Prof. Dr. W. Wefelmeyer **WS 05/06**
Dipl.-Math. K. Tang

Übungen zur Stochastik 2
Serie 10
Abgabe: Dienstag, 10.01.2006, 12:30 im Seminarraum 2 des Mathematischen Instituts

46. Sei $Z_1, Z_2, \ldots$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen mit $P(Z_1 = 1) = P(Z_1 = -1) = \frac{1}{2}$, und $S_n = \sum_{i=1}^n Z_i$. Für $a \in \mathbb{N}$ sei $\tau = \inf\{n : S_n = a\}$ die Eintrittszeit in a.

(a) Zeigen Sie, dass für $\theta \in \mathbb{R}$ der Prozess

$$X_n^\theta = \frac{e^{\theta S_n}}{(\cosh \theta)^n}$$

ein Martingal ist. Ist $\theta \geq 0$, dann ist $X_{n\wedge\tau}^\theta$ ein beschränktes Martingal.

(b) Zeigen Sie, dass für $\theta \geq 0$ der Prozess $X_{n\wedge\tau}^\theta$ fast sicher und in L^2 gegen $\frac{e^{\theta a}}{(\cosh\theta)^\tau} 1_{\{\tau<+\infty\}}$ konvergiert.

47. Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen mit $X_1 \sim N(m, \sigma^2)$ und $m < 0$. Ferner sei $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{j=0}^n X_j$ und $W = \sup_{n\geq 0} S_n$.

(a) Zeigen Sie, dass $P(W < \infty) = 1$.

(b) Verifizieren Sie, dass für alle $\lambda \in \mathbb{R}$

$$Ee^{\lambda X_1} = e^{\frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2} e^{\lambda m}$$

gilt, und berechnen Sie $E(e^{\lambda S_{n+1}} | \sigma(S_1, \ldots, S_n))$.

(c) Bestimmen Sie ein λ_0, so dass $e^{\lambda_0 S_n}$ ein Martingal ist.

48. Sei B die Brownsche Bewegung und $M_t = \sup_{0<s<t} B_s$. Bestimmen Sie die bedingte Verteilung von M_t gegeben $B_t = M_t$.

49. Ist B die Brownsche Bewegung, dann sind bekanntlich $B_t^2 - t$ und $B_t^4 - 6tB_t^2 + 3t^2$ Martingale. Bestimmen Sie zwei ähnliche Martingale, deren führender Term B_t^3 bzw. B_t^5 ist.

50. Sei B die Brownsche Bewegung. Für jedes t gilt:

$$\limsup_{h \downarrow 0} \frac{|B_{t+h} - B_t|}{h^{\frac{1}{2}}} = \infty \text{ fast sicher.}$$

Die Pfade sind also nicht Hölder-stetig der Ordnung $\frac{1}{2}$.