W. Wefelmeyer
M. Schölpen

Wintersemester 2003/04

Übungen zur Stochastik II
Serie 8
(Abgabe: Montag, den 15.12.2003, in der Übung)

Aufgabe 36

Seien $0 < p < \infty$ und $f_n \in L^p$, $n \in \mathbb{N}_0$, mit $f_n \xrightarrow{L^p} f_0$. Zeigen Sie, dass dann $\{|f_n|^p : n \in \mathbb{N}_0\}$ gleichgradig integrierbar ist.

Aufgabe 37

Sei $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter, reellwertiger, nicht f.s. konstanter Zufallsvariablen. $\phi : \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty]$ sei definiert durch

$$\phi(u) := \log \mathrm{E}(\exp(uY_1)), \quad u \in \mathbb{R}.$$

Setze $X_n := \sum_{k=1}^{n} Y_k$ für $n \in \mathbb{N}_0$ $(X_0 \equiv 0)$ sowie $\mathcal{F}_n := \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie:

(i) ϕ ist strikt konvex.

(ii) $\{\phi < \infty\}$ ist ein Intervall in $\mathbb{R}$ mit $0 \in \{\phi < \infty\}$.

(iii) Mit $Z_n := \exp[uX_n - n\phi(u)]$, $n \in \mathbb{N}_0$, ist $(Z_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ für jedes $u \in \mathbb{R}$ mit $\phi(u) < \infty$ ein positives Martingal, das in 1 startet.

(iv) Ist $u \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit $\phi(u) < \infty$, so konvergiert $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ fast sicher gegen 0.

Aufgabe 38

Sind $X_1, X_2, \ldots$ Zufallsvariablen, so konvergiert die Folge $(X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ für fast alle ω genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ gilt:

$$P \bigcup_{j,k\geq n} (|X_j - X_k| > \varepsilon) \longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad n \longrightarrow \infty.$$

Aufgabe 39

Seien $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit $P(Y_n = a_n) = P(Y_n = -a_n) = \frac{1}{2}$. Zeigen Sie: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergiert genau dann, wenn $\sum\limits_{u=1}^{\infty} Y_n$ fast sicher konvergiert.

Aufgabe 40

Zeigen Sie:

(i) Die Produkt-σ-Algebra $\mathcal{B}^{\otimes[0,\infty)}$ auf $\mathbb{R}^{[0,\infty)}$ besteht aus den messbaren Zylindern mit abzählbarer Basis.

(ii) Die Menge der stetigen Pfade $\omega = (\omega(t))_{t\geqslant 0}$ in $\mathbb{R}^{[0,\infty)}$ ist nicht Borel-messbar.