

Übungen zur Stochastik 2  
Serie 12

Abgabe: Dienstag, 24.01.2006, 12:30 im Seminarraum 2 des  
Mathematischen Instituts

**56.** (*Polya-Urne.*) Eine Urne enthält rote und weiße Kugeln; mindestens eine von jeder Farbe. Wir ziehen eine Kugel und legen sie mit  $c$  weiteren Kugeln derselben Farbe zurück. Das wiederholen wir. Dann ist der Anteil der roten Kugeln ein Martingal.

**57.** Sei  $B$  die Brownsche Bewegung. Ist  $g$  eine beschränkte Funktion auf  $[0, 1]$ , dann ist

$$\int_0^1 g(t) B_t dt$$

normalverteilt mit Mittelwert 0 und Varianz  $\int_0^1 t g^2(t) dt$ .

**58.** Ist  $B$  die Brownsche Bewegung, und sind  $S$  und  $T$  beschränkte Stoppzeiten mit  $S \leq T$ , dann gilt:

$$E(B_T - B_S)^2 = E(B_T^2 - B_S^2) = E(T - S).$$

**59.** Sei  $B$  eine Brownsche Bewegung und  $0 < s < t$ . Was ist die verbundene Verteilung von  $(B_s, B_t)$ , und was ist die bedingte Verteilung von  $B_s$  gegeben  $B_t$  ?

**60.** Die quadratische Variation hat die Eigenschaften eines inneren Produkts: Sind  $X, Y, Z$  stetige lokale Martingale und  $a, b \in \mathbb{R}$ , so gilt:

a)  $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ ,

b)  $[X, Y] = [Y, X]$ .

Also gilt die Schwarzsche-Ungleichung

$$|[X, Y]| \leq [X, X][Y, Y]$$

und die Minkowski-Ungleichung

$$[X + Y, X + Y]^{1/2} \leq [X, X]^{1/2} + [Y, Y]^{1/2}.$$

Aus der letzteren folgt

$$|[X, X]^{1/2} - [Y, Y]^{1/2}| \leq [X - Y, X - Y]^{1/2}.$$