**Prof. Dr. W. Wefelmeyer**
**Dipl.-Math. K. Tang**

**WS 05/06**

# Übungen zur Stochastik 2
## Serie 2
## Abgabe: Montag, 31.10.05, 11:45 im Seminarraum 2 des Mathematischen Instituts

**6.** Sei $(X_n, \mathcal{F}_n)$ ein Martingal und $T$ eine beschränkte Stoppzeit. Dann gilt $EX_T = EX_1$.

**7.** Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen mit $EX_1 = 0$ und $EX_1^2 = \sigma^2 < \infty$. Dann ist $\left(\sum_{j=1}^n X_1\right)^2 - n\sigma^2$ ein Martingal.

**8.** Ist $(X_n, \mathcal{F}_n)$ ein Submartingal und $c$ eine Konstante, so ist $(\max\{X_n, c\}, \mathcal{F}_n)$ ebenfalls ein Submartingal.

**9.** (*Quadratintegrierbare Martingale.*) Sei $(X_n, \mathcal{F}_n)$ ein Martingal mit $EX_n^2 < \infty$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(i) $X_n^2$ ist ein Submartingal.

(ii) $EX_n^2$ wächst in $n$.

(iii) $E(X_n X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n^2$.

(iv) $E((X_{n+1} - X_n)^2 | \mathcal{F}_n) = E(X_{n+1}^2 - X_n^2 | \mathcal{F}_n)$.

(v) Setze $A_0 = 0$ und $A_n = A_{n-1} + E(X_n^2 - X_{n-1}^2 | \mathcal{F}_n)$. Dann ist $A_n$ $\mathcal{F}_{n-1}$-meßbar und nichtfallend in $n$ und $X_n^2 - A_n$ ist ein Martingal. ($A_n$ heißt *Kompensator* von $X_n^2$.)

**10.** Seien $X_1, X_2, \dots$ und $Y_1, Y_2, \dots$ Zufallsvariablen. Es habe $(X_1, \dots X_n)$ eine positive Dichte $f_n$ und $(Y_1, \dots Y_n)$ eine Dichte $g_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $g_n(X_1, \dots, X_n)/f_n(X_1, \dots X_n)$ ein Martingal.