W. Wefelmeyer
M. Schölpen

Sommersemester 2004

11. Übung zur Mathematischen Statistik

(Abgabe: Dienstag, den 13.07.2004)

Aufgabe 51
Zeigen Sie (zumindest heuristisch): M-Schätzer sind regulär in parametrischen Familien.

Aufgabe 52
Seien (X_i, Y_i), $i = 1, \dots, n$, unabhängige Beobachtungen aus dem Regressionsmodell $Y = \vartheta X + \varepsilon$ mit X, ε unabhängig und ε standardnormalverteilt. Zeigen Sie (zumindest heuristisch), dass der Kleinste-Quadrate-Schätzer $\sum X_i Y_i \big/ \sum X_i^2$ effizient ist.

Aufgabe 53
Sei $u \in L_{2,0}(P)$. Setze

$$\overline{u}_n = u1\left(|u| < \frac{1}{2}n^{1/4}\right), \quad u_n = \overline{u}_n - P\overline{u}_n, \quad P_{nu}(dx) = P(dx)(1 + n^{-1/2}u_n(x)).$$

Dann ist P_{nu} Hellinger-differenzierbar in P mit Ableitung u.

Aufgabe 54
Sei $P_{n\tau}, \tau \in \Theta$, lokal asymptotisch normal in $\vartheta \in \Theta$. Sei $t : \Theta \to \mathbb{R}$ differenzierbar in ϑ. Sei T_n regulär und effizient für t in ϑ. Ist $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar in $t(\vartheta)$, so ist $g(T_n)$ regulär und effizient für $g(t)$ in ϑ.

Aufgabe 55 *(Von-Mises-Statistik)*
Sei $(E, \mathcal{E})$ ein messbarer Raum und $k : E \times E \to \mathbb{R}$ messbar und symmetrisch. Sei $\mathcal{P}$ die Familie aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathcal{E}$, für die $\int k(x,y)^2 P(dx)P(dy)$ endlich ist. Dann heißt $t(P) = \int k(x,y)P(dx)P(dy)$ ein *von-Mises-Funktional*. Sind $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und verteilt nach $P \in \mathcal{P}$, so heißt $t(\mathbb{P}_n)$ die zugehörige *von-Mises-Statistik*. (Dabei bezeichnet $\mathbb{P}_n$ die empirische Verteilung.)

a) Bestimmen Sie den Gradienten von t.

b) Zeigen Sie, dass $t(\mathbb{P}_n)$ regulär und effizient für t ist.