Effiziente transiente Rauschanalyse in der Schaltungssimulation

Dipl.-Math. Thorsten Sickenberger

25. April 2008
Humboldt-Universität zu Berlin

1. Rauschen in elektronischen Schaltungen

Technologie:

$90nm \rightarrow 75nm \rightarrow 45nm \rightarrow \ldots$

Betriebsspannungen:

$5V \rightarrow 1.3V \rightarrow \ldots$

Quelle: www.qimonda.com

Technologischer Fortschritt in der Mikroelektronik

- kleinere Bauteile
- höhere Nutzfrequenzen
- geringere Betriebsspannungen

→ verringertes Signal-Rausch-Verhältnis

Transiente Rauschanalyse wird notwendig

- pfadweise Integration von SDAEs
  mit einer großen Anzahl kleiner Rauschquellen

$$A\frac{d}{dt}X(t) + f(t, X(t)) + \sum_{r=1}^{m} g_r(t, X(t))\xi_r(t) = 0$$

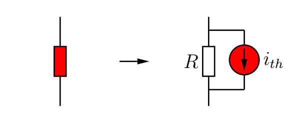
- Adaptive Verfahren mit "hoher Ordnung"

2. Überblick

1. Einführung
   - Modellierung elektronischer Schaltungen mit Rauschen
   - Itô-SDEs und Index-1 Itô-SDAEs
   - Zwei Konzepte: Schwache oder starke Approximation?
2. Adaptive Verfahren
   - Lineare Zweischritt-Maruyama-Verfahren mit variabler Schrittweite
   - Numerische Stabilität, Konsistenz und Konvergenz im Quadratmittel
   - Test-SDE mit polynomialer Drift und Diffusion
3. Lokale Fehlerschätzung und Schrittweitensteuerung
   - Schätzung des dominierenden lokalen Fehlerterms im Quadratmittel
   - Algorithmus zur Schrittweitensteuerung
   - Anwendungsbeispiel: MOSFET-Inverter-Schaltung
   - Anwendungsbeispiel: Spannungsgesteuerter Oszillator (VCO)
4. Geichzeitige Steuerung der Schrittweite und Pfadanzahl
   - Stichprobenfehler und die effiziente Anzahl der Pfade
   - Adaptive Pfadreduktion und -expansion
   - Numerische Beispiele

3. Modellierung der Rauschquellen

Rauschmodell



Rauschen wird mittels einer externen Gaußschen Stromquelle modelliert.

- **Thermisches Rauschen in Widerständen**
  (thermische Bewegung)
  Nyquists Formel (1928):

$$i_{th}(t) = \underbrace{\sqrt{\frac{2kT}{R}}}_{\sigma_{th}} \xi(t),$$

Additives Rauschen,
$k = 1.3806 \times 10^{-23}$ $[JK^{-1}]$

- **Schrot-Rauschen in Halbleiterübergängen**
  (Elementarladung)
  Schottkys Formel (1918):

$$i_{shot}(t, u(t)) = \underbrace{\sqrt{q_e |i_{det}(u(t))|}}_{\sigma_{shot}(u(t))} \xi(t),$$

Multiplikatives Rauschen,
$q_e = 1.602 \times 10^{-19}$ $[C]$

4. Modellierung elektronischer Schaltungen mit Rauschen

Gleichungen der modifizierten Knotenanalyse (MNA)

$$
\begin{aligned}
A_C q' + A_R g(A_R^T e, t) + A_L j_L + A_V j_V + A_I i_S(e, j_L, j_V, t) & \\
+ A_N \operatorname{diag}(\sigma(A_N^T e, t))\xi(t) &= 0, \\
\phi' - A_L^T e &= 0, \\
A_V^T e - v_S(e, j_L, t) &= 0, \\
q - q_C(A_C^T e, t) &= 0, \\
\phi - \phi_L(j_L, t) &= 0.
\end{aligned}
$$

Unbekannte des Systems:

- q: Ladungen,
- ϕ: Flüsse,
- e: Knotenpotentiale,
- j_L: Ströme durch Induktivitäten
- j_V: Ströme durch Spannungsquellen

Bezeichner im Rauschterm:

- ξ: m-dim. Gaußsches weißes Rauschen,
- σ: m-dim. Vektor der Rauschintensitäten

4. Modellierung elektronischer Schaltungen mit Rauschen

Gleichungen der modifizierten Knotenanalyse (MNA)

$$\begin{aligned}
A_C q' + A_R g(A_R^T e, t) + A_L j_L + A_V j_V + A_I i_S(e, j_L, j_V, t) \\
+A_N \operatorname{diag}(\sigma(A_N^T e, t))\xi(t) &= 0, \\
\phi' - A_L^T e &= 0, \\
A_V^T e - v_S(e, j_L, t) &= 0, \\
q - q_C(A_C^T e, t) &= 0, \\
\phi - \phi_L(j_L, t) &= 0.
\end{aligned}$$

führt zur stochastischen Algebro-Differentialgleichung:

$$A \cdot X(s)\Big|_{t_0}^{t} - \int_{t_0}^{t} f(s, X(s))\, \mathrm{d}s - \int_{t_0}^{t} G(s, X(s))\, \mathrm{d}W(s) = 0,$$

mit $X(t,\cdot) = X(t) = (q(t), \phi(t), e(t), j_L(t), j_V(t))^T \in \mathbb{L}_2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und $A = \operatorname{diag}(A_C, Id_L, 0, 0, 0)$,

$$f(t, X(t)) = -\begin{pmatrix} A_R g(A_R^T e,\, t) + A_L j_L + A_V j_V + A_I i_S(e, j_L, j_V, t) \\ -A_L^T e \\ A_V^T e - v_S(e, j_L, t) \\ q - q_C(A_C^T e,\, t) \\ \phi - \phi_L(j_L, t) \end{pmatrix}, \quad G(t, X(t)) := -\begin{pmatrix} A_N \operatorname{diag}(\sigma(A_N^T e(t),\, t)) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5. Itô-SDEs und Index-1 Itô-SDAEs

$$A X(s)\big|_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} f(s, X(s))\, \mathrm{d}s + \underbrace{\int_{t_0}^{t} G(s, X(s))\, \mathrm{d}W(s)}_{\sum_{r=1}^{m} \int_{t_0}^{t} g_r(s, X(s))\, \mathrm{d}W_r(s)}, \quad X(t_0) = X_0, \quad t \in \mathcal{J} = [t_0, T];$$

- Drift $f : \mathcal{J} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, Diffusion $G = (g_1, \ldots, g_m) : \mathcal{J} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times m}$;
- W ist m-dim. BB auf W'raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit Filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathcal{J}}$;
- X_0 ist ein $\mathcal{F}_{t_0}$-messbarer Anfangswert, unabh. von W und $\mathbb{E}|X_0|^2 < \infty$.

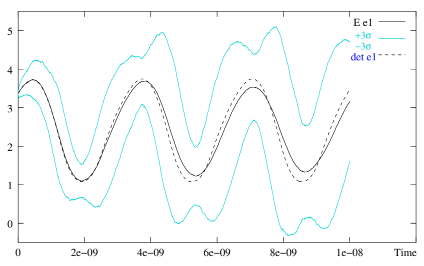
Klassifizierung:

- $A = Id$: Itô-SDE
- $A = Id$ und $G = \epsilon \hat{G}$ $(\epsilon \ll 1)$: Itô-SDE mit kleinem Rauschen
  (Milstein/Tretyakov 1997 und 2004; Buckwar/Winkler 2006)
- A singulär und algebr. Nebenbedingungen rauschfrei: Index-1 Itô-SDAE
  (Schein 1999, Winkler 2003)
- A singulär, algebr. NB rauschfrei und $G = \epsilon \hat{G}$: Index-1 Itô-SDAE mit kleinem Rauschen

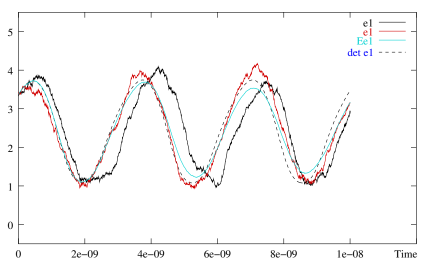
Wir nehmen an, es existiere eine pfadweise eindeutige starke Lösung.

6. Zwei Konzepte: Schwache oder starke Approximation?

Berechnung der Momente (Erwartungswert, Varianz, ...)



Simulation von Lösungspfaden



▷ Simulierte Pfade geben Auskunft über das Phasenrauschen

7. Adaptive Verfahren

Lineare Zweischritt-Maruyama-Verfahren mit variabler Schrittweite

$$(A) \sum_{j=0}^{2} \alpha_{j,\ell} X_{\ell-j} = h_\ell \sum_{j=0}^{2} \beta_{j,\ell} f(t_{\ell-j}, X_{\ell-j}) + \sum_{j=1}^{2} \gamma_{j,\ell} \sum_{r=1}^{m} g_r(t_{\ell-j}, X_{\ell-j})\, I_r^{t_{\ell-j}, t_{\ell-j+1}},$$

$\ell = 2, \ldots, N$, Anfangswerte $X_0, X_1 \in \mathbb{L}_2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ sodass X_ℓ $(\ell = 0, 1)$ $\mathcal{F}_{t_\ell}$-messbar.

Notationen:

$$I_r^{t,t+h} = W_r(t+h) - W_r(t) \sim \mathcal{N}(0, h), \qquad \kappa_\ell = h_\ell / h_{\ell-1}, \qquad \mathbf{h} := \max_{\ell=1,\ldots,N} h_\ell.$$

Globaler Fehler in t_ℓ:

$$e_\ell = \|X(t_\ell) - X_\ell\|_{\mathbb{L}_2} \text{ wobei } X(t) \in \mathbb{L}_2(\Omega) \text{ mit der Norm } \|X(t)\|_{\mathbb{L}_2} = (E|X(t)|^2)^{1/2}$$

Konvergenz im Quadratmittel mit Ordnung γ ($\gamma > 0$):

$$max_{\ell=1,\ldots,N} \|X(t_\ell) - X_\ell\|_{\mathbb{L}_2} \leq c\mathbf{h}^\gamma \text{ für } \mathbf{h} \to 0.$$

Mehrschritt-Maruyama-Verfahren mit konstanter Schrittweite für SDEs: Buckwar/Winkler 2006

8. Numerische Stabilität und Konsistenz im Quadratmittel

Stabilitätsungleichung

Voraussetzungen: f, g_r Lipschitz-stetig, g_r erfüllt eine lineare Wachstumsbed., zugehöriges Verfahren mit konstanter Schrittweite erfüllt Dahlquist's Wurzelbed., $\kappa \leq \kappa_\ell \leq K$ und $\mathbf{h} \cdot N \leq a(T - t_0)$.
Dann

$$\max_{\ell=1,\ldots,N} \|X(t_\ell) - \widetilde{X}_\ell\|_{\mathbb{L}_2} \leq S\Big\{ \max_{\ell=0,1} \|X(t_\ell) - \widetilde{X}_\ell\|_{\mathbb{L}_2} + \max_{\ell=2,\ldots,N} \Big(\frac{\|R_\ell\|_{\mathbb{L}_2}}{\mathbf{h}} + \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{2} \|S_{j,\ell-j+1}\|_{\mathbb{L}_2}^2}}{\sqrt{\mathbf{h}}} \Big) \Big\},$$

für $\mathcal{F}_{t_\ell}$-messbare Störungen $D_\ell = R_\ell + \sum_{j=1}^{2} S_{j,\ell-j+1}$, wobei $S_{j,\ell-j+1}$ is $\mathcal{F}_{t_{\ell-j+1}}$-messbar ist und $E(S_{j,\ell-j+1}|\mathcal{F}_{t_{\ell-j}}) = 0$ für alle $\ell = 2, \ldots, N$ und $j = 1, 2$ gilt.

Beweisskizze:

- Existenz und Eindeutigkeit der Lösung $\widetilde{X}$ des gestörten Systems
- $\mathbb{E}(\widetilde{X}_\ell^2) < \infty$
- Herleitung der Stabilitätsungleichung

Lokaler Fehler L_ℓ: Defekt der exakten Lösung im numerischen Verfahren

Konvergenz: Setze $\widetilde{X}_\ell = X_\ell$, $D_\ell = L_\ell$ mit $\underbrace{\|R_\ell\|_{\mathbb{L}_2} \leq c_R h_\ell^{\gamma+1} \text{ und } \|S_\ell\|_{\mathbb{L}_2} \leq c_S h_\ell^{\gamma+\frac{1}{2}}}_{\text{Konsistenz im Quadratmittel}}$.

9. Wahl der Koeffizienten

- **Stabilität** $(\alpha_j(\kappa_\ell) := \alpha_{j,\ell})$: $\quad |\alpha_2(1)| \leq 1,\ \alpha_2(1) \neq 1$
- **Konsistenz**:

$$\sum_{j=0}^{2} \alpha_{j,\ell} = 0, \quad \alpha_{0,\ell} + \frac{1}{\kappa_\ell}(\alpha_{0,\ell} + \alpha_{0,\ell}) = \sum_{j=0}^{2} \beta_{j,\ell}, \quad \alpha_{0,\ell} = \gamma_{1,\ell}, \quad \alpha_{0,\ell} + \alpha_{1,\ell} = \gamma_{2,\ell}.$$

$$\max_{\ell=0,\ldots,N} \|X(t_\ell) - X_\ell\|_{\mathbb{L}_2} = \boxed{O(\mathbf{h} + \epsilon^2 \mathbf{h}^{1/2})} + O(\max_{\ell=0,1} \|X(t_\ell) - X_\ell\|_{\mathbb{L}_2})$$

- **det. Ordnung 2** (zusätzlich):

$$\left(\frac{1}{\kappa_\ell^2} + \frac{2}{\kappa_\ell} + 1\right) \alpha_{0,\ell} + \frac{1}{\kappa_\ell^2}\ \alpha_{1,\ell} - \left(\frac{2}{\kappa_\ell} + 2\right) \beta_{0,\ell} - \frac{2}{\kappa_\ell}\ \beta_{1,\ell} = 0.$$

$$\max_{\ell=0,\ldots,N} \|X(t_\ell) - X_\ell\|_{\mathbb{L}_2} = \boxed{O(\mathbf{h}^2 + \epsilon \mathbf{h} + \epsilon^2 \mathbf{h}^{1/2})} + O(\max_{\ell=0,1} \|X(t_\ell) - X_\ell\|_{\mathbb{L}_2})$$

10. Verfahrensbeispiele für die transiente Rauschanalyse

- **Drift-implizites Euler-Maruyama Verfahren**

$$A\left(X_\ell - X_{\ell-1}\right) = h_\ell f(t_\ell, X_\ell) + \sum_{r=1}^{m} g_r(t_{\ell-1}, X_{\ell-1}) I_r^{t_{\ell-1},t_\ell}$$

- **Stochastische Trapezregel**

$$A\left(X_\ell - X_{\ell-1}\right) = h_\ell \frac{1}{2}\left(f(t_\ell, X_\ell) + f(t_{\ell-1}, X_{\ell-1})\right) + \sum_{r=1}^{m} g_r(t_{\ell-1}, X_{\ell-1})\ I_r^{t_{\ell-1},t_\ell}$$

- **BDF$_2$-Maruyama Verfahren**

$$\begin{aligned} A\Big(X_\ell - \frac{(\kappa_\ell+1)^2}{2\kappa_\ell+1} X_{\ell-1} + \frac{\kappa_\ell^2}{2\kappa_\ell+1} X_{\ell-2}\Big) &= h_\ell\ \frac{\kappa_\ell+1}{2\kappa_\ell+1} f(t_\ell, X_\ell) \\ &+ \sum_{r=1}^{m} g_r(t_{\ell-1}, X_{\ell-1})\ I_r^{t_{\ell-1},t_\ell} - \frac{\kappa_\ell^2}{2\kappa_\ell+1} \sum_{r=1}^{m} g_r(t_{\ell-2}, X_{\ell-2})\ I_r^{t_{\ell-2},t_{\ell-1}} \end{aligned}$$

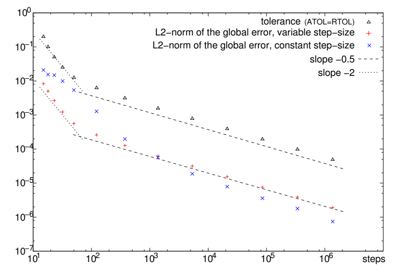
11. Test-SDE mit polynomialer Drift und Diffusion

$$X(t) = \int_0^t -(\alpha + \beta^2 X(s))(1 - X(s)^2)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \beta(1 - X(s)^2)\,\mathrm{d}W(s), \quad t \in [0,1],$$

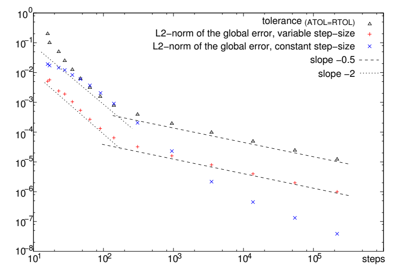
Exakte Lösung: $$X(t) = \frac{\exp(-2\alpha t + 2\beta W(t)) - 1}{\exp(-2\alpha t + 2\beta W(t)) + 1}$$

Simulationsergebnisse: BDF$_2$-Maruyama-Verfahren, 100 Pfade

$\alpha = -10,\ \beta = 0.1 \longrightarrow \epsilon = 10^{-2}$



$\alpha = -10,\ \beta = 0.01 \longrightarrow \epsilon = 10^{-3}$



12. Lokale Fehlerschätzung mittels Defekt-Korrektur

Gaines/Lyons 1997; Mauthner 1999; Hofmann/Müller-Gronbach/Ritter 2000; Lamba 2003; Römisch/Winkler 2006 (kleines Rauschen)

Fehlerschätzung mittels Defekt-Korrektur
Defekt eines Hilfsverfahrens mit det. Konvergenzordnung $\bar{p} := p$ $(\ell = 2, \ldots, N)$

$$D_\ell \;:=\; \sum_{j=0}^{2} \bar{\alpha}_{j,\ell} X_{\ell-j} - h_\ell \sum_{j=0}^{2} \bar{\beta}_{j,\ell} f(t_{\ell-j}, X_{\ell-j}) - \epsilon \sum_{j=1}^{2} \bar{\gamma}_{j,\ell} \sum_{r=1}^{m} \hat{g}_r(t_{\ell-j}, X_{\ell-j}) I_r^{t_{\ell-j}, t_{\ell-j+1}}$$

Wie sind die Koeffizienten des Hilfsverfahrens zu wählen?

- $\bar{\alpha}_{j,\ell} = \alpha_{j,\ell}, j = 0, 1, 2 \rightarrow \bar{\gamma}_{j,\ell} = \gamma_{j,\ell}, j = 1, 2$
- Konsistenzbedingungen für $\bar{p} = 2$
- $\bar{c}_\ell - c_\ell = 1$

$$D_\ell = h_\ell \cdot \left[\frac{2\kappa_\ell}{\kappa_\ell + 1} f(t_\ell, X_\ell) - 2\kappa_\ell f(t_{\ell-1}, X_{\ell-1}) + \frac{2\kappa_\ell^2}{\kappa_\ell + 1} f(t_{\ell-2}, X_{\ell-2}) \right]$$

→ **Schätzung des dominierenden lokalen Fehlerterms im Quadratmittel**

13. Fehlerschätzer für SDEs und SDAEs (kleines Rauschen)

- Verfahren mit **det. Ordnung 1** (Römisch/Winkler 2006)

$$\|L_\ell\|_{\mathbb{L}_2} = c_\ell \|D_\ell\|_{\mathbb{L}_2} = c_\ell \; h_\ell \left\| (f_\ell - f_{\ell-1}) \right\|_{\mathbb{L}_2} + O(h_\ell^3 + \epsilon h_\ell^{3/2} + \epsilon^2 h_\ell)$$

$$\approx c_\ell \; h_\ell \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} \left| (f_\ell^i - f_{\ell-1}^i) \right|^2} \quad \text{für} \quad \boxed{h_\ell \gg \epsilon^2}$$

- Verfahren mit **det. Ordnung 2**

$$\|L_\ell\|_{\mathbb{L}_2} = c_\ell \; h_\ell \left\| \left(\frac{2\kappa_\ell}{\kappa_\ell + 1} f_\ell - 2\kappa_\ell f_{\ell-1} + \frac{2\kappa_\ell^2}{\kappa_\ell + 1} f_{\ell-2} \right) \right\|_{\mathbb{L}_2} + O(h_\ell^4 + \epsilon h_\ell^{3/2} + \epsilon^2 h_\ell)$$

$$\approx c_\ell \; h_\ell \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} \left| \left(\frac{2\kappa_\ell}{\kappa_\ell + 1} f_\ell^i - 2\kappa_\ell f_{\ell-1}^i + \frac{2\kappa_\ell^2}{\kappa_\ell + 1} f_{\ell-2}^i \right) \right|^2} \quad \text{für} \quad \boxed{h_\ell \gg \epsilon^{2/3}}$$

Skalierungen für Index-1 SDAEs:

- $\|L_\ell\|_{\mathbb{L}_2} = c_\ell \|D_\ell\|_{\mathbb{L}_2}$ für Toleranz zu AX,
- $\|L_\ell\|_{\mathbb{L}_2} = c_\ell \|(A - h_\ell \beta_{0,\ell} J_\ell)^{-1} D_\ell\|_{\mathbb{L}_2}$ für Toleranz zu X oder
- $\|L_\ell\|_{\mathbb{L}_2} = c_\ell \|A^- D_\ell\|_{\mathbb{L}_2}$ für Toleranz zu PX.

14. Algorithmus zur Schrittweitensteuerung

1) Löse das System gleichzeitig für alle x_ℓ^i ($i = 1, \ldots, M$ Anzahl der Pfade)

$$A\sum_{j=0}^{2}\alpha_{j,\ell}x_{\ell-j}^i = h_\ell\sum_{j=0}^{2}\beta_{j,\ell}f(t_{\ell-j}, x_{\ell-j}^i) + \sum_{j=1}^{2}\gamma_{j,\ell}\sum_{r=1}^{m}g_r(t_{\ell-j}, x_{\ell-j}^i)\,{}^iI_r^{t_{\ell-j},t_{\ell-j+1}}$$

2) Berechne den Fehlerschätzer und die Toleranzen (komponentenweise)

3) Benutze eine Steuerungsstrategie (z.B. PI34 mit Sicherheitsfaktor $fac = 0.7$):

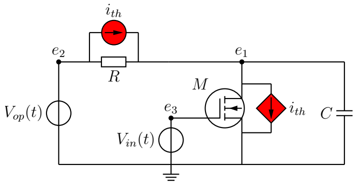
$$\frac{h_{new}}{h_\ell} := \min_{\nu=1,\ldots,n}\left\{ \left(\frac{fac \cdot Tol_\nu}{L_{\ell,\nu}}\right)^{\frac{0.3}{2+1}} \left(\frac{L_{\ell-1,\nu}}{L_{\ell,\nu}}\right)^{\frac{0.4}{2+1}} \right\}.$$

4) Falls $L_{\ell,\nu} \leq \mathrm{TOL}_\nu$ für alle $\nu = 1, \ldots, n$, akzeptiere den Schritt. Falls $t_\ell > T$, stoppe, ansonsten setze $\ell := \ell + 1$, $h_\ell := h_{new}$ und gehe zu 1).

Falls $L_{\ell,\nu} > \mathrm{TOL}_\nu$ für mindestens eine Komponente $\nu \in \{1, \ldots, n\}$, verwerfe den Schritt und wiederhole ihn mit kleinerer Schrittweite $h_\ell := h_{new}$.

15. Anwendungsbeispiel: MOSFET-Inverter-Schaltung

Schaltkreis



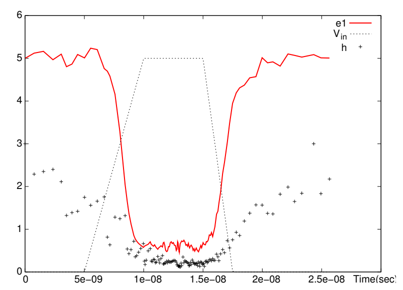
Parameter der Schaltung:
$C = 2 \cdot 10^{-13}$ $[F]$, $R = 5 \cdot 10^3$ $[\Omega]$, $V_{op} = 5$ $[V]$, Zeitintervall $\mathcal{J} = [0, 2.5 \cdot 10^{-8}]$ $[s]$.

Parameter der Simulation:
Toleranzen: $\text{RTOL} = 10^{-2}$, $\text{ATOL} = C \cdot \text{RTOL}$.
Rausch-Intensitäten skaliert mit Faktor 1000.

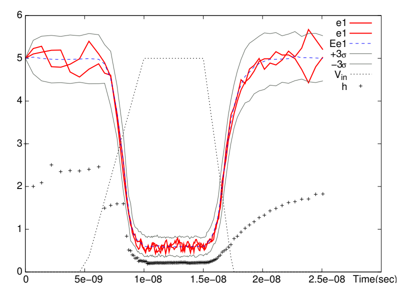
16. Anwendungsbeispiel: MOSFET-Inverter-Schaltung (2)

Simulationsergebnisse für einen und 100 simultan berechnete Pfade:
(BDF_2-Maruyama-Verfahren)

1 Pfad:
127 (+29 abgelehnte) Schritt



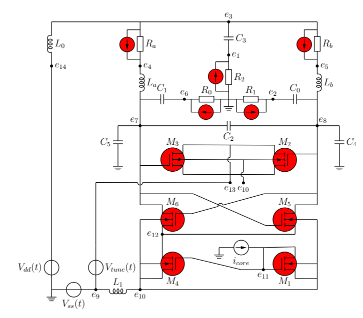
100 Pfade:
134 (+11 abgelehnte) Schritt



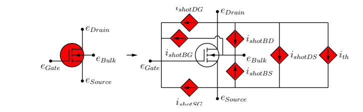
Drift-implizites Euler-Maruyama-Verfahren benötigt 188 (+ 46) bzw. 166 (+ 9) Schritte.

17. Anwendungsbeispiel: Spannungsgesteuerter Oszillator (VCO)

VCO Schaltkreis



Rauschquellen eines MOSFETs



Wir betrachten einen **VCO** mit
- 5 rauschenden Widerständen und
- 6 rauschenden MOSFETs

▷ 47 Rauschquellen

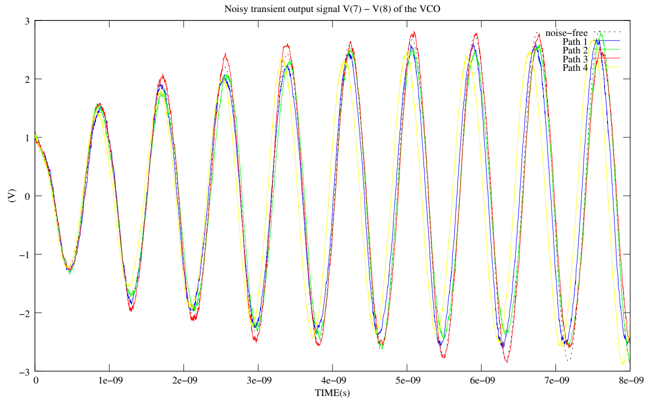
Die **Unbekannten** sind
- Ladungen der 6 Kapazitäten,
- Flüsse der 4 Induktivitäten,
- 13 Knotenpotentiale und
- Ströme durch die Spannungsquellen.

Test-Konfiguration:
∼ 1.2 GHz Oszillation
- Skalierung der Rauschintensitäten mit Faktor 500.

18. Anwendungsbeispiel: VCO - Rauschendes transientes Signal

Simulationsergebnis:
(rauschfreie Simulation und 4 Pfade zu verschiedenen Rauschrealisierungen)

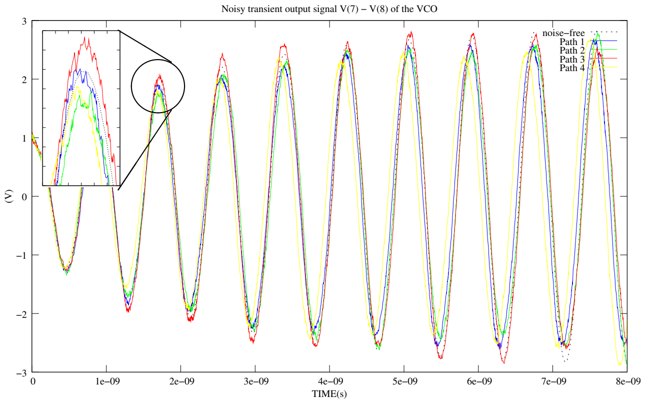
Transientes Signal (Rauschen verstärkt um den Faktor 250)



18. Anwendungsbeispiel: VCO - Rauschendes transientes Signal

Simulationsergebnis:
(rauschfreie Simulation und 4 Pfade zu verschiedenen Rauschrealisierungen)

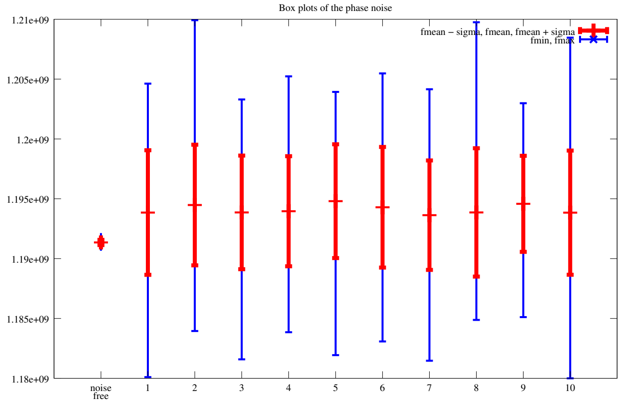
Transientes Signal (Rauschen verstärkt um den Faktor 250)



19. Anwendungsbeispiel: VCO - Analyse des Phasenrauschens

Simulationsergebnis:
(rauschfreie Simulation und 10 Pfade zu verschiedenen Rauschrealisierungen)

Boxplots des Phasenrauschens (Rauschen verstärkt um den Faktor 250)



20. Effiziente Anzahl der Pfade

Approximation der $\mathbb{L}_2$-Norm durch M simultan berechnete Pfade:

$$\widehat{\eta}_\ell = c_\ell h_\ell \sqrt{\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\left(\chi(x_\ell^i,\dots,x_{\ell-p}^i)\right)^2} \approx c_\ell h_\ell \left\|\chi(X_\ell,\dots,X_{\ell-p})\right\|_{\mathbb{L}_2} = \eta_\ell$$

Somit

$$\|L_\ell\|_{\mathbb{L}_2} = \eta_\ell + O(h_\ell^{p+2} + \epsilon h_\ell^{3/2} + \epsilon^2 h_\ell) = \widehat{\eta}_\ell + \vartheta_\ell + \underbrace{O(h_\ell^{p+2} + \epsilon h_\ell^{3/2} + \epsilon^2 h_\ell)}_{\text{Terme 'höherer Ordnung'}}$$

mit Fehlerschätzer $\widehat{\eta}_\ell = O(h_\ell^{p+1})$ und Stichprobenfehler $\vartheta_\ell = O(M^{-1/2})$.

Lemma: (Stichprobenfehler)

Sei $\widehat{\eta}_\ell$ ein Schätzer für die $\mathbb{L}_2$-Norm des lokalen Fehlerschätzers η_ℓ. Dann kann der Stichprobenfehler berechnet werden mittels

$$\vartheta_\ell = \sqrt{\frac{1}{M}\frac{\hat{\mu}^2 \cdot \hat{\sigma}^2}{\hat{\mu}^2 + \hat{\sigma}^2}},$$

wobei $\hat{\mu} = c_\ell h_\ell \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\chi(x_\ell^i,\dots,x_{\ell-p}^i)$ und $\hat{\sigma}^2 = c_\ell^2 h_\ell^2 \frac{1}{M-1}\left(\sum_{i=1}^{M}\chi(x_\ell^i,\dots,x_{\ell-p}^i)^2 - M\hat{\mu}^2\right)$.

20. Effiziente Anzahl der Pfade

Approximation der $\mathbb{L}_2$-Norm durch M simultan berechnete Pfade:

$$\widehat{\eta}_\ell = c_\ell h_\ell \sqrt{\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\left(\chi(x_\ell^i,\ldots,x_{\ell-p}^i)\right)^2} \approx c_\ell h_\ell \left\|\chi(X_\ell,\ldots,X_{\ell-p})\right\|_{\mathbb{L}_2} = \eta_\ell$$

Somit

$$\|L_\ell\|_{\mathbb{L}_2} = \eta_\ell + O(h_\ell^{p+2} + \epsilon h_\ell^{3/2} + \epsilon^2 h_\ell) = \widehat{\eta}_\ell + \vartheta_\ell + \underbrace{O(h_\ell^{p+2} + \epsilon h_\ell^{3/2} + \epsilon^2 h_\ell)}_{\text{Terme 'höherer Ordnung'}}$$

mit Fehlerschätzer $\widehat{\eta}_\ell = O(h_\ell^{p+1})$ und Stichprobenfehler $\vartheta_\ell = O(M^{-1/2})$.

Theorem: (effiziente Anzahl an Pfaden)

Sei STOL_ℓ eine Toleranz für den Stichprobenfehler ϑ_ℓ zur Zeit t_ℓ, also $\vartheta_\ell \leq \mathrm{STOL}_\ell$, dann ist die effiziente Anzahl an Pfaden gegeben durch

$$M_{eff} = \left\lfloor \frac{1}{\mathrm{STOL}_\ell^2} \frac{\hat{\mu}^2 \cdot \hat{\sigma}^2}{(\hat{\mu}^2 + \hat{\sigma}^2)} \right\rfloor .$$

21. Simultane Steuerung der Zeit-Schrittweite und Pfadanzahl

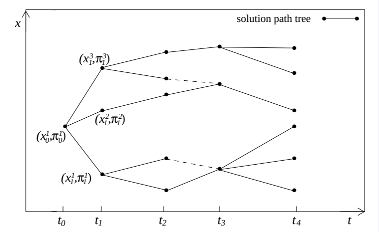
Baumartige Approximation des Lösungsprozesses:

- Initialisierung (zum Zeitpunkt $t_0 = 0$):
  $I_0 := \{1, \ldots, M_0\}$ Indexmenge der Pfade
  $\pi_0^i = 1/M_0$ $(i \in I_0)$ Gewichte, $(\sum_{i \in I_\ell} \pi_0^i = 1)$
  Setze $\ell = 1$ und sei h_1 die Startschrittweite

- Numerische Integration:
  Benutze $(M_\ell = |I_\ell|)$

$$\hat{\eta}_\ell = c_\ell h_\ell \sqrt{\sum_{i \in I_\ell} \pi_\ell^i (\chi(x_\ell^i, \cdots, x_{\ell-p}^i))^2}.$$

Baum approximierter Lösungspfade



- Konstruktion der baumartigen Approximation:
  Berechne die effiziente Anzahl $M_{\ell+1}$:

$$M_{\ell+1} = \left\lfloor \frac{1}{\mathrm{STOL}_\ell^2} \frac{\hat{\mu}^2 \cdot \hat{\sigma}^2}{(\hat{\mu}^2 + \hat{\sigma}^2)} \right\rfloor$$

wobei STOL_ℓ eine Toleranz für den Stichprobenfehler ϑ_ℓ ist.

22. Pfadreduktion und -expansion

- $M_{\ell+1} = M_\ell$: keine Veränderung der Indexmenge oder Gewichtung
- $M_{\ell+1} < M_\ell$: Pfadreduktion (J Indexmenge der verworfenen Pfade)

$$\min \left\{ \sum_{j \in J} \pi_\ell^j \min_{i \in I_\ell \setminus J} d_\ell^2(x^i, x^j) : \ J \subset I_\ell, \ |J| = M_\ell - M_{\ell+1} \right\}$$

Opt. Indexmenge und Neuverteilung: $I_{\ell+1} = I_\ell \setminus J, \ \ \pi_{\ell+1}^i = \pi_\ell^i + \sum_{j \in J_i} \pi_\ell^j, \ \ \ i \in I_{\ell+1}$.

- $M_{\ell+1} > M_\ell$: Pfadexpansion (J Indexmenge der ergänzten Pfade)

$$\min \left\{ \sum_{i \in I_\ell} \frac{\pi_\ell^i}{y_i} \sum_{j=1}^{M_{\ell+1}-M_\ell} z_{i,j} \min_{k \in I_\ell} d_{\ell+1}^2(x^k, x^{i,j}) : \ z_{i,j} \in \{0,1\}, y_i = \sum_{j=1}^{M_{\ell+1}-M_\ell} z_{i,j} \geq 1 \forall i, \sum_{i \in I_\ell} z_{i,j} = 1 \forall j \right\}$$

Opt. Indexmenge und Neuverteilung: $I_{\ell+1} = I_\ell \cup J, \ \ \pi_{\ell+1}^i = \frac{1}{y_{j(i)}} \pi_\ell^{j(i)}, \ \ \ i \in I_{\ell+1}$.

$d_\ell(x^i, x^j)$ ist Semimetrik auf $\mathbb{R}^{(\ell+1)n}$ – Distanz zwischen zwei approximierten Lösungspfaden bzgl. der Zeitpunkte $t_\ell, \ldots, t_{\ell-p}$.

Gelbrich 1995; Dupačová/Gröwe-Kuska/Römisch 2003; Heitsch/Römisch 2005

23. Numerische Beispiele

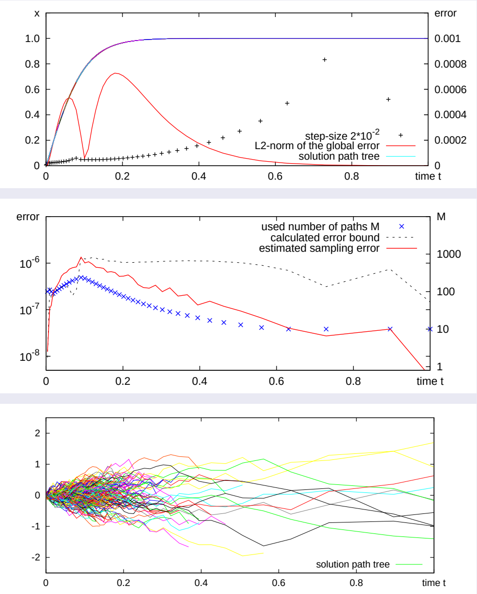
Simulationsergebnis für die Test-SDE:

Lösungspfade , $\longrightarrow$
globaler Fehler und
verwendete Schrittweiten

Anzahl der Pfade M_ℓ , $\longrightarrow$
Stichprobenfehler und
seine Toleranz

simulierte
Brownsche Bewegung $\longrightarrow$

Test-SDE



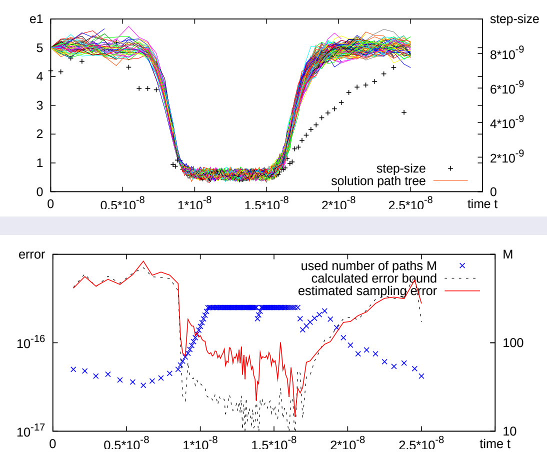
24. Anwendungsbeispiel

Simulationsergebnis für die MOSFET-Inverter-Schaltung:

Lösungspfade →
und Schrittweiten

Anzahl der Pfade M_ℓ , →
Stichprobenfehler und
seine Toleranz

MOSFET-Inverter-Schaltung



25. Zusammenfassung

- Motivation: Transiente Rauschanalyse in der Schaltungssimulation
- Modellierung führt zu stochastischen Algebro-Differentialgleichungen mit kleinem Rauschen
- Vollständige Theorie zur numerischen Stabilität, Konsistenz und Konvergenz im Quadratmittel für stochastische lineare Mehrschritt-Verfahren mit variabler Schrittweite.
- Für kleines Rauschen: Schrittweitensteuerung basierend auf einem einfach zu berechnenden Schätzer des dominierenden lokalen Diskretisierungsfehlers
- Erheblicher Effizienzgewinn bei der Approximation von SDEs und SDAEs mit kleinem Rauschen
- Simultane Steuerung der Zeit- und Zufalldiskretisierung in einer Approximation (führt zu einer baumartigen Struktur von Lösungspfaden)
- Implementierung ist verfügbar in TITAN (Qimonda's in-house analoger Schaltungssimulator)

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit.

Kontakt:

Thorsten Sickenberger

Universität zu Köln, Mathematisches Institut
Weyertal 86-90, 50931 Köln, Germany
Home: `http://www.mi.uni-koeln.de/~sickenbe/`
E-Mail: `sickenberger@math.uni-koeln.de`