Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dipl.-Math. K. Tang

WS 05/06

Übungen zur Stochastik 2
Serie 13
Abgabe: Dienstag, 31.01.2006, 12:30 im Seminarraum 2 des Mathematischen Instituts

61. Ist X ein lokales Martingal, und sind S und T Stoppzeiten, so daß X^S und X^T gleichmäßig integrierbare Martingale sind, dann ist $X^{S \vee T}$ ein gleichmäßig integrierbares Martingal.

62. Sind M und N unabhängige stetige lokale Martingale, so ist MN ein stetiges lokales Martingal, und $[M, N] = 0$.

63. Sei X stetig, adaptiert und L-*dominiert* durch einen wachsenden Prozeß A:

$$\mathrm{E}|X_T| \leq \mathrm{E}A_T \quad \text{für jede } \textit{beschränkte} \text{ Stoppzeit } T.$$

Dann gilt für *jede* Stoppzeit T und $\varepsilon > 0$:

$$P(\sup_{s \leq T} |X_s| \geq \varepsilon) \leq \varepsilon^{-1} \mathrm{E}A_T.$$

64. (*Lenglart-Ungleichung.*) Ist X stetig, adaptiert und L-dominiert durch einen wachsenden Prozeß A, so gilt für jede Stoppzeit T und $\varepsilon, \delta > 0$:

$$P(\sup_{s \leq T} |X_s| \geq \varepsilon) \leq \varepsilon^{-1} \mathrm{E}\delta \wedge A_T + P(A_T \geq \delta).$$

65. Ist M ein stetiges lokales Martingal mit $M_0 = 0$ und T eine Stoppzeit, so gilt

a) $\mathrm{E}M_T 2 \leq \mathrm{E}[M, M]_T$ und

b) $P(\sup_{s \leq T} |M_s| \geq \varepsilon) \leq \varepsilon^{-2} \mathrm{E}\delta \wedge [M, M]_T + P([M, M]_T \geq \delta)$.

(*Hinweis:* Verwenden Sie für den ersten Teil der Aufgabe das Lemma von Fatou.)