Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dipl.-Math. K. Tang **WS 05/06**

Übungen zur Stochastik 2
Serie 7
Abgabe: Dienstag, 06.12.05, 12:30 im Seminarraum 2 des Mathematischen Instituts

31. Ist B eine eindimensionale Brownsche Bewegung, so heißt $B_t - tB_1$, $0 \leq t \leq 1$, eine Brownsche Brücke. Zeigen Sie: Die Brownsche Brücke ist verteilt wie B_t, $0 \leq t \leq 1$ bedingt nach $B_1 = 0$.
(*Hinweis:* Es genügt, die endlich-dimensionalen Randverteilungen zu betrachten.)

32. Eine Funktion $A : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ heißt *Hölder der Ordnung* a auf dem Intervall I, wenn

$$\sup_{s,t \in I, s \neq t} \frac{|A(s) - A(t)|}{|s-t|^a} < \infty.$$

Zeigen Sie: Die Brownschen Pfade sind $f.s.$ auf allen Intervallen nicht Hölder der Ordnung $a > \frac{1}{2}$.

33. Ist B eine eindimensionale Brownsche Bewegung, so sind folgende Prozesse Martingale:

a) $B_t^2 - t$,

b) $\exp(aB_t - \frac{1}{2}a^2 t)$, $\quad a \in \mathbb{R}$.

34. Ist X ein Submartingal mit $EX_t = EX_0$ für $t \geq 0$, dann ist X ein Martingal.

35. Ist B eine Brownsche Bewegung, so ist $tB_{\frac{1}{t}}$ auch eine Brownsche Bewegung und $(1-t)B_{\frac{t}{1-t}}$ $tB_{\frac{1-t}{t}}$ sind Brownsche Brücken. Ist dagegen B eine Brownsche Brücke, so sind $(1+t)B_{\frac{t}{1+t}}$ und $(1+t)B_{\frac{1}{1+t}}$ Brownsche Bewegungen.