Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dipl.-Math. K. Tang

WS 05/06

Übungen zur Stochastik 2
Serie 3
Abgabe: Dienstag, 08.11.05, 12:30 im Seminarraum 2 des Mathematischen Instituts

11. Ist $(M_n, \mathcal{F}_n)$ ein Martingal, dann auch $(X_n, \mathcal{F}_n)$ mit

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}(M_k - M_{k-1}).$$

Ist die Folge (EM_n^2) beschränkt, so konvergiert X_n fast sicher und in L_2.

12. Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von Zufallsvariablen mit Werten in $[0,1]$ und $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}(X_1, \ldots, X_n)$. Gilt

$$P(X_{n+1} = \frac{X_n}{2}|\mathcal{F}_n) = 1 - X_n \text{ und } P(X_{n+1} = \frac{1+X_n}{2}|\mathcal{F}_n) = X_n,$$

dann ist $(X_n, \mathcal{F}_n)$ ein Martingal. Zeigen Sie ferner, dass X_n fast sicher und in L_2 konvergiert.

13. Sei X_n wie in Aufgabe 12 und $Z = \lim_{n\to\infty} X_n$. Zeigen Sie die folgende Aussagen.

(i) $E((X_{n+1} - X_n)^2) = \frac{1}{4}E(X_n(1 - X_n))$.

(ii) $E(Z(1 - Z)) = 0$ und Z ist Bernoulli-verteilt.

14. (*Berechnung einer Dichte.*) Sei Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{F} = \sigma \bigcup \mathcal{A}_n$, wobei $\mathcal{A}_n = \{A_{n1}, A_{n2}, \ldots\}$ eine Zerlegung von Ω und $\mathcal{A}_{n+1}$ feiner als $\mathcal{A}_n$ ist. Sei ν ein endliches signiertes Maß mit P-Dichte f. Dann gilt

$$\frac{\nu A_{ni(\omega)}}{P A_{ni(\omega)}} \to f(\omega) \quad \text{fast sicher,}$$

wenn $i(\omega)$ durch $\omega \in A_{ni(\omega)}$ definiert ist.

15. Charakterisieren Sie die Irrfahrten, die Submartingale, Supermartingale oder Martingale sind.