

Übungen zur Stochastik 1  
Serie 7

Abgabe: Dienstag, 28.06.05, 14:00 im Hörsaal

**31.** Sei  $p \geq 1$ . Gelte  $X_n \rightarrow X \in L_p$  in Wahrscheinlichkeit. Es gebe ein  $Y$  in  $L_p$ , so daß  $|X_n| \leq Y$  für alle  $n$ . Dann gilt auch  $X_n \rightarrow X$  in  $L_p$ .

**32.** Sind  $X_1, X_2, \dots$  Zufallsvariablen, so konvergiert die Folge  $(X_n(\omega))$  für fast alle  $\omega$  genau dann, wenn für alle  $\varepsilon > 0$  gilt:

$$P \bigcup_{j,k \geq n} (|X_j - X_k| > \varepsilon) \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

**33.** a) Wenn  $X_n \rightarrow X$  und  $Y_n \rightarrow Y$  in  $L_p$ , dann auch  $X_n + Y_n \rightarrow X + Y$  in  $L_p$ ,  $p \geq 1$ .

b) Wenn  $p > 1$  und  $q = p/(p-1)$ , und wenn  $X_n \rightarrow X$  in  $L_p$  und  $Y_n \rightarrow Y$  in  $L_q$ , dann gilt  $X_n Y_n \rightarrow XY$  in  $L_1$ .

c) Wenn  $X_n \rightarrow X$  und  $Y_n \rightarrow Y$  in Wahrscheinlichkeit, dann auch  $X_n + Y_n \rightarrow X + Y$  und  $X_n Y_n \rightarrow XY$  in Wahrscheinlichkeit.

**34.** Sei  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  eine stetige Funktion und  $X_1, X_2, \dots$  eine Folge von Zufallsvariablen.

a) Gilt  $X_n \rightarrow X$  fast sicher, dann auch  $f \circ X_n \rightarrow f \circ X$  fast sicher.

b) Gilt  $X_n \rightarrow X$  in Wahrscheinlichkeit, dann auch  $f \circ X_n \rightarrow f \circ X$  in Wahrscheinlichkeit.

**35.** Seien  $X_1, X_2, \dots$  unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit  $EX_1^- < \infty$ ,  $\text{Var}X_1^- < \infty$  und  $EX_1^+ = \infty$ . Dann gilt:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow \infty \text{ fast sicher.}$$