Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dipl.-Math. K. Tang **WS 05/06**

Übungen zur Stochastik 2
Serie 5
Abgabe: Dienstag, 22.11.05, 12:30 im Seminarraum 2 des Mathematischen Instituts

21. Sei $X_0, X_1, \ldots$ eine homogene Markov-Kette, und seien $T_0 \leq T_1 \leq \ldots$ Stoppzeiten. Dann ist $X_{T_0}, X_{T_1}, \ldots$ eine Markov-Kette.

22. Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine homogene, $\mathbb{R}$-wertige Markov-Kette mit Übergangsverteilung Q. Sei $x \in \mathbb{R}$. Es gelte ferner $\int y^2 Q(x, dy) < \infty$. Für $n \in \mathbb{N}$ und eine meßbare Funktion f sei

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_x(f(X_n)) &= \mathrm{E}(f(X_n)|X_1 = x), \\ \mathrm{Var}_x(f(X_n)) &= \mathrm{E}_x(f(X_n) - \mathrm{E}_x(f(X_n)))^2. \end{aligned}$$

Drücken Sie $\mu_1(x) = \mathrm{E}_x(X_2)$ und $\mu_2(x) = \mathrm{Var}_x(X_2)$ mit Q aus, und zeigen Sie die beiden folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_x(X_{n+1}) &= \mathrm{E}_x(\mu_1(X_n)), \\ \mathrm{Var}_x(X_{n+1}) &= \mathrm{Var}_x(\mu_1(X_n)) + \mathrm{E}_x(\mu_2(X_n)). \end{aligned}$$

23. Sei $Y_1, Y_2, \ldots$ eine $\mathbb{Z}$-wertige Markov-Kette mit Übergangsmatrix Q. Sei $F \subseteq \mathbb{Z}$ und $T = \inf\{n \geq 0; X_n \in F\}$ die Stoppzeit in F. Zeigen Sie, dass $X_n = Y_{T \wedge n}$ eine Markov-Kette ist, und geben Sie ihre Übergangsmatrix an.

24. Hat (X, Y) eine Dichte f, so hat die bedingte Verteilung von Y gegeben $X = x$ in y die Dichte $f(x, y)/\int f(x, y)dy$, und $\int f(x, y)dy$ ist die Dichte von X in x.

25. Sei $f(Y)$ integrierbar, und die bedingte Verteilung von Y gegeben $X = x$ sei $Q(x, dy)$. Dann ist $\int f(y)Q(x, dy)$ eine Version des bedingten Erwartungswertes von $f(Y)$ gegeben $X = x$.