Prof. Dr. W. Wefelmeyer **WS 05/06**
Dipl.-Math. K. Tang

Übungen zur Stochastik 2
Serie 9
Abgabe: Dienstag, 20.12.05, 12:30 im Seminarraum 2 des Mathematischen Instituts

41. Sei $P|\mathcal{B}^k$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit Dichte f und Verteilungsfunktion $F(t) = P((-\infty, t_1] \times \cdots \times (-\infty, t_k])$ für $t = (t_1, \ldots, t_k)$. Wie berechnet sich die Dichte aus der Verteilungsfunktion ?

(Variablentransformation.) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $T : U \to \mathbb{R}^d$ stetig differenzierbar und invertierbar. Sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ meßbar. Ist $A \subseteq U$ meßbar, so gilt

$$\int_A f(x)dx = \int_{T^{-1}A} |J(x)| f(T(x))dx,$$

wobei $J(x)$ die Jacobi-Determinante von T in x ist.

42. *(Transformationssatz für Dichten.)* Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $T : U \to \mathbb{R}^d$ stetig differenzierbar und invertierbar. Ferner sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit Dichte f und $PU = 1$. Zeigen Sie, dass P^T die Dichte

$$f^T(y) = \begin{cases} \frac{1}{|J(T^{-1}(y))|} f(T^{-1}(y)) & \text{falls } y \in T(U), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

hat.

43. Die *d-dimensionale Normalverteilung* $N(\mu, \Sigma)$ mit Mittelwert μ und Kovarianzmatrix Σ hat die Dichte

$$f(x) = (2\pi)^{-d/2} |\det \Sigma|^{-1/2} e^{-1/2(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)}.$$

(i) Ist X verteilt nach $N(\mu, \Sigma)$ und A eine invertierbare $d \times d$-Matrix, wie ist dann AX verteilt ?

(ii) Sei $X^T = (Y_1^T, Y_2^T)$ verteilt nach $N(\underline{0}, \Sigma)$. Ist

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix},$$

dann gilt $\Sigma_{ij} = EY_iY_j^T$. Setzen wir $Z_1 = Y_1 - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}Y_2$, dann ist (Z_1, Y_2) normalverteilt, und Z_1 und Y_2 sind unabhängig.

(iii) Sei (Y_1, Y_2) wie oben. Was ist die bedingte Verteilung von Y_1 gegeben Y_2?

44. Sei B die Brownsche Bewegung und $0 < s < t < u$. Berechnen Sie die bedingte Verteilung von B_t gegeben B_s und B_u.

45. Sind X, Y nichtnegative Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte $f(x, y) = g(x + y)$, und gilt $G(x) \to 0$ für $x \to \infty$ für die Stammfunktion G von g, so haben X und Y die Dichte $-G([0, \infty))$.