<u>*Zinsratenmodelle in stetiger Zeit: Teil II*</u>

Simone Foltyn

21.11.2006

<u>1. Vasicek Modell (1977)</u>

<u>1.1 Einführung</u>

Vasicek schlug das folgende Modell für die risikofreie Zinsrate r(t) vor, basierend auf der SDGL

$$d\,r(t) = \alpha(\mu - r(t))\,d\,t + \sigma\,d\,\tilde{W}(t).$$

$\tilde{W}(t)$ ist die Standard Brownsche Bewegung unter dem risikoneutralen Maß Q und

$\alpha, \mu, \sigma > 0$

Es ist auch unter dem Namen *Ornstein Uhlenbeck Prozess* bekannt.

Das Schlüsselmerkmal ist die *Mean-Reversion* (mittlere Umkehrung) Struktur:
D.h der Prozess hat jederzeit die Tendenz, einen mittleren Wert anzustreben.

Bedeutung der Konstanten:

- μ langristig erwartete risikofreie Rate
- σ lokale Volatilität
- α mean reversion speed

<u>Bemerkung:</u>

Für s > 0 ist r(t+s) gegeben durch r(t) ~$\mathcal{N}$ ($\mu(1 - e^{-\alpha s})$ r(t) $e^{-\alpha s}$, $\frac{\sigma^2}{2\alpha}$ $(1 - e^{-\alpha s})$)

Die Standardabweichung ist

$$\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha s})}$$

und für S →∞ erhalten wir die langfristige Standardabweichung: $\frac{\sigma}{\sqrt{2\alpha}}$

<u>1.1 Bond - und Optionspreise</u>

<u>Bemerkung:</u>

Man nennt eine Funktion P(t,T) eine *affine Funktion*, wenn sie von der Form
P(t,T) = exp [A(t,T) - B(t,T) X(t)] ist.

<u>Theorem 1:</u>

(a) Preise für Zerobonds sind durch die folgende Formel gegeben:

P(t,T) = exp [A(t,T) – B(t,T) r(t)]

wobei gilt:

$$B(t,T)=\frac{(1-e^{-\alpha(T-t)})}{\alpha}$$

$$A(t,T)=(B(t,T)-(T-t))(\mu-\frac{\sigma^2}{2\alpha^2})-\frac{\sigma^2}{4\alpha}B(t,T)^2$$

(b) Der Preis einer europäischen Call Option mit einem Zerobond als Underlying (fällig zum Zeitpunkt S) und Ausübungspreis K zum Ausübungszeitpunkt T (T<S) ist:

V(t) = P(t,S) Φ (d_1) – K P(t,T) Φ (d_2)

wobei gilt:

Φ (z) ist die kumulative Verteilungsfunktion einer standardnormalverteilten Zufallsvariable

$$\sigma_p=\frac{\sigma}{\alpha}\cdot(1-e^{-\alpha(S-T)})\cdot\sqrt{\frac{(1-e^{-2\alpha(T-t)})}{2\alpha}}$$

$$d_1=\frac{1}{\sigma_p}\cdot\log(\frac{(P(t,S))}{(K\cdot P(t,T))})+\frac{\sigma_p}{2}$$

$$d_2=d_1-\sigma_p$$

2. Das Cox- Ingersoll- Ross Modell (1985)

2.1 Einführung

Cox, Ingersoll und Ross schlugen das folgende Modell für die risikofreie Zinsrate r(t) vor, basierend auf der SDGL:

$$d\,r(t)=\alpha(\mu-r(t))\,d\,t+\sigma\sqrt{r(t)}\,d\,\tilde{W}(t)$$

$\tilde{W}(t)$ ist die Standard Brownsche Bewegung unter dem risikoneutralen Maß Q und

α, μ, σ > 0

In dem nächsten Theorem werden die Eigenschaften des Cox – Ingersoll – Ross Modells angegeben.

Zuvor muss man die *(nichtzentrale) Chi-Quadrat Verteilung* einführen:

Definition:

Seien $Z_1, ..., Z_n$ standardnormalverteilte Zufallsvariablen.

Dann gilt: $\sum_{i=1}^{n} Z_i^2$ ~ χ^2(n) mit n Freiheitsgraden.

Die Dichtefunktion ist:

$$f(x)=\frac{(x^{\frac{n}{2}-1}e^{\frac{-x}{2}})}{(2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2}))} \text{ für } x>0,\ f(x)=0 \text{ für } x\leq 0,$$ Γ(z) ist die Gammafunktion

Seien Z_1, ..., Z_n normalverteilte Zufallsvariablen, die Erwartungswert μ_i und Varianz 1 haben.

Gegeben sind zwei Parameter: n und der Nichtszentralitätsparameter λ > 0, wobei $\lambda=\sum_{i=1}^{n}\mu_i^2$

Dann gilt: $\sum_{i=1}^{n} Z_i^2$ ~ χ^2(n, λ).

Die Dichtefunktion ist:

$$f(x)=\frac{(\exp(\frac{-1}{2}(x+\lambda)))}{2^{\frac{n}{2}}}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{(x^{\frac{n}{2}+j-1}\lambda^j)}{(2^{2j}\Gamma(\frac{n}{2}+j)\,j!)}\right) \text{ für } x\geq 0,\ f(x)=0 \text{ für } x<0.$$

<u>Theorem 2:</u>

(a) Die Laplace Transformation nimmt die affine Form

P_L (t, T, r, ν, ω) = E_Q [$\exp(-\nu\int_t^T r(s)\,ds-\omega r(T))$ | r(t) = r].

= exp [A (t, T, ν, ω) – B (t, T, ν, ω) r],

an, wobei gilt:

$$A(t, T, \nu, \omega) = \frac{2\alpha\mu}{\sigma^2} \log\left(\frac{(2\gamma(\nu)e^{(\gamma(\nu)+\alpha)(T-t)/2})}{((\sigma^2\omega+\gamma(\nu)+\alpha)(e^{\gamma(\nu)(T-t)}-1)+2\gamma(\nu))}\right)$$

$$\gamma(\nu) = \sqrt{\alpha^2+2\sigma^2\nu}$$

$$B(t, T, \nu, \omega) = \frac{(\omega(2\gamma(\nu)+(\gamma(\nu)-\alpha)(e^{\gamma(\nu)(T-t)}-1))+2\nu(e^{\gamma(\nu)(T-t)}-1))}{((\sigma^2\omega+\gamma(\nu)+\alpha)(e^{\gamma(\nu)(T-t)}-1)+2\gamma(\nu))}$$

(b) Wählt man ν = 1 und ω = 0 erhält man den Preis des Zerobonds:

$$P(t, T, r) = \exp[\bar{A}(T-t)-\bar{B}(T-t)r] \ ,$$

wobei gilt:

$$\bar{A}(\tau)=\frac{2\alpha\mu}{\sigma^2} \log\left(\frac{(2\gamma e^{(\gamma+\alpha)\tau/2})}{((\gamma+\alpha)(e^{\gamma\tau}-1)+2\gamma)}\right)$$

$$\gamma = \sqrt{\alpha^2+2\sigma^2}$$

$$\bar{B}(\tau) = \frac{(2(e^{\gamma\tau}-1))}{((\gamma+\alpha)(e^{\gamma\tau}-1)+2\gamma)}$$

(c) Gegeben r(0) = r , hat r(T)/ k_Q eine Nichtzentrale Chi - Quadrat Verteilung unter Q mit d = $\alpha\mu/\sigma^2$ Freiheitsgraden und Nichtzentralitätsparameter λ_Q, wobei gilt:

$$\lambda_Q = \frac{(4\alpha r(0))}{(\sigma^2(e^{\alpha T}-1))} \quad \text{und} \quad k_Q = \frac{(\sigma^2(1-e^{-\alpha T}))}{4\alpha}$$

(d) Gegeben r(0) = r > 0 , sei U = inf {t : r (t) ≤ 0} (wobei inf Ø = ∞).
Dann gilt: $2\alpha\mu \geq \sigma^2$ => Pr (U = ∞) = 1 und $2\alpha\mu < \sigma^2$ => Pr (U < ∞) = 1

(e) Sei C der Preis zum Zeitpunkt 0 einer europäischen Call Option auf Zerobonds mit Fälligkeit U = T + τ, einem Ausübungsdatum T und einem Ausübungspreis K.
Gegeben r(0) = r, gilt:

$$C = P(0, T+\tau, r)\,\chi^2(d, \lambda_1; y_1) - K\,P(0, T, r)\,\chi^2(d, \lambda_2; y_2),$$

wobei $\chi^2(d, \lambda; y)$ die kumulative Verteilungsfunktion der Nichtzentralen Chi-Quadrat Verteilung ist mit d Freiheitsgraden und Nichtzentralitätsparameter λ.
Die Inputs sind wie folgt berechnet:

$$d = \frac{(4\alpha\mu)}{\sigma^2},$$

$$\gamma = \sqrt{\alpha^2 + 2\sigma^2},$$

$$\lambda_1 = \frac{(8\gamma^2 e^{\gamma T} r)}{(\sigma^2(e^{\gamma T}-1)(2\gamma+(\gamma+\alpha+\sigma^2\bar{B}(U-T))(e^{\gamma T}-1)))},$$

$$\lambda_2 = \frac{(8\gamma^2 e^{\gamma T} r)}{(\sigma^2(e^{\gamma T}-1)(2\gamma+(\gamma+\alpha)(e^{\gamma T}-1)))},$$

$$k_1 = \frac{(\sigma^2(e^{\gamma T}-1))}{(2(2\gamma+(\gamma+\alpha+\sigma^2\bar{B}(U-T))(e^{\gamma T}-1)))},$$

$$k_2 = \frac{(\sigma^2(e^{\gamma T}-1))}{(2(2\gamma+(\gamma+\alpha)(e^{\gamma T}-1)))},$$

$$r^* = \frac{(\bar{A}(U-T)-\log K)}{(\bar{B}(U-T))},$$

$y_1 = r^* / k_1,$
$y_2 = r^* / k_2$

2.2 Der Multidimensionale Ornstein- Uhlenbeck Prozess

Seien X_1 (t), X_2 (t), ..., X_n (t) n unabhängige Ornstein – Uhlenbeck Prozesse mit

$$d X_i(t) = -\tfrac{1}{2}\, \alpha X_i(t)\, dt + \sqrt{\alpha}\, d W_i(t).$$

Wir wissen bereits, dass $X_i(t) \sim \mathcal{N}(X_i(0)\, e^{-\alpha t/2}, 1 - e^{-\alpha t})$
Betrachten wir den Vektor $X(t) = (X_1(t), \ldots, X_n(t))'$.
Der Quadrat Radius von diesem Vektor Prozess ist

$$R(t) = \sum_{i=1}^{n} X_i(t)^2 \qquad (1)$$

Dann gilt

$$d R(t) = \sum_{i=1}^{n} (2X_i(t)\, dX_i(t) + d\langle X_i\rangle(t))$$

$$= -\alpha \sum_{i=1}^{n} X_i(t)^2\, dt + 2\sum_{i=1}^{n} X_i(t)\sqrt{\alpha}\, dW_i(t) + n\alpha\, dt$$

$$= \alpha(n - R(t))\, dt + \sqrt{4\alpha R(t)}\, d\tilde{W}(t)$$

Wenn wir $\theta = 4\alpha/\sigma^2$ und $n = 4\alpha\mu/\sigma^2$ wählen, erhalten wir

$$r(t) = R(t) / \theta \qquad (2)$$

Bemerkung:
Betrachte Gleichungen (1) und (2).

- Da alle $X_i(t)$ mit der selben identischen Varianz normalverteilt sind, sehen wir, dass $R(t) / [1 - e^{-\alpha t}]$ Nichtzentral Chi Quadrat verteilt ist mit n Freiheitsgraden und Nichtzentralitätsparameter $\lambda = 4\alpha r(0) / [\sigma^2 (e^{\alpha t} - 1)]$.

- Für $n = 4\alpha\mu/\sigma^2$ ganzzahlig hat $4\alpha r(t)/\sigma^2 (1 - e^{-\alpha t})$ eine Nichtzentrale Chi Quadrat Verteilung mit $\lambda = 4\alpha r(0)/\sigma^2 (e^{\alpha t} - 1)$

3. Vergleich zwischen dem Vasicek und dem CIR Modell

Wir haben nun Unterschiede und Gemeinsamkeiten der beiden Modelle herausgefunden.
Der Prozeß der risikofreien Zinsrate r(t) hat zum Beispiel den gleichen Driftterm $\alpha(\mu - r(t))$, aber sie haben verschiedene Volatilitätsfunktionen σ und $\sigma \sqrt{r(t)}$
Zusätzlich wird die Parameterwahl unterschiedlich sein.

Aus mathematischer qualitativer Sicht sind das zwei ganz unterschiedliche Modelle, die eine separate Analyse verdienen.
Es stellt sich aber die Frage, ob die Modelle Resultate liefern, die aus quantitativer Sicht bedeutsam unterschiedlich sind.

In der folgenden Tabelle sind Beispielparameterwerte, die wir beim Vergleich der beiden Modelle verwenden werden:

Modell	α	μ	σ
Vasicek	0,06	0,25	0,02
CIR	0,06015	0,232	0,082

3.1 Forward Rate Kurve

- die Volatilität von r(t) unter dem CIR Modell approximiert die Volatilität unter dem Vasicek Modell, wenn $r(t) = \mu_{CIR}$; $\sigma_{CIR} \sqrt{\mu_{CIR}} \approx \sigma_{VAS}$

- Die Grenzforward Raten sind unter dem Vasicek Modell: $\mu - \sigma^2 / 2\alpha^2$
  und unter dem CIR Modell: $\mu\alpha (\gamma - \alpha) / \sigma^2$ mit $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + 2\sigma^2}$
  Die Parameter sind so gewählt, dass die Grenzraten gleich sind.

- α wurde so gewählt, dass die Form der Forward Rate Kurven beider Modelle in den Anfangswerten gleich sind.

Man stellt fest, dass der Unterschied der beiden Forward Rates Kurven für verschiedene Anfangswerte r(0) jeweils sehr gering (weniger als 0,1%) ist und sich die Grenzraten aufgrund der Parameterwahl entsprechen. Die Modelle liefern hier also gleiche Resultate.

3.1 Optionspreise

Generelle Beobachtungen:

- Der Preis fällt, wenn K steigt
- steigt r(0) von 0,02 zu 0,15 dann fällt der Preis der Option

Vergleiche:

- für einige Werte von r(0) und K sind die beiden Modelle sehr ähnlich
- das Vasicek Modell hat beinahe immer wesentlich höhere Call Optionspreise für hohe K
- für r(0) = 0,02 sind die Preise des Vasicek Modells generell höher als die des CIR Modells, für r(0) = 0,15 sind sie eher niedriger

Ausblick:

Zwei weitere Modelle wurde von Ho und Lee (1986) und Hull und White (1990) erforscht, die zu dem Merton bzw. Vasicek Modell korrespondieren.
Diese Modelle werden in den nächsten Vorträgen untersucht. In beiden Fällen können analytische Lösungen für Bond und Option Preise gefunden werden.