W. Wefelmeyer
M. Schölpen

Wintersemester 2003/04

Übungen zur Stochastik II

Serie 11

(Abgabe: Montag, den 26.01.2004, in der Übung)

Aufgabe 51

Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, Y_n, $n \in -\mathbb{N}$, und $Y_{-\infty}$ Zufallsvariablen mit $Y_n \underset{n\to-\infty}{\longrightarrow} Y_{-\infty}$ f.s., und es gebe eine Zufallsvariable Z mit $\mathrm{E}Z < \infty$ und $|Y_n| \leq Z$ f.s. für alle $n \in -\mathbb{N}$. $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}$, $n \in -\mathbb{N} \cup \{-\infty\}$, seien σ-Algebren mit $\mathcal{F}_n \downarrow \mathcal{F}_{-\infty}$. Zeigen Sie, dass dann

$$\mathrm{E}(Y_n|\mathcal{F}_n) \underset{n\to-\infty}{\longrightarrow} \mathrm{E}(Y_{-\infty}|\mathcal{F}_{-\infty}) \quad \text{f.s.}$$

gilt.

Aufgabe 52

Seien X_n, $n \in \mathbb{N}$, unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariable mit $\mathrm{E}X_n = \mu$ und $\mathrm{Var}(X_n) = \sigma^2 < \infty$. Zeigen Sie, dass

$$\binom{n}{2}^{-1} \sum_{1\leq i<j\leq n} (X_i - X_j)^2 \longrightarrow 2\sigma^2$$

gilt.

Aufgabe 53

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge $\{0,1\}$-wertiger, vertauschbarer Zufallsvariablen. Folgern Sie direkt aus der Definition der Vertauschbarkeit, dass

$$P(X_1 = 1, \ldots, X_k = 1 | S_n = m) = \frac{\binom{n-k}{n-m}}{\binom{n}{m}}$$

gilt ($k \leq m \leq n$, $S_n := \sum\limits_{j=1}^{n} X_j$).

Aufgabe 54

(i) Seien $X_1, \dots, X_n \in L^2(P)$ vertauschbar. Zeigen Sie, dass dann $\operatorname{Cov}(X_1, X_2) \geq -\frac{1}{n-1}\operatorname{Var}(X_1)$ gilt.

(ii) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vertauschbar mit $\operatorname{Var}(X_1) < \infty$. Zeigen Sie: $\operatorname{Cov}(X_1, X_2) \geq 0$.

(iii) Zeigen Sie, dass es eine vertauschbare Familie $X_1, \dots, X_n$ gibt, die nicht zu einer vertauschbaren Familie $X_1, \dots, X_{n+1}$ fortgesetzt werden kann.

Aufgabe 55

Eine Folge von Zufallvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *bedingt u.i.v. gegeben* $\mathcal{G}$, falls

$$P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n | \mathcal{G}) = \prod_{m=1}^{n} P(X_1 \leq x_m | \mathcal{G})$$

gilt. Zeigen Sie:

(i) Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bedingt u.i.v. gegeben $\mathcal{G}$, so ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vertauschbar.

(ii) Der Grenzwert von $(A_n(\varphi))_{n\in\mathbb{N}}$ (siehe Lemma 17.5) ist messbar bzgl. der terminalen σ-Algebra.