Prof. Dr. W. Wefelmeyer **WS 05/06**
Dipl.-Math. K. Tang

Übungen zur Stochastik 2
Serie 1
Abgabe: Dienstag, 25.10.05, 12:30 im Seminarraum 2 des Mathematischen Instituts

1. (*Eigenschaften von Stoppzeiten.*)
a) Sind S und T Stoppzeiten, dann auch $S \vee T$, $S \wedge T$ und $S + T$.
b) Eine Stoppzeit T ist $\mathcal{F}_T$-meßbar.
c) Ist T eine Stoppzeit und X eine Zufallsvariable, so ist X_T $\mathcal{F}_T$-meßbar.
d) Sind S und T Stoppzeiten mit $S \leq T$, dann gilt $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.
(*Hinweis:* $x \vee y = \max\{x, y\}$, $x \wedge y = \min\{x, y\}$.)

2. (*Doob-Zerlegung.*) Sei $(X_n, \mathcal{F}_n)$ ein Submartingal. Dann hat X_n eine Zerlegung

$$X_n = X_1 + M_n + A_n,$$

bei der M_n ein Martingal mit Erwartungswert 0 und A_n eine $\mathcal{F}_{n-1}$-meßbare Zufallsvariable und in n nichtfallend ist.
(*Hinweis:* $M_n = \sum_{i=2}^{n}(X_i - \mathrm{E}(X_i|\mathcal{F}_{i-1}))$.)

3. Ursprünglich bedeutet 'Martingal' folgende Strategie (auch Petersburger Strategie genannt): Sie verdoppeln bei jedem Spiel den Einsatz und hören auf, wenn Sie das erste Mal gewinnen. — Für ein faires Spiel gilt:
a) Am Schluß haben Sie Ihren ersten Einsatz verdoppelt. (Der Satz über optional sampling gilt also *nicht.*)
b) Ihr Vermögen ist ein Martingal.
c) Die Stoppzeit ist geometrisch verteilt.
d) Der Erwartungswert Ihres Einsatzes bis zum letzten Spiel ist *unendlich.* (Sie benötigen also ein hohes Startkapital.)

4. (*Optional switching.*) Seien $(X_n, \mathcal{F}_n)$ und $(Y_n, \mathcal{F}_n)$ Martingale und T eine Stoppzeit, und es gelte $X_T = Y_T$, wenn $T < \infty$. Definiere

$$Z_n = \begin{cases} X_n & n < T. \\ Y_n & n \geq T. \end{cases}$$

bitte Wenden

(*Interpretation:* Zum Zeitpunkt T setzen Sie sich mit Ihren bisher gewonnenen Chips an einen anderen Spieltisch.)

Dann ist $(Z_n, \mathcal{F}_n)$ ein Martingal.

5. Sei $\{\xi_n\,,\, n \geq 1\}$ eine Familie von unabhängig verteilten Zufallsvariablen und $\{\eta_n\,,\, n \geq 1\}$ eine Familie von Zufallsvariablen mit der Eigenschaft, dass die beiden Familien $\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$ und $\{\xi_n, \xi_{n+1}, \ldots\}$ unabhängig sind für alle $n \geq 1$. Zeigen Sie, dass die Folge

$$\{\zeta_n = \sum_{k=1}^{n} \eta_k \xi_k\,,\; n \geq 1\}$$

ein Martingal ist, falls $E\xi_n = 0$ und $E|\xi_n \eta_n| < \infty$ für $n \geq 1$.