W. Wefelmeyer
M. Schölpen

Wintersemester 2003/04

Übungen zur Stochastik II

Serie 10

(Abgabe: Montag, den 19.01.2004, in der Übung)

Aufgabe 46

Sei τ eine Stoppzeit bzgl. der Filtrierung $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$. Zeigen Sie:

(i) τ ist $\mathcal{F}_\tau$-messbar.

(ii) Auf $\{\tau = t\}$ gilt $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_t$.

(iii) Sei σ eine weitere $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$-Stoppzeit. Dann gilt $\mathcal{F}_\sigma \cap \{\sigma \leq \tau\} \subset \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau} = \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$.

Aufgabe 47

Seien $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ eine Filtrierung im Messraum $(\Omega, \mathcal{F})$ und $\tau : \Omega \to [0,\infty]$ eine Abbildung. Zeigen Sie: τ ist genau dann eine schwache Stoppzeit, wenn τ eine $(\mathcal{F}_t^+)_{t\geqslant 0}$-Stoppzeit ist.

Aufgabe 48

(i) Seien τ_n, $n \in \mathbb{N}$, Stoppzeiten. Zeigen Sie, dass $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \tau_n$ dann eine Stoppzeit ist.

(ii) Seien τ_n, $n \in \mathbb{N}$, schwache Stoppzeiten. Zeigen Sie, dass $\tau := \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \tau_n$ dann eine schwache Stoppzeit ist und $\mathcal{F}_\tau^+ = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_{\tau_n}^+$ gilt.

Aufgabe 49

Seien $G \subset \mathbb{R}^p$ offen, $T : G \to \mathbb{R}^p$ injektiv und $T^{-1} : TG \to G$ stetig differenzierbar mit $\det \partial T^{-1} \neq 0$ auf ganz TG. Sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{B}^p$ mit Lebesgue-Dichte f, die außerhalb von G verschwinde. Zeigen Sie, dass das Bildmaß P^T dann eine Dichte besitzt, die außerhalb von TG verschwindet und auf TG die Form $f \circ T^{-1} \cdot |\det \partial T^{-1}|$ hat.

Hinweis: Wenden Sie folgende Version der Substitutionsregel (für T^{-1} an Stelle von T) an: Sei $G \subset \mathbb{R}^p$ offen, $T : G \to \mathbb{R}^p$ injektiv und stetig differenzierbar, $\det \partial T \neq 0$ auf G und h sei eine integrierbare Funktion auf TG. Dann gilt für alle $A \in \mathcal{B}^p \cap G$:

$$\int\limits_{TA} h(y)\, dy = \int\limits_{A} h(T(x))|\det \partial T(x)|\, dx.$$

Aufgabe 50

Eine Funktion $A : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ heißt *Hölder der Ordnung a* auf dem Intervall *I*, wenn

$$\sup_{s,t \in I, s \neq t} \frac{|A_t - A_s|}{|t - s|^a} < \infty.$$

Zeigen Sie: Die Brownschen Pfade sind f.s. auf allen Intervallen nicht Hölder der Ordnung $a > 1/2$.