Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dipl.-Math. K. Tang **WS 05/06**

Übungen zur Stochastik 2
Serie 8
Abgabe: Dienstag, 13.12.05, 12:30 im Seminarraum 2 des Mathematischen Instituts

36. Für jede Filtration $(\mathcal{F}_t)$ ist $(\mathcal{F}_{t+})$ rechtsstetig.

37. Ist X ein d-dimensionaler linksstetiger Prozeß, so ist seine natürliche Filtration linksstetig.

38. Sei X ein stetiger reellwertiger Prozeß, und für alle reellen u sei $\exp(iuX_t + \frac{1}{2}u^2 t)$ ein $(\mathcal{F}_t)$-Martingal. Dann ist X eine $(\mathcal{F}_t)$-Brownsche Bewegung.

39. Der Satz über optional stopping gilt nicht ohne die Voraussetzung der gleichmäßigen Integrierbarkeit: Ein Beispiel ist $X_t = \exp(B_t - t/2)$ und $T = \inf\{t : X_t \le a\}$ mit $0 < a < 1$.

40. Seien X_n unabhängig und $E_{1/a}$-verteilt. Dann gilt:

a) $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ ist $\Gamma_{1/a,n}$-verteilt.

b) $N_t = \#\{n : S_n \le t\}$ ist P_{at}-verteilt.

c) Sei $(\mathcal{F}_t)$ die natürliche Filtration von N. Zu $A \in \mathcal{F}_s$ und $n \in \mathbf{N}$ existiert $B \in \sigma(S_1, \ldots, S_n)$ mit $A \cap \{N_s = n\} = B \cap \{N_s = n\}$.

d) Für $A \in \mathcal{F}_s$ gilt

$$\mathrm{E}1_{A\cap\{N_s=n\}} P(S_{n+1} > t|\mathcal{F}_s) = e^{-a(t-s)} PA \cap \{N_s = n\}.$$

e) $P(S_{N_s+1} > t|\mathcal{F}_s) = e^{-a(t-s)}$.

f) Für $A \in \mathcal{F}_s$ gilt

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}1_{A\cap\{N_s=n\}} P(N_t - N_s \le k|\mathcal{F}_s)\\ &= \sum_{j=1}^{k} e^{-a(t-s)} \frac{(a(t-s))^j}{j!} PA \cap \{N_s = n\}.\end{aligned}$$

g) N hat unabhängige Zuwächse.

Ein Prozeß N mit unabhängigen Zuwächsen und $N_t - N_s \sim P_{a(t-s)}$ für $s < t$ heißt *Poisson-Prozeß* mit *Intensität* a.