**Prof. Dr. W. Wefelmeyer** **WS 05/06**
**Dipl.-Math. K. Tang**

**Übungen zur Stochastik 2**
**Serie 4**
**Abgabe: Dienstag, 15.11.05, 12:30 im Seminarraum 2 des Mathematischen Instituts**

**16.** Sei $Y_1, Y_2, \ldots$ eine Folge von nichtnegativen, unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen mit Erwartungswert Eins. Sei $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}(Y_1, \ldots, Y_n)$. Ist $X_0 = 0$ und $X_n = \prod_{k=1}^n Y_k$, dann ist $(X_n, \mathcal{F}_n)$ ein Martingal und $(\sqrt{X_n}, \mathcal{F}_n)$ ein Supermartingal. Gilt zusätzlich $\prod_{k=1}^\infty E\sqrt{Y_k} = 0$, dann konvergiert $X_n$ nicht in $L_1$.

**17.** Sei $X_n$ aus Aufgabe 16 und $\prod_{k=1}^\infty E\sqrt{Y_k} > 0$. Zeigen Sie, dass $\sqrt{X_n}$ eine Cauchy-Folge in $L_2$ ist, und folgern Sie, dass $X_n$ in $L_1$ konvergiert.

**18.** Sei $X_1, X_2, \ldots,$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$. Zeigen Sie die folgende Aussage.

(a) $\sum_{k=1}^\infty X_n^2$ konvergiert in $L_1$ genau dann, wenn $\sum_{k=1}^\infty (\mu_k^2 + \sigma_k^2) < \infty$.

(b) Konvergiert $\sum_{k=1}^\infty X_k^2$ in $L_1$, dann auch in $L_p$ für alle $p > 1$.

(c) Gilt $\mu_k = 0$ für alle $k > 0$ und $\sum_{k=1}^\infty \sigma_k^2 = \infty$, dann folgt $P(\sum_{k=1}^\infty X_k^2 = \infty) > 0$. Es gilt sogar $\sum_{k=1}^\infty X_k^2 = \infty$ fast sicher.

**19.** Seien $Y_1, Y_2, \ldots$ unabhängig mit $P(Y_n = a_n) = P(Y_n = -a_n) = \frac{1}{2}$. Wenn $\sum_{k=1}^\infty Y_k$ fast sicher konvergiert, dann konvergiert auch $\sum_{k=1}^\infty a_k^2$ .

**20.** Seien $Y_1, Y_2, \ldots$ nichtnegativ und unabhängig identisch verteilt mit endlichem Erwartungswert, und sei $T : \Omega \to \mathbb{N}$ meßbar und unabhängig von $Y_k$ für $k \geq 1$. Sei $X_n = \sum_{k=1}^n Y_k$ die zugehörige Irrfahrt. Dann gilt $EX_T = EY_1 \cdot ET$.