Eine wahrscheinlichkeitstheoretische Untersuchung der KPP-Gleichung

Wissenschaftlicher Vortrag am 9.11.01
im Rahmen des Habilitationsverfahrens
von Peter Mörters, Kaiserslautern und Bath

1 Einleitung

Es ist wohlbekannt, daß bei der Untersuchung vieler wahrscheinlichkeitstheoretischer Modelle die Analysis eine wichtige Rolle spielt. In diesem Vortrag möchte ich einige Möglichkeiten andeuten, diese Beziehung umzukehren und wahrscheinlichkeitstheoretische Methoden beim Studium eines analytischen Problems einzusetzen.

Das analytische Problem, das ich gleich vorstellen möchte, ist für eine wahrscheinlichkeitstheoretische Untersuchung besonders geeignet, aber in der Tat seit vielen Jahren (mit analytischen Methoden) gelöst. Es gibt auch schon seit vielen Jahren Lösungen, die mit wahrscheinlichkeitstheoretischen Argumenten (räumliche Verzweigungsprozesse, Martingaltheorie, stochastische Analysis, große Abweichungen) arbeiten. Die Analyse mit *ausschließlich* wahrscheinlichkeitstheoretischen Methoden ist aber neu (Harris 1999), die aktuelle Herausforderung besteht darin, diese Methoden auf ähnliche Probleme anzuwenden, die bisher analytisch nicht zugänglich sind.

2 Die KPP-Gleichung

Zur Motivation der Gleichung, betrachte eine Population in einem linearen Lebensraum (etwa eine Küstenlinie), die dort mit etwa gleicher Dichte lebt. Wenn irgendwo in diesem Lebensraum eine Mutation auftritt, die die Überlebenschancen verbessert, so erwarten wir, daß das Vorkommen der mutierten Gene sich auf Kosten der nichtmutierten Gene vermehrt.

Ein einfaches Modell wurde von Fisher (1937) und Kolmogorov, Petrovskii und Piskounov (1937) vorgeschlagen. Sei $u(t,x) \in [0,1]$ der Anteil nichtmutierter Gene in x zur Zeit t, so gilt

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ru(u-1), \tag{1}$$

wobei r ein Faktor ist, der die Intensität der Selektion zugunsten des mutierten Gens mißt. Mit Hilfe der Gleichung möchte man feststellen, wie schnell sich das mutierte Gen verbreitet.

Betrachtet man die Gleichung für den Anfangswert $f(x) = 1_{\{x>0\}}$, so zeigen Kolmogorov, Petrovskii und Piskounov (1937), daß für die Lösung u gilt

$$\lim_{t\to\infty} u(t, x + m(t)) = w(x),$$

wobei $m(t)$ der Median von $u(\,\cdot\,, x)$ ist. Der Grenzwert ist eine (monotone) *Wellenlösung mit Geschwindigkeit* $c = \sqrt{2r}$, das heißt

- $(t,x) \mapsto w(x-ct)$ löst die KPP-Gleichung (1), mit anderen Worten
$$\tfrac{1}{2}\, w'' + cw' + rw(w-1) = 0.$$
- $w : \mathbf{R} \to [0,1]$ ist streng monoton wachsend mit $\lim_{x\to\infty} w(x) = 1$ und $\lim_{x\to-\infty} w(x) = 0$.

Die Fragen, die sich stellen, sind:

- Für welche Geschwindigkeiten c existiert eine Wellenlösung?
- Falls sie existiert, ist sie eindeutig?

Kolmogorov, Petrovskii und Piskounov (1937) geben folgende Antwort.

Satz 2.1 *Wellenlösungen existieren nicht, wenn $c < \sqrt{2r}$. Zu jeder Geschwindigkeit $c \geq \sqrt{2r}$ existiert bis auf Verschiebung genau eine Wellenlösung.*

3 Wahrscheinlichkeitstheoretische Untersuchung

Der wahrscheinlichkeitstheoretische Zugang zur KPP-Gleichung wurde ausgehend von McKean (1975) vielfach untersucht, etwa von Bramson (1983), Neveu (1987) und Elworthy et al (1994). Die Frage der *Eindeutigkeit von Wellenlösungen* ist erst unlängst von Harris (1999) mit wahrscheinlichkeitstheoretischen Mitteln gelöst worden. Wir wollen uns also auf diesen Teil des Problems konzentrieren.

3.1 Eine Ein-Teilchen-Methode

Der wesentliche Schritt für die Eindeutigkeit der Wellenlösungen w besteht darin, das Abklingverhalten von $1 - w(x)$ für große x zu beschreiben. Dieses Problem löst Harris (1999) mit einem *Ein-Teilchen*-Argument, einer sehr eleganten Anwendung der Feynman-Kac Formel zusammen mit einem Maßwechsel. Wir führen den Beweis zunächst für den Fall superkritischer Wellengeschwindigkeiten $c > \sqrt{2r}$.

Satz 3.1 *Sei w eine Wellenlösung mit Geschwindigkeit $c > \sqrt{2r}$. Dann gibt es ein $\tilde{x} \in \mathbf{R}$ so, daß*
$$1 - w(x) \sim e^{\lambda(x+\tilde{x})} \text{ für } x \to \infty,$$
wobei λ die größere Lösung von $\frac{1}{2}\lambda^2 + c\lambda + r = 0$, i.e. $\lambda = -c + \sqrt{c^2 - 2r} < 0$.

Bemerkung: Die rechte Seite ist die langsamer fallende Lösung der linearisierten Gleichung $\frac{1}{2} f'' + cf' + rf = 0$.

Beweis: Die Lösungen der Wärmeleitungsgleichung
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + cu$$

für beschränktes $c : [0,\infty) \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ mit $u(0,x) = f(x)$ haben nach der Feynman-Kac-Formel die Gestalt

$$u(t,x) = \mathbf{E}_0^x\Big\{ f(X_t) \exp\Big(\int_0^t c(t-s, X_s)\, ds\Big)\Big\},$$

wo X unter $\mathbb{P}_b^x$ eine Brownsche Bewegung mit $X_0 = x$ und Drift b ist. Dies kann man beweisen, indem man mit Hilfe der Itô-Formel zeigt, daß

$$u(t-s, X_s) \exp\Big(\int_0^s c(t-tau, X_\tau)\, d\tau\Big)$$

ein Martingal ist. Für unsere Wellenlösung w setzen wir $\tilde w(x) = 1 - w(x)$ ein, dann ist $u(t,x) = \tilde w(x-ct)$ eine Lösung dieser Gleichung mit $c(t,x) = rw(x-ct)$. Also gilt

$$\tilde w(x-ct) = \mathbf{E}_0^x\Big\{ \tilde w(X_t) \exp\Big(r \int_0^t w(X_s - c(t-s))\, ds\Big)\Big\}.$$

Für alle $\lambda \in \mathbf{R}$ erhält man

$$e^{-\lambda x}\tilde w(x) = \mathbf{E}_0^x\Big\{ e^{-\lambda(X_t+ct)}\tilde w(X_t+ct) \exp\Big(-r \int_0^t \tilde w(X_s+cs)\, ds\Big) e^{\lambda(X_t-x)+(r+c\lambda)t}\Big\}.$$

Wir beobachten, daß der letzte Term genau dann ein Martingal ist, nämlich eine geometrische Brownsche Bewegung, wenn $r + c\lambda = -\frac{1}{2}\lambda^2$. Wenn dies der Fall ist, so sagt die Girsanov Formel, daß unter dem transformierten Maß

$$d\mathbf{P}_\lambda^x = e^{\lambda(X_t-x)-\frac{1}{2}\lambda^2 t}\, d\mathbf{P}_0^x$$

der Prozeß X eine Brownsche Bewegung mit Drift λ ist. Wir setzen nun

$$\lambda = -c + \sqrt{c^2 - 2r} < 0,$$

was die größere Lösung von $c\lambda + r = -\frac{1}{2}\lambda^2$ ist, und außerdem $v(x) = e^{-\lambda x}\tilde w(x)$. Beachte, daß wir zeigen müssen, daß $v(x)$ für $x \to \infty$ gegen eine positive Konstante strebt.

Wir haben jetzt gezeigt, daß

$$v(x) = \mathbf{E}_\lambda^x\Big\{ v(X_t+ct) \exp\Big(-r \int_0^t \tilde w(X_s+cs)\, ds\Big)\Big\}.$$

Mit der Markoveigenschaft folgt sofort, daß

$$v(X_t+ct) \exp\Big(-r \int_0^t \tilde w(X_s+cs)\, ds\Big)$$

ein $\mathbf{P}_\lambda^0$-Martingal ist, das positiv, und somit fast sicher konvergent ist. Es ist nicht schwer zu prüfen, daß

$$\int_0^t \tilde w(X_s+cs)\, ds < \infty \text{ fast sicher},$$

so daß wir schließen können, daß

$$\lim_{t\to\infty} v(X_t+ct) \in [0,\infty) \text{ existiert.}$$

Überdies ist der Grenzwert meßbar bezüglich der σ-Algebra der terminalen Ereignisse und muß somit fast sicher konstant sein. Da $X_t + ct$ unter $\mathbf{P}^x_\lambda$ eine Brownsche Bewegung mit positiver Drift $c + \lambda$ ist, können wir folgern, daß

$$\lim_{x\to\infty} v(x) = k \in [0, \infty).$$

Es bleibt nur zu zeigen, daß $k > 0$. Dazu beobachten wir, daß v stetig ist und für $x \to \pm\infty$ konvergiert, und somit insbesondere beschränkt ist. Also gilt

$$\begin{aligned} v(x) &= \mathbf{E}^x_\lambda\Big\{ v(X_t + ct) \exp\Big(-r \int_0^t \tilde{w}(X_s + cs)\, ds\Big)\Big\} \\ &= k\mathbf{E}^x_\lambda\Big\{ \exp\Big(-r \int_0^\infty \tilde{w}(X_s + cs)\, ds\Big)\Big\}. \end{aligned}$$

Da $v(x) > 0$ folgt, daß $k > 0$ und das beendet den Beweis. ■

Im *kritischen Fall* fallen die beiden Lösungen der Form $e^{\lambda x}$ bei $\lambda = -\sqrt{2r}$ zusammen. Versucht man obiges Argument anzuwenden, so führt der Maßwechsel zu einer *driftfreien* Brownschen Bewegung und, da diese rekurrent ist, können wir die Asymptotik von v für $x \to \infty$ nicht auf die Asymptotik von $v(B_t)$ zurückführen.

Es gibt allerdings eine unabhängige Lösung $f(x) = x \exp(-\sqrt{2r}x)$ und in diesem Fall führt der Maßwechsel zu dem Prozeß mit Generator $\frac{1}{2}\partial^2/\partial x^2 + (\frac{1}{x})\partial/\partial x$. Dies ist der 3-dimensionale Bessel-Prozeß (die euklidische Norm einer 3-dimensionalen Brownschen Bewegung), der gegen ∞ strebt. Das obige Argument kann dann im wesentlichen durchgeführt werden (obwohl ein paar zusätzliche technische Schwierigkeiten auftreten) und führt zu folgendem Resultat.

Satz 3.2 *Sei w eine Wellenlösung mit Geschwindigkeit $c = \sqrt{2r}$. Dann gibt es ein $\tilde{x} \in \mathbf{R}$ so, daß*

$$1 - w(x) \sim xe^{\lambda(x+\tilde{x})} \text{ für } x \to \infty,$$

wobei λ die einzige Lösung von $\frac{1}{2}\lambda^2 + c\lambda + r = 0$, i.e. $\lambda = -\sqrt{2r} < 0$.

3.2 Ein Mehrteilchensystem

Die weiteren Argumente im Beweis der Eindeutigkeit fußen (ebenso wie der Existenzbeweis) auf *Mehr-Teilchen* Argumenten, wir wollen einen fundamentalen Zusammenhang zwischen der KPP-Gleichung, sowie ihrer Linearisierung, und einem Vielteilchensystem ausnutzen. Das wahrscheinlichkeitstheoretische Modell, das die Beziehung zur KPP-Gleichung herstellt ist der folgende *räumliche Verzweigungsprozeß.*

Wir starten mit einem Teilchen im Punkt x, das sich gemäß einer Brownschen Bewegung bewegt. Mit konstanter Rate r erzeugt dieses Teilchen jeweils einen Nachkommen, der startend von seinem Geburtsort, unabhängig von seinem Vorgänger dasselbe Verhalten zeigt. Alle Partikel leben für immer und sie werden in der Reihenfolge ihrer Geburt numeriert. Mit $N(t)$ bezeichnen wir die Anzahl der Teilchen, die zur Zeit t leben, und $X_k(t)$ bezeichnet die Position zur Zeit t des $k$ten Teilchens. Der folgende Satz ist ein Korollar zu einem klassischen Resultat, das wir später in der allgemeinen Form zitieren.

Satz 3.3

(a) **Multiplikative Martingale** *Sei* $w : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *zweimal stetig differenzierbar und beschränkt, dann ist*

$$M(t) = \prod_{k=1}^{N(t)} w(X_k(t) + ct),$$

genau dann ein Martingal, wenn $\frac{1}{2}w'' + cw' + rw(w-1) = 0$.

(b) **Additive Martingale** *Sei* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *zweimal stetig differenzierbar und beschränkt, dann ist*

$$A(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} f(X_k(t) + ct),$$

genau dann ein Martingal, wenn $\frac{1}{2}f'' + cf' + rf = 0$.

Sei w eine Wellenlösung mit Geschwindigkeit c. Dann gilt nach dem ersten Teil des Satzes,

$$w(x) = \mathbf{E}^x\{M(0)\} = \mathbf{E}^x\{M(t)\} = \mathbf{E}^x\Big\{ \prod_{k=1}^{N(t)} w(X_k(t) + ct)\Big\}.$$

Betrachte nun $L(t) := \inf_{k \le N(t)} X_k(t)$, das am weitesten links liegende Teilchen.

Wenn nun $L(t) + ct \to -\infty$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ für hinreichend späte Zeiten einen Faktor in dem Produkt, der kleiner als ε ist. Da alle anderen Faktoren durch 1 beschränkt sind, folgt $w(x) = 0$ für alle x, ein Widerspruch zur Definition der Wellenlösung. Folglich, kann es in diesem Fall keine Wellenlösung geben.

Lemma 3.4 *Es gilt*

$$L(t) + ct \longrightarrow \begin{cases} \infty & \text{wenn } c \ge \sqrt{2r}. \\ -\infty & \text{wenn } c < \sqrt{2r}. \end{cases}$$

Beweis: Dies kann entweder mit Martingalargumenten (einfacher) oder mittels der Theorie großer Abweichungen (flexibler) bewiesen werden. Darauf will ich hier verzichten, anstelle dessen ein kurzes heuristisches Argument andeuten. Die erwartete Anzahl an Teilchen links von $-ct$ ist

$$\mathbf{E}^x\Big\{ \sum_{k=1}^{N(t)} 1_{\{X_k(t) \le -ct\}}\Big\} = e^{rt}\mathbf{P}_0^x\{X_t \le -ct\} \approx \exp\left(t(r - c^2/2)\right).$$

Man kann daraus leicht sehen, daß für $c > \sqrt{2r}$ für hinreichend großes t keine Teilchen links von $-ct$ liegen. Umgekehrt wird man vermuten, daß zumindest für $c < \sqrt{2r}$ Teilchen links von $-ct$ liegen, da die erwartete Teilchenzahl exponentiell wächst — obwohl das nicht rigoros folgt! ∎

Ist nun $c \ge \sqrt{2r}$, dann gilt $L(t)+ct \to \infty$ und alle Faktoren können mit Hilfe unserer Vorarbeiten, Lemma 3.1 und 3.2 approximiert werden. Sei zunächst $c > \sqrt{2r}$ und $\lambda = -c + \sqrt{c^2 - 2r}$. Dann gilt, für ein $\tilde{x} \in \mathbf{R}$,

$$-\log w(x) \sim 1 - w(x) \sim e^{\lambda(x+\tilde{x})} \text{ für } x \to \infty.$$

Also gilt, für alle $\varepsilon > 0$ und hinreichend großes t,

$$1 - \varepsilon \le \frac{-\log w(X_k(t) + ct)}{e^{\lambda(X_k(t)+ct+\tilde{x})}} \le 1 + \varepsilon \text{ für alle } k \le N(t). \tag{2}$$

Definiere ein additives Martingal (!)

$$Z_\lambda(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} e^{\lambda(X_k(t)+ct)}.$$

Neveu (1986) zeigt, daß dieses Martingal uniform integrierbar ist (das ist nicht sehr schwer), daher exisiert eine nichttriviale Grenzvariable $Z_\lambda(\infty)$. Durch Addition von (2) erhalten wir

$$(1-\varepsilon)e^{\lambda\tilde{x}} Z_\lambda(t) \le -\log M(t) = -\sum_{k=1}^{N(t)} \log w(X_k(t) + ct) \le (1+\varepsilon)e^{\lambda\tilde{x}} Z_\lambda(t).$$

Grenzübergang $t \to \infty$ liefert

$$(1-\varepsilon)e^{\lambda\tilde{x}} Z_\lambda(\infty) \le -\log M(\infty) \le (1+\varepsilon)e^{\lambda\tilde{x}} Z_\lambda(\infty),$$

und, da $\varepsilon > 0$ beliebig war,

$$M(\infty) = \exp\Big(-e^{\lambda\tilde{x}} Z_\lambda(\infty)\Big).$$

Da M ein beschränktes und daher uniform integrierbares Martingal ist, folgt

$$w(x) = \mathbf{E}^x\Big\{\exp\big(-e^{\lambda\tilde{x}} Z_\lambda(\infty)\big)\Big\} = \mathbf{E}^{x+\tilde{x}}\Big\{\exp\big(-Z_\lambda(\infty)\big)\Big\}. \tag{3}$$

Diese explizite Formel beweist die *Eindeutigkeit* der Wellenlösung mit Geschwindigkeit $c > \sqrt{2r}$ bis auf Verschiebung.

Für die *Existenz* definiert man $w_\lambda(x + \tilde{x})$ gleich der rechten Seite in (3) und, da $Z_\lambda(\infty) \ge 0$ nichttrivial ist, folgt daß

$$\lim_{x\to-\infty} w_\lambda(x) = 0 \text{ und } \lim_{x\to\infty} w_\lambda(x) = 1.$$

Man definiert dann ein Martingal (bezüglich der natürlichen Filtration) durch

$$M_\lambda(t) = \mathbf{E}^0\Big\{e^{-Z_\lambda(\infty)} \,\Big|\, \mathcal{F}_t\Big\}.$$

Für $Z_\lambda(\infty)$ gilt folgende Selbstähnlichkeit,

$$Z_\lambda(\infty) = \sum_{k=1}^{N(t)} \exp\Big(\lambda(X_k(t) + ct)\Big) W_k,$$

wobei W_k unabhängig voneinander und vom Prozeß sind, jeweils mit derselben Verteilung wie $Z_\lambda(\infty)$. Damit sieht man leicht, daß

$$M_\lambda(t) = \prod_{k=1}^{N(t)} w_\lambda(X_k(t) + ct).$$

Nach Satz 3.3 folgt, daß w_λ eine Wellenlösung mit Geschwindigkeit c ist.

Im *kritischen Fall* $c = \sqrt{2r}$ (mit $\lambda = -\sqrt{2r}$) erhält man, wie oben, aus unserem asymptotischen Resultat, Lemma 3.2, für festes $\varepsilon > 0$ und alle hinreichend großen t,

$$(1-\varepsilon)\{-\log M(t)\} \leq e^{\lambda\tilde{x}} Z'_\lambda(t) \leq (1+\varepsilon)\{-\log M(t)\},$$

wobei

$$Z'_\lambda(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} (X_k(t) + \sqrt{2r}t) e^{-\sqrt{2r}\left(X_k(t)+\sqrt{2r}t\right)}$$

das zur Lösung $xe^{\lambda x}$ additive Martingal ist. Dieses Martingal ist *nicht* uniform integrierbar: In der Tat zeigt unsere Einschließung, daß es fast sicher gegen einen Grenzwert $Z'_\lambda(\infty)$ konvergiert, der Werte in $[0,\infty]$ annimmt. Das Martingal selbst nimmt aber auch negative Werte an, kann somit nicht uniform integrierbar sein.

Die Existenz der Grenzvariablen $Z'_\lambda(\infty)$ in diesem schwachen Sinn und uniforme Integrierbarkeit von M reicht aber aus, um das Argument von oben durchzuziehen und zu folgern, daß

$$w(x) = \mathbf{E}^x\{M(t)\} = \mathbf{E}^x\{M(\infty)\} = \mathbf{E}\Big\{\exp\Big(-e^{\lambda(x+\tilde{x})} Z'_\lambda(\infty)\Big)\Big\},$$

und damit daß auch im kritischen Fall die Lösung eindeutig ist.

Um den Beweis der *Existenz* von Wellenlösungen mit kritischer Geschwindigkeit zu führen, muß gezeigt werden, daß $Z'_\lambda(\infty)$ nichttrivial (d.h. identisch null) ist, damit das Argument aus dem superkritischen Fall übernommen werden kann. Das stimmt zwar, ist aber deutlich aufwendiger zu zeigen als im superkritischen Fall. Es bieten sich andere Ansätze an, auf die ich hier nicht eingehen möchte.

Bemerkung: Das Studium von additiven Martingalen entspricht im gewissem Sinne dem Studium der linearisierten Gleichung. Sie sind wesentlich leichter zu beherrschen, enthalten aber wertvolle Informationen über das nichtlineare Problem.

4 Vertiefungen und Ausblicke

Die Beziehung zwischen der KPP-Gleichung und verzweigenden Brownschen Bewegungen basiert auf dem folgenden Satz, der wohl schon vor McKean bekannt war.

Satz 4.1 (McKean 1975, Neveu 1987)

(a) Sei $u : [0,\infty) \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ eine beschränkte Lösung der KPP-Gleichung (1). Dann ist

$$M(s) = \prod_{k=1}^{N(s)} u(t-s, X_k(s)), \text{ für } s \in [0,t]$$

ein Martingal. Insbesondere gilt

$$u(t,x) = \mathbf{E}^x\Big\{\prod_{k=1}^{N(t)} f(X_k(t))\Big\},$$

wobei $f(x) = u(0,x)$, die Lösung u zu gegebenem Anfangswert f ist also eindeutig.

(b)

$$u(t,x) := \mathbf{E}^x\Big\{ \prod_{j=1}^{N(t)} f(X_j)\Big\}$$

ist eine Lösung der KPP-Gleichung mit $u(0,x) = f(x)$.

Wenn das wahrscheinlichkeitstheoretische Modell abgewandelt wird, kann dieser fundamentale Zusammenhang unter Abwandlung der Gleichungen aufrechterhalten werden und die resultierenden Gleichungen sind einem wahrscheinlichkeitstheoretischen Studium zugänglich. Wir geben ein paar Beispiele.

- **Höherdimensionale Probleme**

  Betrachtet man Brownsche Teilchen in höheren Dimensionen, so erhlt man die Gleichung

  $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u + ru(u-1).$$

  Siehe z.B. Lee und Torasco (1998).

- **Andere Verzweigungsmechanismen**

  Wenn im Moment einer Geburt statt eines Teilchens, eine zufällige Anzahl X geboren wird, so erhält man die Gleichung

  $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ru(f(u)-1),$$

  wobei $f(s) = \mathbf{E}\{s^X\}$ die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion der Nachkommensvariable ist. Harris' Analyse der Wellenlösungen überträgt sich auf diesen Fall, siehe auch Kyprianou (2001) für einen alternativen Ansatz. Eine Vielzahl potentiell interessanter rechter Seiten, wenn auch nicht alle, können so betrachtet werden.

- **Inhomogene Medien**

  Sei $V : \mathbf{R} \to [0,\infty)$ eine Funktion, die als *Katalysator* für die Verzweigung dient. Die Verzweigungen eines Teilchens, das dem Pfad B_t folgt, werden also von der Funktion $t \mapsto \int_0^t V(B_s)\,ds$ gesteuert. Man erhält McKean's Resultat für die Gleichung

  $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + V(x)\,u(u-1).$$

  Siehe zum Beispiel Gärtner und Freidlin (1979), Lee und Torasco (1998).

- **Verschiedene Partikeltypen**

  Jedes Teilchen hat einen von zwei möglichen Typen aus $\{1,2\}$. Der Typ eines Teilchens ist eine Markovkette in kontinuierlicher Zeit mit Übergangsraten q_{12} und q_{21}. Ein Teilchen vom Typ 1 bewegt sich nach einer Brownschen Bewegung mit Diffusionskonstante a_1 und erzeugt Nachkommen von demselben Typ mit Rate r_1, analog für Teilchen vom Typ 2.

Betrachtet man nun die Teilchen von Typ 1 bzw. 2 getrennt, so erhält man McKean's Resultat für ein gekoppeltes System von Reaktions-Diffusionsgleichungen.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial t} &= \frac{1}{2}a_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + r_1\,[u_1^2 - u_1] - q_{12}u_1 + q_{12}u_2 \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= \frac{1}{2}a_2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + r_2\,[u_2^2 - u_2] - q_{21}u_2 + q_{21}u_1.\end{aligned}$$

Existenz und Eindeutigkeit von Wellenlösungen wurde in diesem Fall mit einer Kombination von analytischen und wahrscheinlichkeitstheoretischen Methoden von Champneys, Harris, Toland, Warren und Williams (1995) gelöst. Diese schöne Arbeit enthält auch numerische Resultate.

- **Kontinuierlich variierende Partikeltypen**

  Harris und Williams (1996) studieren ein Modell in dem der Partikeltyp, der Diffusion und Verzweigungsrate steuert, kontinuierlich gemäß einem Ornstein-Uhlenbeck Prozeß variiert. Genauer gesagt, ist für ein Teilchen vom Typ $y \in \mathbf{R}$ die Diffusionskonstante gegeben durch $A(y) = ay^2$ und die Verzweigungsrate durch $R(y) = ry^2 + \varrho$, der Typ variiert kontinuierlich nach einem Ornstein-Uhlenbeck Prozeß mit Erzeuger

  $$\frac{\theta}{2}\Big(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - y\frac{\partial}{\partial y}\Big),$$

  wobei θ eine (hinreichend groß gewählter) Temperaturparameter ist. Dann ist die assoziierte Gleichung

  $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}A(y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + R(y)\,u(u-1) + \frac{\theta}{2}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y\frac{\partial u}{\partial y}\Big).$$

  In ihrer Arbeit zeigen sie mit wahrscheinlichkeitstheoretischen Methoden die Existenz von Wellenlösungen im superkritischen Fall, Eindeutigkeit ist hier ein offenes Problem.

- **Super-Brownsche Bewegung**

  Die Super-Brownsche Bewegung ist ein geeignet gebildeter Grenzwerte der verzweigenden Brownschen Bewegung mit *kritischem* Verzweigungsmechanismus, wenn die Teilchenzahl gegen unendlich geht. Sie ist in gewissem Sinne dual zu der Differentialgleichung

  $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - ru^2.$$

  Dynkin und Kuznetsov (1999), sowie Le Gall und seine Schüler, siehe etwa Le Gall (1999), haben dieses Problem und das damit verbundene elliptische Randwertproblem intensiv studiert.

5 Literatur

M.D. Bramson (1983). Convergence of solutions of the Kolmogorov equation to travelling waves. *Memoirs Amer. Math. Soc.* **44**.

A. Champneys, S. Harris, J. Toland, J. Warren und D. Williams (1995). Analysis, algebra and probability for a coupled system of reaction diffusion equations. *Phil. Trans. R. Soc. London A* **350**, 69–112.

E.B Dynkin und S.E Kuznetsov (1999). Solutions of a class of semilinear differential equations: trace and singularities on the boundary. In: *The Maz'ya anniverary collection, Vol. 2.* (ed. J. Rossmann et al.), 69–80, Birkhäuser Verlag.

K.D. Elworthy, A. Truman, H.Z. Zhao und J.G. Gaines (1994). Approximate travelling waves for generalized KPP equations and classical mechanics. *Proc. R. Soc. London A* **446**, 529-554.

R.A. Fisher (1937). The wave of advance of an advantegeous gene. *Ann. Eugenics* **7**, 353–396.

J. Gärtner und M.I. Freidlin (1979). On the propagation of concentration waves in periodic and random media. *Sov. Math. Dokl.* **20**, 1282–1286.

S.C. Harris (1999). Travelling-waves for the FKPP equation via probabilistic arguments. *Proc. Royal Society Edinburgh*, **129A**, 503–517.

S.C. Harris und D. Williams (1996). Large-deviations and martingales for a typed branching diffusion I. *Astérisque* **236** 133–154.

A.N Kolmogorov, I. Petrowskii und N. Piscounov (1937). Etude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matiére et son application à un problème biologique. *Mosc. Univ. Bulletin Math.* **1** 1–25.

A.E. Kyprianou (2001) Travelling wave solutions to the KPP equation at supercritical wave speeds: a parallel to Simon Harris' probabilistic analysis. *Ann. Institut Poincaré.* To appear.

J.-F. Le Gall (1999). Spatial branching processes, random snakes and partial differential equations. *Nachdiplom Lectures in Mathematics*, Birkhäuser Verlag.

T.-Y. Lee und F. Torcaso (1998). Wave propagation in a lattice KPP equation in random media. *Ann. Probab* bf 26 1179–1197.

H.P. Mc Kean (1975). Application of Brownian motion to the equation of Kolmogorov-Petrovskii-Piscounov. *Commun. Pure Appl. Math.* **28**, 323–331.

J. Neveu (1987). Multiplicative martingales for spatial branching processes. In: *Seminar on stochastic processes.* (ed. E. Cinlar et al.), 223–241, Birkhäuser Verlag.