Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dipl.-Math. K. Tang

WS 05/06

Übungen zur Stochastik 2
Serie 11
Abgabe: Dienstag, 17.01.2006, 12:30 im Seminarraum 2 des Mathematischen Instituts

51. Für fast alle Pfade der Brownschen Bewegung B gilt: Jeder Punkt in $[-1,1]$ ist Häufungspunkt von $B_t/\sqrt{2t\log\log t}$. Ferner wird jeder Punkt in $(-1,1)$ unendlich oft besucht.

52. Sei B die Brownsche Bewegung und f eine beschränkte und meßbare Funktion. Dann gilt:

$$E\int_0^x f(B_t)dt = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-\frac{y^2}{2t}}dydt$$

(Erneuerungsprozeß.) Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von positiven, unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen mit Erwartungswert 1 und Varianz $\sigma^2 < \infty$. Ferner sei $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$ und $N_t = \#\{n : S_n \leq t\}$. Dann heißt N der *Erneuerungsprozeß*.

53. Zeigen Sie, daß

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N_t - t - \sigma B_t}{\sqrt{2t\log\log t}} = 0 \text{ fast sicher.}$$

Insbesondere gilt für N ein Gesetz vom iterierten Logarithmus.
(*Hinweis*: Sehen Sie sich N zunächst an den Sprungstellen $t = S_n$ an.)

54. Sei B eine Brownsche Bewegung und N ein Erneuerungsprozeß. Zeigen Sie, dass

$$t^{-1/2}\sup_{s\leq t}|N_s - s - \sigma B_s| \to 0 \text{ (P)}$$

für $t \to \infty$. Insbesondere gilt für N ein funktionaler zentraler Grenzwertsatz.

55. Ist B eine Brownsche Bewegung und τ eine Stoppzeit, so gilt $E\tau \geq EB_\tau^2$.