Prof. Dr. W. Wefelmeyer **WS 2004/05**
Dipl.-Math. K. Tang

Übungen zur Einführung in die Stochastik
Serie 9
Abgabe: Ab 20.12.04 in den jeweiligen Übungen

49. Seien (X_i, Y_i), $i \in \mathbb{N}$, unabhängige und identisch verteilte zweidimensionale Zufallsvektoren mit endlichen vierten Momenten EX_1^4, EY_1^4. Dann ist

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})$$

ein konsistenter Schätzer für die Kovarianz von X_1 und Y_1. Bestimmen Sie außerdem seine Einflußfunktion und seine asymptotische Varianz.

50. Seien (X_i, ε_i), $i \in \mathbb{N}$, unabhängige und identisch verteilte zweidimensionale Zufallsvektoren aus dem eindimensionalen Regressionsmodell

$$Y = bX + \varepsilon \quad \text{ mit } E\varepsilon = 0 \text{ und } b \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie den Kleinste-Quadrate-Schätzer für b, und zeigen Sie, daß er unter geeigneten Integrierbarkeitsbedingungen konsistent ist. Bestimmen Sie zusätzlich seine Einflußfunktion und seine asymptotische Varianz.

51. Sei $\hat{b}$ der Kleinste-Quadrate-Schätzer aus Aufgabe 50.
Gilt EX^4 und $E\varepsilon^4 < \infty$, dann ist

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{b}X_i)^2$$

ein konsistenter Schätzer für die Varianz von ε. Bestimmen Sie außerdem seine Einflußfunktion und seine asymptotische Varianz. Wie vereinfachen sie sich, wenn ε und X unabhängig sind?

52. Seien $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ unabhängig und identisch verteilt mit Dichte f und Verteilungsfunktion F. Die empirische Verteilungsfunktion $\hat{F}_n$ ist definiert durch:

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{(X_i \leq x)}.$$

Sei f stetig in x. Zeigen Sie, daß der geschätzte Differenzenquotient

$$\hat{f}_n(x) = \frac{\hat{F}_n(x+b_n) - \hat{F}_n(x-b_n)}{2b_n}$$

ein konsistenter Schätzer für $f(x)$ ist, wenn $b_n \longrightarrow 0$ und $nb_n \longrightarrow \infty$.

53. Seien $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ unabhängig und identisch verteilt mit einer Dichte f, die in x differentierbar ist. Finden Sie einen konsistenten Schätzer für die Ableitung $f'(x)$.

54. Seien $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ unabhängig und identisch verteilt mit einer Dichte f, die in 0 einen Sprung hat und rechts- und linksstetig ist. Finden Sie einen konsistenten Schätzer für

$$f(0+) = \lim_{x\downarrow 0} f(x),$$
$$f(0-) = \lim_{x\uparrow 0} f(x)$$

und die Sprunghöhe $f(0+) - f(0-)$.

Mathematische Karikatur