)] \end{aligned}$$

$\Rightarrow \gamma(t)\sigma_V(t)$ *entspricht der Risikoprämie.*

3. Ansatz über Partielle Differentialgleichungen (PDGL)

Die generellen Prinzipien bei diesem Ansatz lauten:

a) r(t) ist Markov-Prozess
b) Preise P(t,T) sind abhängig von einer Abschätzung zur Zeit t , um wieviel r(s) zwischen t und T schwanken wird
c) Der Markt ist effizient, ohne Transaktionskosten und die Investoren handeln rational.

*Die Punkte a) und b) sicher*n *uns:*

$$\begin{aligned} \mathbf{a(t)} &\equiv \mathbf{a(t, r(t))} \\ \mathbf{b(t)} &\equiv \mathbf{b(t, r(t))} \\ \mathbf{P(t,T)} &\equiv \mathbf{P(t,T,r(t))} \end{aligned}$$

D.h. unter einem Ein-Faktor-Modell sind die Preisänderungen aller Bonds mit verschiedenen Fälligkeiten korreliert (insbesondere nicht linear).

Neue Überlegungen für P(t,T,r(t)) unter Verwendung der Itô-Formel:

$$\begin{aligned} dP(t,T,r(t)) &= \frac{\partial P}{\partial t}dt + \frac{\partial P}{\partial r}dr + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}d\langle r\rangle(t) \\ &= \left[\frac{\partial P}{\partial t}dt + a\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\right]dt + b\frac{\partial P}{\partial r}dW(t) \end{aligned}$$

Wissen: $dP(t,T,r) = P(t,T,r)\left[m(t,T,r)dt + S(t,T,r)dW(t)\right]$

$$\Rightarrow m(t,T,r) = \frac{1}{P}\left[\frac{\partial P}{\partial t}dt + a\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\right] \tag{3}$$

$$S(t,T,r) = \frac{1}{P}b\frac{\partial P}{\partial r} \tag{4}$$

Herleitung des resultierenden Risikomarktpreises:

- Betrachte dafür zwei Bonds mit Auslaufzeiten T_1, T_2
- Zum Zeitpunkt t halte insgesamt

  -$V_1(t)$ Beträge von Bond 1 *(short position)*

  $V_2(t)$ Beträge von Bond 2 (*long position)*

$\Rightarrow$ *Gesamtvermögen:* $V(t) = V_2(t) - V_1(t)$

Damit erhält man als aktuellen Kapitalgewinn von t nach t+dt :

$$\begin{aligned} dV(t) &= -\frac{V_1(t)}{P_1(t,T_1)}dP(t,T_1) + \frac{V_2(t)}{P(t,T_2)}dP(t,T_2) \\ &= -V_1(m_1dt + S_1dW) + V_2(m_2dt + S_2dW) \\ &= (V_2m_2 - V_1m_1)dt + (V_2S_2 - V_1S_1)dW \end{aligned}$$

mit
$$\begin{aligned} m_i &= m(t,T_i,r) \\ S_i &= S(t,T_i,r) \quad \text{für } i = 1,2 \end{aligned}$$

Voraussetzung: $\dfrac{V_1(t)}{V_2(t)} = \dfrac{S(t,T_2,r)}{S(t,T_1,r)} = \dfrac{S_2}{S_1} \quad \forall\, t < T_i\ ,\ i = 1,2$

$$\Rightarrow V_2S_2 - V_1S_1 = 0$$

$$\Rightarrow V_2 m_2 - V_1 m_1 = \frac{S_1 V}{S_1 - S_2} m_2 - \frac{S_2 V}{S_1 - S_2} m_1$$

$$\Rightarrow \qquad dV = V\left(\frac{S_1 m_1 - S_2 m_2}{S_1 - S_2}\right) dt$$

D.h. durch die Wahl der Portfoliostrategie erhalten wir eine risikolose Investitionsstrategie.

Da wir ein risikoloses Portfolio haben, gibt uns der Grundsatz der Arbitragefreiheit vor:

$$\frac{S_1 m_1 - S_2 m_2}{S_1 - S_2} = r(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m_1 - r}{S_1} = \frac{m_2 - r}{S_2}$$

Dies muss für alle Fälligkeiten gelten:

$\dfrac{m(t,T,r(t)) - r(t)}{S(t,T,r(t))} = \gamma(t,r(t))$ → entspricht dem *Risikomarktpreis*

Wir haben also: $\mathbf{m(t,T,r) = r(t) + \gamma(t,r)S(t,T,r)}$

und erhalten mit (3), (4):

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{t}} + (\mathbf{a} - \mathbf{b} \cdot \gamma)\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{b}^2 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial \mathbf{r}^2} - \mathbf{r} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{0}$$

→ *Feynman-Kac-Formel*:

$f(t,r) = a(t,r) - \gamma(t,r)b(t,r)$

$\rho(t,r) = b(t,r)$

$R(r) = r$

$h(t,r) = 0$

Randbedingung dieser PDGL: $P(T,T,r) = 1 = \psi(1)$

Nach dem Feynman-Kac-Theorem existiert somit ein passender Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, F, Q).

Als Lösung der PDGL erhalten wir:

$$P(t,T,r(t)) = E_Q\left[\exp\left(-\int_t^T \tilde{r}(s)ds\right) \mid \mathcal{F}_t\right]$$

Dabei ist $\tilde{r}(s)\,(t \le s \le T)$ *ein Markov-Prozess, insbesondere Diffusionsprozess, mit* $\tilde{r}(t) = r(t)$ *,*

$d\tilde{r}(u) = f(u,\tilde{r}(u))du + \rho(u,\tilde{r}(u))d\tilde{W}(u)$ *und* $\tilde{W}(t)$ *ist Standard BB unter dem Maß Q.*

Beh.: *Die Maße P und Q sind äquivalente Maße über den gesamten Zeitraum*

Beweis:

- Voraussetzung: $\gamma(s,r(s))$ erfüllt *Novikov-Bedingung*
- Definiere $\tilde{W}(t) = W(t) + \int_0^t \gamma(s,r(s))ds$

$\Rightarrow$ *Nach dem Satz von Girsanov existiert ein zu P äquivalentes Maß Q, unter dem* $\tilde{W}(t)$ *eine Standard BB ist* (*für* $0 \le t \le T$) *mit Radon-Nikodým-Ableitung*

$$\frac{dQ}{dP} = \exp\left[-\int^T \gamma(t,r(t))dW(t) - \frac{1}{2}\int_0^T \gamma(t,r(t))^2\,dt\right]$$

$\Rightarrow$ *Beh.*

Damit erhält man für die Preisdynamik unter dem Maß Q:

$$\begin{aligned}
\mathbf{dP(t,T,r)} &= \mathbf{P(t,T,r)(m(t,T,r)dt + S(t,T,r)dW(t))} \\
&= \mathbf{P(t,T,r)\left[m(t,T,r)dt + S(t,T,r)(d\tilde{W}(t) - \gamma(t,r)dt)\right]} \\
&= \mathbf{P(t,T,r)\left[(m(t,T,r) - \gamma(t,T)S(t,T,r))dt + S(t,T,r)d\tilde{W}(t)\right]} \\
&= \mathbf{P(t,T,r)(r(t)dt + S(t,T,r)d\tilde{W}(t))}
\end{aligned}$$

Offensichtlich entspricht der erwartete Ertrag von jedem Bond genau dem risikolosen Zinssatz.

Daher stellt Q das risikoneutrale Maß dar.

4. Abschließende Bemerkungen

Die Resultate wurden entwickelt, indem zuerst die Modelldynamik unter dem natürlichen Maß P bestimmt wurde. Danach erfolgte die Übertragung auf das äquivalente Maß Q.
In der Praxis beginnen die Modellierer direkt mit der Bestimmung der Dynamik unter Q.
Dieses Maß liefert einem direkt die bestimmte relevante Preisformel, für die wir die Paramater kennen.
Kenntnisse über die Dynamik unter P sind nicht immer erforderlich, aber falls sie vorhanden sind, kann $\gamma(t)$ eingeführt werden.
Falls dieser Ansatz benutzt wird, müssen die Modellierer sicher sein, dass $\gamma(t)$ die Novikov-Bedingung erfüllt.