

Übungen zur Stochastik 2
Serie 12

Abgabe: Dienstag, 24.01.2006, 12:30 im Seminarraum 2 des
Mathematischen Instituts

56. (*Polya-Urne.*) Eine Urne enthält rote und weiße Kugeln; mindestens eine von jeder Farbe. Wir ziehen eine Kugel und legen sie mit c weiteren Kugeln derselben Farbe zurück. Das wiederholen wir. Dann ist der Anteil der roten Kugeln ein Martingal.

57. Sei B die Brownsche Bewegung. Ist g eine beschränkte Funktion auf $[0, 1]$, dann ist

$$\int_0^1 g(t) B_t dt$$

normalverteilt mit Mittelwert 0 und Varianz $\int_0^1 t g^2(t) dt$.

58. Ist B die Brownsche Bewegung, und sind S und T beschränkte Stoppzeiten mit $S \leq T$, dann gilt:

$$E(B_T - B_S)^2 = E(B_T^2 - B_S^2) = E(T - S).$$

59. Sei B eine Brownsche Bewegung und $0 < s < t$. Was ist die verbundene Verteilung von (B_s, B_t) , und was ist die bedingte Verteilung von B_s gegeben B_t ?

60. Die quadratische Variation hat die Eigenschaften eines inneren Produkts: Sind X, Y, Z stetige lokale Martingale und $a, b \in \mathbb{R}$, so gilt:

a) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$,

b) $[X, Y] = [Y, X]$.

Also gilt die Schwarzsche-Ungleichung

$$|[X, Y]| \leq [X, X][Y, Y]$$

und die Minkowski-Ungleichung

$$[X + Y, X + Y]^{1/2} \leq [X, X]^{1/2} + [Y, Y]^{1/2}.$$

Aus der letzteren folgt

$$|[X, X]^{1/2} - [Y, Y]^{1/2}| \leq [X - Y, X - Y]^{1/2}.$$