W. Wefelmeyer
M. Schölpen

Wintersemester 2003/04

Übungen zur Stochastik II
Serie 1
(Abgabe: Montag, den 27.10.2003, in der Übung)

Aufgabe 1

Sei f integrierbar bezüglich eines Maßes μ auf einer σ-Algebra $\mathcal{F}$. Definiere ν durch $\nu A = \mu(1_A f)$, $A \in \mathcal{F}$. Zeigen Sie: Dann gilt

$$\nu^+ A = \mu(1_A f^+), \quad \nu^- A = \mu(1_A f^-).$$

Aufgabe 2

Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein messbarer Raum; $\mathcal{F}$ enthalte die Einpunktmengen. Seien μ und ν diskrete Maße auf $\mathcal{F}$.

(i) Sind μ und ν immer σ-endlich?

(ii) Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung für $\nu \ll \mu$.

(iii) Berechnen Sie alle μ-Dichten von ν.

Hinweis: Das Maß μ heißt *diskret*, wenn es abzählbar viele $\omega_i \in \Omega$ und $p_i \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\mu A = \sum_{\omega_i \in A} p_i \quad \text{für } A \in \mathcal{F}.$$

Aufgabe 3

Seien μ und ν stetige Maße auf der Borel-Algebra $\mathcal{B}^n$ des $\mathbb{R}^n$.

(i) Sind μ und ν immer σ-endlich?

(ii) Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung für $\nu \ll \mu$.

(iii) Berechnen Sie alle μ-Dichten von ν.

Hinweis: Das Maß μ heißt *stetig* mit Dichte a, wenn $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Borel-messbar ist mit

$$\mu A = \int_A a(x)\lambda(dx), \quad A \in \mathcal{F}.$$

Aufgabe 4

Es seien μ ein Maß auf σ-Algebra $\mathcal{F}$, g μ-integrierbar und ν definiert durch

$$\nu(A) := \int_A g \, d\mu, \quad A \in \mathcal{F}.$$

(i) Zeigen Sie, dass ν dann ein endliches Maß ist, insbesondere also $\nu(\{g \neq 0\}) < \infty$ gilt.

(ii) Geben Sie ein Beispiel an, bei dem $\mu(\{g \neq 0\}) = \infty$ gilt.

(iii) Zeigen Sie, dass es $A_n \in \mathcal{F}$ $(n \in \mathbb{N})$ gibt mit $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{g \neq 0\}$ und $\mu(A_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 5

(i) Seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum, g eine nicht negative, Borel-messbare Funktion auf Ω und ν definiert durch

$$\nu(A) := \int_A g \, d\mu \quad \text{für} \quad A \in \mathcal{F}.$$

Sei f eine Borel-messbare Funktion auf Ω. Zeigen Sie, dass f genau dann ν integrierbar ist, wenn fg μ-integrierbar ist, und dass im Falle der Integrierbarkeit

$$\int_\Omega f d\nu = \int_\Omega fg \, d\mu$$

gilt.

(ii) Für σ-endliche Maße μ und ν gilt $\mu \sim \nu$ genau dann, wenn μ eine (fast überall) strikt positive, (fast überall) endliche ν-Dichte besitzt.